Báze vektorového prostoru

Vekt. prostor U nad $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Vektory $u_1, u_2, \dots u_k \in U$ jsou lin. nezávislé, jestliže rovnice $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k = \vec{0}$ má v neznámých $a_1, \dots a_k \in \mathbb{K}$ pouze triviální řešení

$$(a_1, a_2, \dots a_k) = (0, 0, \dots 0)$$

Tedy je ekvivalentní s tím, že

$$\forall (a_1, a_2, \dots a_k) \in \mathbb{K}^k \quad \left(a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k = \vec{0} \implies a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0 \right)$$

Lemma Vektory $u_1, u_2, \ldots, u_k$ jsou lineárně závislé právě když jeden z nich lze napsat jako lin. kombinaci ostatních.

Důkaz $\Longleftarrow$ Nechť $u_k = a_1 u_1 + \ldots + a_{k-1} u_{k-1}$.

Pak platí
$$a_1 u_1 + \ldots + a_{k-1} u_{k-1} + (-1) u_k = \vec{O}$$
a k-tice $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, -1) \neq (0, 0, \ldots 0)$. Tedy vektory $u_1, \ldots, u_k$ jsou lineárně závislé.

$\Longrightarrow$ Nechť $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_k u_k = \vec{O}$ a současně např. $a_k \neq 0$.

Pak
$$a_k u_k = -a_1 u_1 - a_2 u_2 + \ldots - a_{k-1} u_{k-1} \quad \Big/ \cdot \frac{1}{a_k}$$
$$u_k = -\frac{a_1}{a_k} u_1 - \frac{a_2}{a_k} u_2 + \ldots - \frac{a_{k-1}}{a_k} u_{k-1}$$

u_k je lin. kombinací ostatních.

Příklad Jsou vektory $u_1=(1,2,1,0)$, $u_2=(1,1,-1,2)$, $u_3=(1,0,1,1)$ v $\mathbb{R}^4$ lin. závislé?

Nechť $a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3=\vec{0}$

$$a_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\2\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Porovnáme 1., 2., 3. a 4. složku a dostaneme soustavu 4 rovnic o 3 neznámých a_1,a_2,a_3:

$$\begin{aligned} a_1+a_2+a_3&=0\\ 2a_1+a_2&=0\\ a_1-a_2+a_3&=0\\ 2a_2+a_3&=0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&0\\1&-1&1\\0&2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-2\\0&-2&0\\0&2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$a_3=0$
$a_2=0$
$a_1=0$

Vektory jsou lin. nezávislé.

Řekneme, že vektory $u_1, u_2, \ldots, u_n$ generují prostor U, jestliže každý vektor $u \in U$ lze psát jako jejich lin. kombinaci

$$(\forall u \in U)(\exists a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbb{K}) \quad (u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n)$$

Jinak – pomocí pojmu lin. obalu
$u_1, \ldots u_n$ generují U, jestliže $U = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$.

Řekneme, že vektorový prostor U nad $\mathbb{K}$ je konečné dimenze, je-li generován konečnou množinou vektorů.

Příklad $U = \mathbb{R}^n$, vektory $e_1 = (1, 0, \ldots 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, \ldots 0, 1)$ generují prostor $\mathbb{R}^n$ neboť každý vektor $u \in \mathbb{R}^n$, $u = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ lze psát

$$u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

$\mathbb{R}^n$ je tedy prostor konečné dimenze.

Příklad $U = \mathbb{C}_n[X]$ je vekt. prostor nad $\mathbb{C}$.

Vektory = polynomy $1, x, x^2, \ldots, x^n$ generují $\mathbb{C}_n[X]$.
neboť každý polynom je tvaru

$$p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

$a_i \in \mathbb{C}$. je to prostor konečné dimenze nad $\mathbb{C}$.

Příklad $U = \mathbb{C}[x]$ … všechny polynomy v proměnné x s kompl. koeficienty – není prostor konečné dimenze.

Příklad: $U = C[0,1]$ spojité funkce na intervalu $[0,1]$ – jde o vekt. prostor nad $\mathbb{R}$. Není konečné dimenze.

⑥

Báze vektorového prostoru

Vektory $u_1, u_2, \dots, u_n$ tvoří bázi vekt. prostoru U nad $\mathbb{K}$, jestliže

1) jsou lin. nezávislé

$$\forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \quad \left(a_1 u_1 + \dots + a_n u_n = \vec{0} \implies a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0 \right)$$

2) generují vekt. prostor U

$$(\forall u \in U)\ \exists (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \quad u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n .$$

Příklad $\mathbb{R}^3$, (e_1, e_2, e_3) je báze $\mathbb{R}^3$, neboť

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

generují $\mathbb{R}^3$

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 = 0 \implies \begin{matrix} a_1 & & = 0 \\ & a_2 & = 0 \\ & & a_3 = 0 \end{matrix}$$

$(a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0)$

jsou lin. nezávislé.

