Lineární zobrazení - pokračování

<u>Opakování:</u> U, V vekt. prostory nad $\mathbb{K}$, $\varphi: U \to V$ je lin. zobrazení, jestliže

$$\forall u_1, u_2, \forall a, b \in \mathbb{K} \qquad \varphi(a u_1 + b u_2) = a\varphi(u_1) + b\varphi(u_2)$$

Hlavní příklad lin. zobrazení

je $\qquad \varphi: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^k$

$$\varphi(x) = \varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad A \text{ je matice } k \times n.$$

Matice lin. zobrazení $\varphi: U \to V$ v bázích $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$ prostoru U a $\beta = (v_1, v_2, \dots v_k)$ prostoru V

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} = \Big(\underbrace{(\varphi(u_1))_\beta}_{1.\text{ sloupec}} \quad \underbrace{(\varphi(u_2))_\beta}_{2.\text{ sloupec}} \quad \dots\dots \quad \underbrace{(\varphi(u_n))_\beta}_{n\text{-tý sloupec}} \Big)$$

Pro matici lin. zobrazení platí

$\forall u \in U$
$$(\varphi(u))_\beta = (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot (u)_\alpha \qquad (*)$$

Tento vztah lze demonstrovat graficky pomocí tzv. komutativního diagramu

$$\begin{tikzcd}
u \in U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "(\ )_\alpha"'] & V \arrow[d, "(\ )_\beta"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r] & \mathbb{K}^k
\end{tikzcd}$$

$x \longmapsto (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot x$

Máme 2 cesty z U do $\mathbb{K}^k$

$\rightarrow\downarrow$ $\quad u \longmapsto (\varphi(u))_\beta$

$\downarrow\rightarrow$ $\quad u \longmapsto (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot (u)_\alpha$

Formule $(*)$ říká, že oběma cestami dostaneme stejný výsledek.
To je právě důvod proč se diagramu nazývá komutativní.

$\downarrow\rightarrow$ dolů a pak vpravo $=$ $\rightarrow\downarrow$ vpravo a pak dolů

(3)

Příklad $U = \mathbb{R}_3[x]$, $V = \mathbb{R}_2[x]$

$\alpha = (1, x, x^2, x^3)$ $\beta = (1, x, x^2)$

$\varphi(p) = p' + 2p''$

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$p(x) = 4x^3 - 8x^2 + 2x - 11$

$$(\varphi(p))_\beta = (12x^2 - 16x + 2 + 48x - 32)_\beta = \begin{pmatrix} -30 \\ 32 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Ověřili jsme na příkladu vztah (*).

$$(\varphi)_{\beta,\alpha}(p)_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 \\ 2 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ 32 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Matice přechodu od jedné báze k druhé bázi

V prostoru U máme dvě báze $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$, $\beta = (v_1, \dots v_m)$

$$u_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} v_j = (v_1, v_2, \dots v_m) \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

$$= (v_1 \dots v_m) \cdot (u_i)_\beta$$

Matice přechodu mezi bázemi α a β je definovaná takto

$$(id)_{\beta,\alpha} = \left((u_1)_\beta \ (u_2)_\beta \dots (u_n)_\beta \right)$$

Srovnání

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} = \left((\varphi(u_1))_\beta \ (\varphi(u_2))_\beta \dots (\varphi(u_n))_\beta \right)$$

$\varphi : U \to V$ Když za φ vezmeme zobrazení $id : U \to U$, $id(u) = u$, pak je definice matice přechodu stejná jako definice matice identického zobrazení – to je také důvod pro označení $(id)_{\beta,\alpha}$

Opäť platí: Pre $u \in U$ je

$$(u)_\beta = (id)_{\beta,\alpha} \cdot (u)_\alpha$$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "id"] \arrow[d, "(\ )_\alpha"'] & U \arrow[d, "(\ )_\beta"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r] & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

$$x \longmapsto (id)_{\beta,\alpha} \cdot x$$

Príklad $U = \mathbb{R}^3$, $\varepsilon = (e_1, e_2, e_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$$\alpha = \left(\underset{u_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}} \underset{u_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}} \underset{u_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}} \right)$$

$$(id)_{\varepsilon,\alpha} = \left((u_1)_\varepsilon \ (u_2)_\varepsilon \ (u_3)_\varepsilon \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(id)_{\alpha,\varepsilon} = \left((e_1)_\alpha \ (e_2)_\alpha \ (e_3)_\alpha \right)$$

