Lineární zobrazení

U, V vekt. prostory $\varphi: U \to V$ se nazývá LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

$$\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) \quad \text{pro } \forall u_1, u_2 \in U$$
$$\varphi(au) = a\varphi(u) \quad \text{pro } \forall u \in U,\ a \in \mathbb{K}$$

Pro nás nejdůležitější příklad lin. zobrazení je tento. A je matice $k \times n$ s prvky v $\mathbb{K}$

$\varphi: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^k$: $\varphi(x) = Ax$

je lineární zobrazení

Vzor a obraz podprostoru při lin. zobrazení

$U_1 \subseteq U$ je vekt. podprostor v U

$V_1 \subseteq V$ je vekt. podprostor ve V

Definuji obraz U_1 jako

$$\varphi(U_1) = \{v \in V,\ \exists u \in U_1,\ v = \varphi(u)\} = \{\varphi(u) \in V,\ u \in U_1\}$$

vzor V_1 jako

$$\varphi^{-1}(V_1) = \{u \in U,\ \varphi(u) \in V_1\}$$

Lemma: Obraz $\varphi(U_1)$ podprostoru U_1 je podprostor ve V. Vzor $\varphi^{-1}(V_1)$ podprostoru V_1 je podprostor v U.

Důkaz: Tvrzení dokážeme pro vzor $\varphi^{-1}(V_1)$.

Protože $\varphi(\vec{o}) = \vec{o} \in V_1$, je $\vec{o} \in \varphi^{-1}(V_1)$.

Nechť $u_1, u_2 \in \varphi^{-1}(V_1)$, pak $\varphi(u_1), \varphi(u_2) \in V$. Také

$$\varphi(u_1+u_2) = \varphi(u_1)+\varphi(u_2) \in V_1 \qquad \varphi(a u_1) = a\varphi(u_1) \in V_1$$

protože V_1 je podprostor a φ je lineární.

Tedy $u_1+u_2 \in \varphi^{-1}(V_1)$, $a u_1 \in \varphi^{-1}(V_1)$.

$\varphi : U \to V$. Vezmeme v U podprostor U a jeho obraz ve V nazýváme obrazem zobrazení φ

$$\mathrm{Im}\,\varphi = \varphi(U) = \{\varphi(u) \in V,\ u \in U\}$$

Vezme-li ve V podmnožinu $\{\vec{o}\} \subseteq V$, pak jeho vzor nazýváme jádro zobrazení φ

$$\mathrm{Ker}\,\varphi = \varphi^{-1}(\vec{o}) = \{u \in U,\ \varphi(u) = \vec{o}\}$$

Lemma: Lineární zobrazení $\varphi : U \to V$ je na (surjektivní), právě když $\mathrm{Im}\,\varphi = V$.

Lineární zobrazení $\varphi : U \to V$ je prosté (injektivní), právě když

$$\mathrm{Ker}\,\varphi = \{\vec{o}\}$$

Důkaz: První tvrzení je definice surjektivního zobrazení.

Druhé tvrzení: Je-li $\varphi : U \to V$ prosté, pak pro $u \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ platí

$$\varphi(u) = \vec{o} = \varphi(\vec{o})$$

④

Protože je φ prosté, tak z $\varphi(u) = \varphi(\vec{o})$ plyne $u = \vec{o}$.
Tedy každé $u \in \operatorname{Ker}\varphi$ je nulový vektor, $\operatorname{Ker}\varphi = \{\vec{o}\}$.

$\Leftarrow$ Nechť $\operatorname{Ker}\varphi = \{\vec{o}\}$. Nechť

$$\varphi(u_1) = \varphi(u_2).$$

Potom

$$\varphi(u_1) - \varphi(u_2) = \vec{o}$$

$$\varphi(u_1 - u_2) \quad = \vec{o}$$

Tedy $u_1 - u_2 \in \operatorname{Ker}\varphi = \{\vec{o}\}$. Proto

$$u_1 - u_2 = \vec{o}$$

$$u_1 = u_2.$$

φ je tedy prosté.