Jiná báze $\mathbb{R}^3$ je např. $u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Generují $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = a_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & x_1\\ 0 & 1 & 0 & x_2\\ 1 & 1 & 1 & x_3\end{array}\right) \qquad \begin{aligned}a_1 &= x_1\\ a_2 &= x_2\\ a_3 &= x_3 - x_1 - x_2\end{aligned}$$

Lin. nezávislost

$$a_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

Příklad $\mathbb{R}_3[x]$ vekt. prostor nad $\mathbb{R}$

má bázi $1, x, x^2, x^3$.

Lin. nezávislost $a_0 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = 0 = 0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3$

$$\Rightarrow a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

Naším cílem bude ukázat, že

(1) Každý vekt. prostor konečné dimenze má bázi.

(2) Každé dvě báze daného prostoru mají stejný počet prvků.

Věta o výběru lin. nezávislých vektorů

Nechť $v_1, v_2, \dots, v_k \in U$ jsou lineárně nezávislé a nechť $u_1, u_2, \dots, u_\ell \in U$ jsou libovolné. Potom lze z vektorů $u_1, u_2, \dots, u_\ell$ vybrat některé $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}$ tak, že

(1) $v_1, v_2, \dots, v_k, u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}$ jsou lineárně nezávislé,

(2) $[v_1, v_2, \dots, v_k, u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}] = [v_1, v_2, \dots, v_k, u_1, u_2, \dots, u_\ell]$.

Poznámky: V (2) platí vždy inkluze $\subseteq$

Dosáhnout pouze podmínky (1) je triviální – nevybereme žádný vektor u_i.

Dosáhnout pouze podmínky (2) je rovněž triviální – vybereme všechny vektory u_i.

Důsledek 1: Každý vekt. prostor konečné dimenze má bázi.

Důkaz: Aplikujeme předchozí větu na prázdný seznam vektorů v a za vektory $u_1, \dots, u_\ell$ zvolíme vektory, které generují prostor U.

Podle věty lze vybrat vektory $u_{i_1}, \dots, u_{i_r}$ takové, že

(1) $u_{i_1}, \dots, u_{i_r}$ jsou LN

(2) $[u_{i_1}, \dots, u_{i_n}] = [u_1, u_2, \dots, u_\ell] = U$

Tedy $u_{i_1} \dots u_{i_r}$ jsou lin. nez. a generují U. Tvoří tedy bázi U.

Důsledek 2 Každý seznam lin. nezávislých vektorů $v_1, v_2, \dots, v_k$ lze doplnit na bázi prostoru U, má-li U konečnou dimenzi.

Důkaz: V předchozí větě bereme $v_1, v_2, \dots, v_k$ lin. nezávislé a $u_1, u_2, \dots u_\ell$ takové, že $[u_1, \dots, u_\ell] = U$. Pak lze vybrat vektory $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_k}$ tak, že

(1) $v_1, v_2, \dots v_k, u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_k}$ jsou lin. nezávislé,

(2) $[v_1, v_2, \dots v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_k}] = [v_1, v_2, \dots v_k, u_1, \dots u_l] \supseteq [u_1, u_2, \dots, u_l] = U$

Tedy vektory $v_1, \dots, v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_k}$ jsou lin. nezávislé a generují U, které tedy tvoří prostor U.

Důkaz věty o výběru lin. nezávislých vektorů

Důkaz se provádí indukcí podle počtu vektorů u_i, tj. podle čísla l.

Nechť $l = 1$.

$v_1, v_2, \dots v_k$ jsou lin. nezávislé a máme další vektor u_1

Nastane právě jedna z těchto dvou možností

I) u_1 leží v lin. obalu vektorů $v_1, v_2, \dots, v_k$.
V tomto případě vektor u_1 nevybereme.
Důkaz

(1) $v_1, v_2, \dots, v_k$ jsou lin. nezávislé ze zadání.

(2) Chceme dokázat, že

$$[v_1, \dots, v_k] = [v_1, v_2, \dots, v_k, u_1].$$

Vždy platí $\subseteq$. Nechť $w \in [v_1, v_2, \dots, v_k, u_1]$.

$$w = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + b_1 u_1$$

Víme, že $u_1 = c_1 v_1 + \dots + c_k v_k$. Toto dosadíme do předchozí rovnice:

$$w = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + b_1 (c_1 v_1 + \dots + c_k v_k) = (a_1 + b_1 c_1) v_1 + (a_2 + b_1 c_2) v_2 + \dots + (a_k + b_1 c_k) v_k \in [v_1, \dots, v_k]$$

Dokázali jsme $\supseteq$.

II u_1 neleží v lin. obalu vektorů $v_1, \dots, v_k$.

V tomto případě vektor u_1 vybereme. Podmínka (2)

(2) $[v_1, v_2, \dots v_k, u_1] = [v_1 \dots v_k, u_1]$

je zřejmě splněna.

Zbývá dokázat (1), že $v_1, v_2, \dots v_k, u_1$ jsou lin. nezávislé.

