Operace s maticemi

Budeme psát $\mathbb{K}$ za reálná čísla $\mathbb{R}$ nebo kompl. čísla $\mathbb{C}$

Matice A typu $k \times n$ je obdélníková tabulka s k řádky a n sloupci, v nichž stojí čísla

$$a_{ij} \in \mathbb{K}$$

Toto číslo je v i-tém řádku a j-tém sloupci

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

Dále budu psát

$$A = (A_{ij})_{i,j}$$

Matice typu $1 \times n$ budeme nazývat řádkový vektor

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \end{pmatrix}$$

Matice typu $k \times 1$ budeme nazývat sloupcový vektor

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

- <u>Sčítání matic</u> Součet dvou matic stejného typu $k \times n$ je matice typu $k \times n$, sčítáme po složkách

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -8 & 19 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 5 & -11 & 17 \end{pmatrix}$$

3

Svojstva zbrajanja

- komutativnost $A + B = B + A$
- asocijativnost $(A+B)+C = A+(B+C)$
- nul matrica

$$O_{k\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + O_{k\times n} = A$$

- za svaku matricu postoji suprotna matrica, za A postoji $-A$

$$(-A)_{ij} = -A_{ij}$$

Násobení matice číslem $c \in \mathbb{K}$

cA je matice stejného typu jako A s prvky

$$(cA)_{ij} = c \cdot A_{ij}$$

$$c \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 19 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 2c & 3c \\ 8c & 19c & -9c \end{pmatrix}$$

Vlastnosti násobení číslem a sčítání

$$c(A+B) = cA + cB$$

$$(c+d)A = cA + dA$$

$$d(cA) = (dc)A$$

$$1 \cdot A = A$$

Násobení matic

Rovnici o jedné neznámé můžeme zapsat nad tělesem K

$$a \cdot x = b$$

jedna rovnice o více neznámých má zápis

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

Levou stranu této rovnice budeme psát jako součin řádkové a sloupcové matice:

$$(a_1\; a_2 \dots a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

Toto vezmeme za definici násobení matic typu $1 \times n$ a $n \times 1$.
Výsledek je matice typu 1×1.

$$(a_1\; a_2 \dots a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \underset{df}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

⑥

Více rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \dots\dots\dots & \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n &= b_k \end{aligned}$$

lze je rádi zapsali pomocí násobení matic takto:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \text{ typu } k \times n$$

$$(A \cdot x)_i = r_i(A) \cdot x = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

$r_i(A)$: i-tý řádek matice A

Obecně můžeme násobit matici A typu $\underline{k \times n}$ s maticí B typu $n \times \underline{p}$. Výsledkem je matice $A \cdot B$ typu $k \times p$

7

$$(A\cdot B)_{il} = r_i(A)\cdot s_l(B) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{jl}$$

i-tý řádek matice A   l-tý sloupec matice B

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & -1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 8 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 14 & 8 \\ 1 & 6 & 33 \end{pmatrix}$$

Násobení speciálními maticemi

A typu $k \times n$ násobíme zleva sloupcem $\left.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\} n$

$$A\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix} = s_1(A)$$

8

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \dots & a_{1n} \\ & & \dots & & \\ & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{k3} \end{pmatrix} = s_3(A)$$

$$e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$ 1 na místě k

$$A \cdot e_k = s_k(A)$$

Násobíme $(1\ 0\ 0 \dots 0)$ délky k maticí A typu $k \times n$

$$(1\ 0 \dots 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \dots & & & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & & a_{kn} \end{pmatrix} = (a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n}) = r_1(A)$$

9

Analogicky

$(0 \cdots 1 \cdots 0)\, A = r_i(A)$ i-tý řádek matice A

1 na místě i

Vezmeme-li matici $E_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ typu $k \times k$

pak $\underset{k\times k}{E_k} \cdot \underset{\text{typu } k\times n}{A} = A$ neboť dostaneme $\begin{matrix} r_1(A) \\ r_2(A) \\ \vdots \\ r_k(A) \end{matrix}$

Analogicky

$A \cdot E_n = (s_1 A \; s_2 A \cdots s_n A) = A$

typu $k \times n$ $\quad n \times n$

E_n se nazývá jednotková matice typu $n \times n$.