⑥

Věta o dimenzi jádra a obrazu Nechť U je vekt. prostor konečné dimenze a $\varphi : U \to V$ lineární. Pak platí

$$\dim U = \dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi .$$

Důkaz: Máme zde podprostory $\operatorname{Ker} \varphi \leq U$ a $\operatorname{Im} \varphi \leq V$. Zvolme bázi $u_1, u_2, \dots u_k$ podprostoru $\operatorname{Ker} \varphi$. Tuto bázi doplníme na bázi prostoru U

$$u_1, u_2, \dots u_k, u_{k+1}, \dots, u_n .$$

Také $\dim U = n$, $\dim \operatorname{Ker} \varphi = k$ a my chceme dokázat, že $\dim \operatorname{Im} \varphi = n-k$. K tomu potřebujeme najít nějakou bázi podprostoru $\operatorname{Im} \varphi$ o $n-k$ prvcích.
Ukážeme, že vektory

$$\varphi(u_{k+1}), \varphi(u_{k+2}), \dots, \varphi(u_n) \in \operatorname{Im} \varphi$$

tvoří bázi $\operatorname{Im} \varphi$. Pak je důkaz hotov.

(6)

Zbytek důkazu spočívá v tom dokázat, že vektory $\varphi(u_{k+1}), \dots, \varphi(u_n)$ jsou generátory pro $\operatorname{Im}\varphi$ a jsou LN.

(1) $\varphi(u_{k+1}), \dots, \varphi(u_n)$ generují $\operatorname{Im}\varphi$.

Typický prvek v $\operatorname{Im}\varphi$ je $\varphi(u)$, kde $u \in U$.

Vektor u můžeme psát jako lin. kombinaci prvků báze:

$$u = a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + a_{k+1} u_{k+1} + \dots + a_n u_n$$

Aplikuje φ:

$$\varphi(u) = a_1 \underbrace{\varphi(u_1)}_{=0} + \dots + a_k \underbrace{\varphi(u_k)}_{=0} + a_{k+1}\varphi(u_{k+1}) + \dots + a_n \varphi(u_n)$$

$u_1, u_2, \dots u_k \in \operatorname{Ker}\varphi$

$$\varphi(u) = a_{k+1}\,\varphi(u_{k+1}) + \dots + a_n\,\varphi(u_n)$$

Tedy $\varphi(u_{k+1}), \dots, \varphi(u_n)$ generují $\operatorname{Im}\varphi$.

(2) $\varphi(u_{k+1}), \dots, \varphi(u_n)$ jsou lin. nezávislé.

(7)

Nechť (*) $a_{k+1}\varphi(u_{k+1}) + \dots + a_n\varphi(u_n) = \vec{o}$

Chceme ukázat, že $a_{k+1} = \dots = a_n = 0$.

Pomocí (*) upravíme

$$\varphi(a_{k+1}u_{k+1} + \dots + a_n u_n) = \vec{o}$$

To znamená, že $a_{k+1}u_{k+1} + \dots + a_n u_n \in \operatorname{Ker}\varphi$

Tedy tento vektor lze psát jako lin. kombinaci vektorů báze jádra:

$$a_{k+1}u_{k+1} + \dots + a_n u_n = b_1u_1 + b_2u_2 + \dots + b_k u_k$$

Upravou

$$-b_1u_1 - b_2u_2 - \dots - b_k u_k + a_{k+1}u_{k+1} + \dots + a_n u_n = \vec{o}$$

Protože $u_1, u_2, \dots u_n$ tvoří bázi U, jsou LN, a proto

$$b_1 = b_2 = \dots = b_k = a_{k+1} = \dots = a_n = 0,$$ což jsme chtěli dokázat.

8

Lemma: Složení dvou lineárních zobrazení $\varphi : U \to V$ a $\psi : V \to W$ je opět lineární zobrazení

$$\psi \circ \varphi : U \to W.$$

Dk: $\psi \circ \varphi\,(a u_1 + b u_2) = \psi(\varphi(a u_1 + b u_2)) = \psi(a\varphi(u_1) + b\varphi(u_2))$

$$= a\psi(\varphi(u_1)) + b\psi(\varphi(u_2)) = a(\psi\circ\varphi)(u_1) + b(\psi\circ\varphi)(u_2).$$

Příklad složení lin. zobrazení

$\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$ $\varphi(x) = Ax$, kde A je matice $k \times n$

$\psi : \mathbb{K}^k \to \mathbb{K}^l$ $\psi(y) = By$, kde B je matice $l \times k$

$\psi\circ\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^l$

$$(\psi\circ\varphi)(x) = \psi(\varphi(x)) = \psi(Ax) = B(Ax) = (BA)(x)$$

Složenému zobrazení odpovídá násobení součinem matic $B \cdot A$.

⑨

Identické zobrazení $\quad id: U \to U \quad id(u) = u$

je evidentně lineární zobrazení.

Lineární izomorfismus $\varphi: U \to V$ je lineární zobrazení, které je bijekce (je na i prosté, surjektivní i injektivní).