Nechť $$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k + b u_1 = \vec{0}$$

Kdyby $b \neq 0$, pak by ale u_1 byl lin. kombinací $v_1, v_2, \dots v_k$, což není. Tedy $b = 0$. Když $b = 0$, je

$$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = \vec{0}$$

Z lin. nezávislosti $v_1, \dots, v_k$ plyne $a_1 = \dots = a_k = 0$

Nechť věta platí pro $l \geq 1$, dokážeme ji pro $l+1$.

Máme $v_1 \dots v_k$ lin. nezávislé

$u_1, \dots u_l, u_{l+1}$ libovolné

Podle ind. předpokladu umíme vybrat $u_{i_1}, \dots u_{i_r}$ z $u_1, \dots u_l$ tak, že

(1) $v_1 \dots v_k, u_{i_1}, \dots u_{i_r}$ jsou LN

(2) $[v_1 \dots v_k, u_{i_1}, \dots u_{i_r}] = [v_1, \dots v_k, u_1, \dots u_l]$.

Zase mohou nastat 2 možnosti:

I u_{l+1} je lin. kombinací vektorů $v_1, \dots v_k, u_{i_1}, \dots u_{i_r}$.

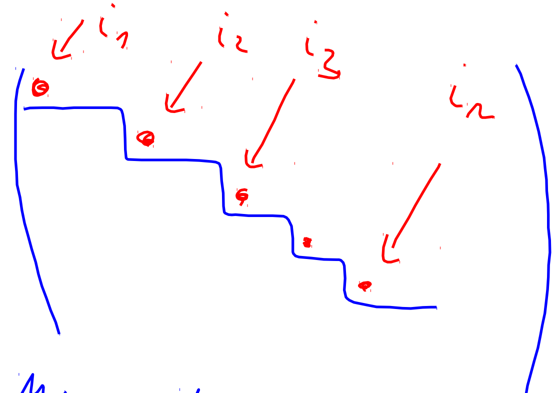
V tomto případě u_{l+1} nevybereme. Splnění podmínek 1) a 2) se dokáže podobně jako pro $l = 1$.

II $u_{\ell+1}$ není v lin. obalu $v_1,\dots,v_k, u_{i_1},\dots,u_{i_r}$. Pak $u_{\ell+1}$ vybereme a opět (1) a (2) se dokáže analogicky jako v kroku pro $\ell = 1$.

ALGORITMUS PRO VÝBĚR LIN. NEZ. VEKTORŮ SE STEJNÝM LIN. OBALEM.

Mějme vektory $u_1, u_2, \dots, u_\ell$ v $\mathbb{K}^n$. Zapíšeme si je jako sloupce do matice. Matici pomocí element. řádkových operací upravíme na schodovitý tvar:

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_\ell \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$



Ve schodovitém tvaru mějme čísla sloupců $i_1, i_2, \dots, i_r$, v nichž leží vedoucí koeficient nějakého řádku.

Potom jsou vektory $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}$ lin. nezávislé a

$$[u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}] = [u_1, u_2, \dots, u_\ell].$$

15

Odůvodnění

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{operace}]{\text{el. řádk.}} \begin{array}{c} \qquad\quad i_2 = 2 \qquad\qquad\qquad \\ \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 2 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ i_1 = 1 \qquad\qquad i_3 = 4 \end{array}$$

Ukážeme, že u_1, u_2, u_4 jsou lin. nezávislé: Rovnice

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_4 u_4 = \vec{0}$$

vede na soustavu s maticí (je stejná jako původní pouze bez 3. sloupce)

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{ERO}]{\text{stejné}} \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ 0 & 2 & \cdot \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies a_1 = a_2 = a_3 = 0.$$

Tedy u_1, u_2, u_3 jsou LN

Ukážeme si, že u_3 je lin. kombinací předchozích, tj. u_1 a u_2.

K tomu řešíme soustavu

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 = u_3$$

Ta má matici

$$\left(\begin{array}{cc|c} u_1 & u_2 & u_3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{ERO}]{\text{stejné}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \bullet & \bullet \\ 0 & 2 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Protože vedoucí koeficient není nikde na čáře, je soustava řešitelná. Tedy

$$u_3 = [u_1, u_2] \subseteq [u_1, u_2, u_4].$$

<u>Typická úloha</u>: Je dán vekt. podprostor jako lin. obal vektorů $[u_1, u_2, \dots u_k]$. Najděte jeho bázi. To znamená, že musíme z těchto vektorů vybrat lin. nezávislé se stejným lin. obalem.

Souřadnice vektoru $u \in U$ v bázi $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$ prostoru U je n-tice čísel $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$

taková, že $u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$

Sloupec $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ jako souřadnice vektoru u v bázi α zapisujeme

$$(u)_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Důležité na této definici je, že každý vektor u lze tímto způsobem zapsat jednoznačně.

Důkaz: Nechť

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$$

$$u = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_n u_n$$

Ukážeme, že $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$.

Rovnice od sebe odečteme:

$$\vec{o} = (a_1 - b_1) u_1 + (a_2 - b_2) u_2 + \dots + (a_n - b_n) u_n$$

Vektory $u_1, u_2, \dots u_n$ jsou lin. nezávislé, proto

$$a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = \dots = a_n - b_n = 0$$

Tedy $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$.