Vlastnosti násobení

- není komutativní

A typu $k \times n$, B typu $n \times p$, pak $A \cdot B$ má smysl a je to matice typu $k \times p$. Ale násobení $B \cdot A$ má smysl jenom tehdy, když $k = p$.

Nechť tedy $k = p$. Potom

$A \cdot B$ je matice typu $k \times k$

$B \cdot A$ je matice typu $n \times n$

Pokud vůbec chceme mluvit o rovnosti, musí být $n = k$.

Obě matice musí být čtvercové, stejného rozměru $n \times n$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- násobení je asociativní

$$\underbrace{\underbrace{(\underset{k\times n}{A}\cdot\underset{n\times p}{B})}_{k\times p}\cdot\underset{p\times r}{C}}_{k\times r}=\underbrace{\underset{k\times n}{A}\cdot\underbrace{(B\cdot C)}_{n\times r}}_{k\times r}$$

- násobení je distributivní vzhledem ke sčítání

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$$

- již víme o existenci jednotkové matice E_k typu $k\times k$

je-li A matice typu $k\times n$, pak platí

$$E_k\cdot A=A=A\cdot E_n$$

12

Transponovaná matice k matici A typu $k\times n$ je matice A^T typu $n\times k$ taková, že

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}$$

Příklad

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -8 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 3 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

Vlastnosti transponovaných matic

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(cA)^T = c\,A^T$$

ale

$$(A\cdot B)^T = B^T A^T \quad !$$

A typu $k\times n$

B typu $n\times p$ $\quad A\cdot B$ je typu $k\times p$

(13)

A^T je typu $n \times k$

B^T je typu $p \times n$ obecně nelze násobit $A^T B^T$

ale můžeme násobit $\underset{p\times n}{B^T} \cdot \underset{n\times k}{A^T}$ výsledek je $p \times k$

$(AB)^T$ je rovněž typu $p \times k$

Uděláme důkaz rovnosti

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

V i-tém řádku a j-tém sloupci levé strany je

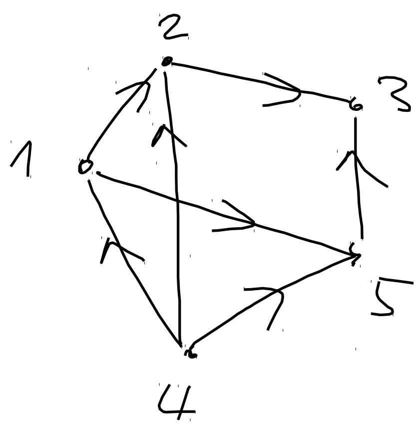
$$[(AB)^T]_{ij} = (A \cdot B)_{ji} = \sum_{l=1}^{n} A_{jl} B_{li}$$

V i-tém řádku a j-tém sloupci pravé strany je

$$(B^T \cdot A^T)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} (B^T)_{il} \cdot (A^T)_{lj} = \sum_{l=1}^{n} B_{li} A_{jl} = \sum_{l=1}^{n} A_{jl} B_{li}$$

Příklady násobení matic

1 Orientované grafy



uzly $\{1,2,3,4,5\} = U$

orientované spojnice ... hrany

$$H \subseteq U \times U$$

$$H = \{(1,2), (1,5)\ (2,3), (4,1), (4,5)\ (5,3)\} \qquad (4,2)$$

Tento graf můžeme zapsat pomocí matice 5×5

$a_{ij} = 1$ jestliže máme v grafu hranu (i,j)

0 jinak

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jaký význam má matice $A \cdot A = A^2$?