Lemma Je-li $\varphi: U \to V$ lineární izomorfismus, je inverzní zobrazení $\varphi^{-1}: V \to U$ lineární.

Důkaz: $v_1, v_2 \in V$ a nechť $\varphi^{-1}(v_1) = u_1$, $\varphi^{-1}(v_2) = u_2$

To znamená $\varphi(u_1) = v_1$ a $\varphi(u_2) = v_2$.

Potom

$$a v_1 + b v_2 = a\varphi(u_1) + b\varphi(u_2) = \varphi(a u_1 + b u_2)$$

To ale znamená, že

$$\underline{\varphi^{-1}(a v_1 + b v_2)} = a u_1 + b u_2 = \underline{a\varphi^{-1}(v_1) + b\varphi^{-1}(v_2)}$$

Tj. je lineární zobrazení φ^{-1}.

Jak zjistíme, že je nějaké lin. zobrazení lin. izomorfismus?

Je-li $\varphi : U \to V$ lin. izomorfismus, pak musí být

$$\dim V = \dim \underbrace{\operatorname{Im}\varphi}_{=V} = \dim U - \dim \underbrace{\operatorname{Ker}\varphi}_{=\{\vec{o}\}} = \dim U .$$

Prostory U a V musejí mít stejnou dimenzi.

Jestliže máme $\varphi : U \to V$ a $\dim U = \dim V$, pak podmínka, že φ je na, stačí k tomu, aby φ byl izomorfismus.

Chceme ukázat, že φ je prosté. To je ekvivalentní s tím, že

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{\vec{o}\}$$

a to je ekvivalentní s tím, že $\dim \operatorname{Ker}\varphi = 0$.

$$\dim \operatorname{Ker}\varphi = \dim U - \dim \operatorname{Im}\varphi = \dim U - \dim V = 0 .$$

2. poznámka: Jestliže $\varphi : U \to V$ a $\dim U = \dim V$, pak k tomu, aby φ byl lin. izomorfismus, stačí ukázat, že

$$\operatorname{Ker} \varphi = \{\vec{o}\}.$$

Platí: při této podmínce, je φ prosté. K tomu, aby bylo na, je potřeba ukázat $\operatorname{Im} \varphi = V$, což je ekvivalentní s tím, že

$$\dim \operatorname{Im} \varphi = \dim V = \dim U.$$

Platí

$$\dim \operatorname{Im} \varphi = \dim U - \dim \underbrace{\operatorname{Ker} \varphi}_{=\{\vec{o}\}} = \dim U - 0 = \dim U.$$

Lemma: Nechť $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ je dáno předpisem $\varphi(x) = Ax$, kde matice A je typu $n \times n$. Jestliže je φ lin. izomorfismus, je A invertibilní matice a $\varphi^{-1}(y) = A^{-1} y$.

Důkaz: Nechť $\varphi^{-1} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ je dáno násobením maticí B.

$$\varphi^{-1}(y) = By.$$

12

Platí $\varphi^{-1} \circ \varphi(x) = x$

$$B(Ax) = x$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad (BA)x = Ex \implies BA = E$

Dále $\varphi \circ \varphi^{-1}(y) = y$

$$A(By) = y$$

$\forall y \in \mathbb{R}^n \quad (AB)y = Ey \implies A \cdot B = E$

Tedy $B = A^{-1}$

<u>Příklad</u> Najděte bázi jádra lin. zobrazení $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^2$

kde $\varphi(x) = Ax$.

$\operatorname{Ker} \varphi = \{ x \in \mathbb{K}^n ,\ \varphi(x) = Ax = 0 \}$

Řešíme homogenní soustavu

$$Ax = 0$$

a musíme najít její bázi.

Na příkladu ukážu, jak se to dělá:

Nechť $n = 5$ a řešení je

$$\{ (2a+b+c,\ a-b-3c,\ c,\ b,\ a) \in \mathbb{K}^5 \}$$

$$= \{ a(2,1,0,0,1) + b(1,-1,0,1,0) + c(1,-3,1,0,0) \}$$

$$= [(2,1,0,0,1), (1,-1,0,1,0), (1,-3,1,0,0)]$$

Tyto 3 vektory jsou LN a tvoří tedy bázi lin. obalu, neboli $\operatorname{Ker} \varphi$.

(14)

Výpočet báze Im φ

$\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^r, \ \varphi(x) = Ax.$

$$\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(x) = Ax \in \mathbb{K}^r, \ x \in \mathbb{K}^n\}$$

$$= [Ae_1, Ae_2, \ldots Ae_n]$$ kde $e_1, e_2, \ldots e_n$ je stand. báze $\mathbb{K}^n$

$$= [s_1A, s_2A, \ldots, s_nA]$$ kde s_iA je i-tý sloupec matice A.

K nalezení báze musíme stačí z těchto vektorů vybrat lin. nezávislé se stejným lin. obalem.

MATICE LIN. ZOBRAZENÍ V DANÝCH BÁZÍCH

Každá matice A typu $k \times n$ s prvky v $\mathbb{K}$ zadává lin. zobrazení $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$ předpisem $\varphi(x) = Ax$.

To, co budeme teď provádět, je obrácený postup. Ukážeme, že každé lin. zobrazení mezi prostory konečné dimenze lze při volbách bází v obou prostorech reprezentovat maticí.

K tomu budeme používat souřadnice vektorů v dané bázi:

Opakování: Mějme ve vekt. prostoru U bázi $\alpha = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

Souřadnice vektoru $u \in U$ v bázi α je n-tice čísel z $\mathbb{K}$, kterou píšeme do sloupce

$$(u)_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

takovou, že $u = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n$

Mějme $\varphi : U \to V$ lineární, mějme bázi prostoru $U \ldots \alpha = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ a bázi prostoru $V \ldots B = (v_1, v_2, \ldots v_k)$. Pak každý z vektorů $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n) \in V$ lze psát jako lin. kombinaci vektorů $v_1, v_2, \ldots v_k$.

$$\varphi(u_1) = a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \ldots + a_{k1} v_k = (v_1, v_2, \ldots v_k) \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\varphi(u_j) = a_{1j} v_1 + a_{2j} v_2 + \ldots + a_{kj} v_k = (v_1, v_2, \ldots v_k) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{kj} \end{pmatrix}$$

Jinak

$$\varphi(u_j) = (v_1, v_2, \ldots v_k) \left(\varphi(u_j)\right)_B$$

Dohromady to můžeme psát

$$\left(\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots \varphi(u_n)\right) = (v_1, v_2, \ldots v_k) \underbrace{\left((\varphi(u_1))_B \; (\varphi(u_2))_B \ldots (\varphi(u_n))_B \right)}_{\text{matice } A \text{ typu } k \times n}$$

Matici A nazýváme maticí lin. zobrazení φ v bázích α a β.

<u>Definice</u> Nechť $\varphi : U \to V$, nechť $\alpha = (u_1, \dots, u_n)$ je báze U a nechť β je báze V. Pak matice zobrazení φ v bázích α a β je matice

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} = \left((\varphi(u_1))_\beta, (\varphi(u_2))_\beta, \dots, (\varphi(u_n))_\beta \right)$$

<u>Příklad</u> $U = \mathbb{R}_3[x]$, $V = \mathbb{R}_2[x]$

$\alpha = (1, x, x^2, x^3)$ je báze U, $\beta = (1, x, x^2)$ je báze V

$\varphi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ $\quad \varphi(p) = p' + 2p''$

kde p' je 1. derivace a p'' je 2. derivace

Spočítáme $(\varphi)_{\beta,\alpha} = \left((\varphi(1))_\beta \; (\varphi(x))_\beta \; (\varphi(x^2))_\beta \; (\varphi(x^3))_\beta \right)$

$$= \left((0)_\beta, (1)_\beta, (2x+4)_\beta, (3x^2+12x)_\beta \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Věta Pro matici lin. zobrazení $\varphi: U \to V$ v bazích α a β platí pro každé $u \in U$

$$(\varphi(u))_\beta = (\varphi)_{\beta,\alpha} (u)_\alpha$$

(Lineární zobrazení v souřadnicích je násobení maticí)

Důkaz: Zobrazení $U \longrightarrow \mathbb{K}^k : u \longmapsto (\varphi(u))_\beta$ a zobrazení $U \longrightarrow \mathbb{K}^k : u \longmapsto (\varphi)_{\beta\alpha}(u)_\alpha$ jsou lineární. Podle minulé přednášky (v ISu přednáška 7 z 2016) jsou stejná, právě když jsou stejná na prvcích báze α

$$(\varphi(u_i))_\beta \quad , \quad (\varphi)_{\beta,\alpha}(u_i)_\alpha = (\varphi)_{\beta,\alpha} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = s_i\left((\varphi)_{\beta\alpha}\right) = (\varphi(u_i))_\beta .$$