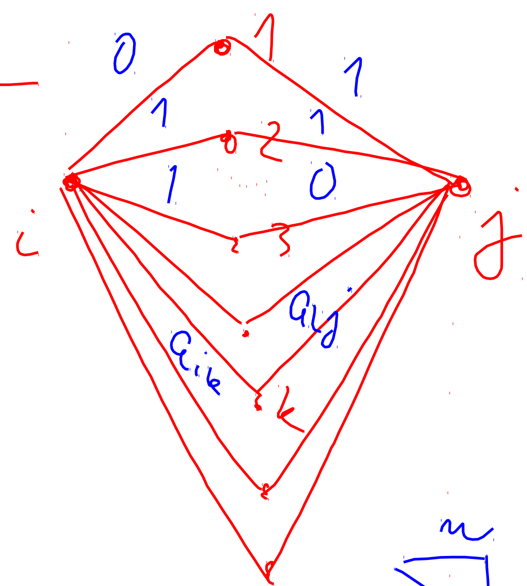
Z uzlu i existuje cesta do uzlu j, jestliže je v grafu následující hran → cesta délky k

$$(i, i_1)\ (i_1, i_2) \ldots (i, i_{k-1})\ (i_{k-1}, j)$$

Délka cesty je počet hran na cestě.

vypočítáme $A \cdot A = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(A^2)_{ij}$ = počet cest délky 2 z uzlu i do uzlu j

Důkaz:



$0 \cdot 1 = 0$ → cesta přes 1 nevede

$1 \cdot 1 = 1$ → cesta vede přes 2

$1 \cdot 0 = 0$

$a_{ik} \cdot a_{kj}$ cesta vede pokud je roven 1, nevede pokud je 0

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj} = \text{počet cest délky } 2.$$

16

Význam $A\cdot A\cdot A = A^3$ …… $(A^3)_{ij}$ = počet cest délky 3 z i do j

$$A\cdot A\cdot A = A^2\cdot A = \begin{array}{r} \\ \\ 4. \end{array}\begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 3. \end{array} = \begin{pmatrix} & \\ & \\ & 2 \end{pmatrix}$$

z 4 do 3 jsou 2 cesty délky 3.

② Markovovy procesy

Máme nějaký děj – proces, který může nabývat n různých stavů.

Čísla P_{ij} pro $1 \le i,j \le n$ určují pravděpodobnost, že za nějakou pevně danou časovou jednotku přejde stav j do stavu i.

Čísla P_{ij} nám dávají tzv. Markovovu matici

$$P = (P_{ij})_{i,j=1}^{n} \qquad 1 \geq P_{ij} \geq 0$$

Ze stavu j se vždy dostaneme do některého stavu $1, 2, \dots n$ (a to může do jednoho). Tedy součet čísel ve sloupci je 1.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ je pravděpodobnostní vektor

x_i je pravděpodobnost, že jsme ve stavu i

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \qquad 0 \leq x_i \leq 1.$$

Součin

$$y = P \cdot X \qquad y_i = P_{i1} x_1 + P_{i2} x_2 + \dots P_{in} x_n$$

y – stav v čase $t+1$

X – stav v čase t

y_i = pravděpodobnost, že v čase $t+1$ nastane stav i

18

<u>Úloha o ubohém hazardérovi</u> Házíme mince, máme 3 korunky

orel dostaneme +1 korunu

panna 1 korunka se odebere

Konec nastane máme-li 0 nebo 5 korun.

Jaká je pravděpodobnost, že hra skončí na 4 kolech.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

P_{ij} = pravděpodobnost, že z j korun uděláme i korun

$i, j = 0, 1 \ldots 5$

Po 1. házení $x_1 = P x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_2 = P \cdot x_1 = P \cdot (P \cdot x_0) = P^2 x_0$

$x_3 = P^3 x_0$

$x_4 = P^4 x_0$

$$P^4 x_0 = P^4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/8 \\ 3/16 \\ 0 \\ 5/16 \\ 0 \\ 3/8 \end{pmatrix}$$

Pravděpodobnost, že hra skončí po 4 kolech je

$1/8 + 3/8 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$