Dokážeme rovnice

$$\underline{a_{11}} u_1 + \underline{a_{21}} u_2 + \underline{a_{31}} u_3 = e_1$$ súradnice e_1 v bázi α, riešení je $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$a_{12} u_1 + a_{22} u_2 + a_{32} u_3 = e_2$$ riešení $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

⑥

$a_{13} u_1 + a_{23} u_2 + a_{33} u_3 = e_3$ řešení $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(id)_{\alpha,\varepsilon} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Počítání s maticemi zobrazení a přechodu

Věta Nechť $\varphi : U \to V$ a $\psi : V \to W$ jsou lineární, α, β, γ je postupně báze prostorů U, V a W. Potom platí

$$(\psi \circ \varphi)_{\gamma,\alpha} = (\psi)_{\gamma,\beta} \cdot (\varphi)_{\beta,\alpha}$$

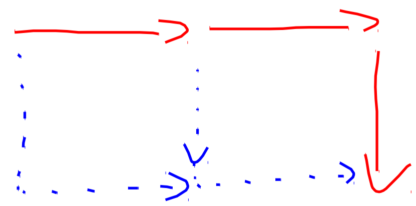
$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "(\ )_\alpha"'] \arrow[rr, bend left, "\psi \circ \varphi"] & V \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "(\ )_\beta"] & W \arrow[d, "(\ )_\gamma"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r] & \mathbb{K}^k \arrow[r] & \mathbb{K}^l
\end{tikzcd}
$$

$x \longmapsto (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot x$

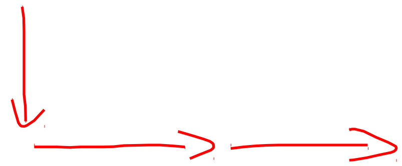
$y \longmapsto (\psi)_{\gamma,\beta}\, y$

$x \longmapsto (\psi \circ \varphi)_{\gamma,\alpha} \cdot x$

Cesta



je stejná jako cesta



Cesta $\to\to\downarrow$ dává $\big((\psi \circ \varphi)(u)\big)_\gamma = \underline{(\psi \circ \varphi)_{\gamma,\alpha}\,(u)_\alpha}$

Cesta $\downarrow\to\to$ dává $\underline{(\psi)_{\gamma,\beta} \cdot (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot (u)_\alpha}$

$\parallel \implies (\psi \circ \varphi)_{\gamma,\alpha} = (\psi)_{\gamma,\beta}\,(\varphi)_{\beta,\alpha}$

Věta: 1 Nechť U je vekt. prostor s bází α, pak

$$(id)_{\alpha,\alpha} = E \quad (\text{jednotková matice})$$

2 Je-li $\varphi : U \to V$ lin. izomorfismus a $\varphi^{-1} : V \to U$ jeho inverze, α, β postupné báze U a V, platí

$$\left(\varphi^{-1}\right)_{\alpha,\beta} = \left((\varphi)_{\beta,\alpha}\right)^{-1}$$

Dk 1 je zřejmé: $\alpha = (u_1, \dots, u_n)$

$$(id)_{\alpha,\alpha} = \left((u_1)_\alpha \ (u_2)_\alpha \dots (u_n)_\alpha \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix} = E$$

2 je důsledkem 1 a předchozí věty:

$$\varphi^{-1} \circ \varphi = id_U$$

$$E = (id)_{\alpha,\alpha} = \left(\varphi^{-1} \circ \varphi\right)_{\alpha,\alpha} = \left(\varphi^{-1}\right)_{\alpha,\beta} (\varphi)_{\beta,\alpha} \Rightarrow \left(\varphi^{-1}\right)_{\alpha,\beta} = \left((\varphi)_{\beta,\alpha}\right)^{-1}.$$

Zpět k předchozímu příkladu

$U = \mathbb{R}^3 \qquad \varepsilon = (e_1, e_2, e_3), \quad \alpha = (u_1, u_2, u_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

Jednoduše spočítáme matici přechodu

$$(id)_{\varepsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad id^{-1} = id$$

Použijeme (2) z předchozí věty:

$$(id)_{\alpha,\varepsilon} = (id^{-1})_{\alpha,\varepsilon} \overset{(2)}{=} \left((id)_{\varepsilon,\alpha}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Chceme-li spočítat souřadnice vektoru $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ v bázi α, uděláme to tak, že

$$(u)_\alpha = (id)_{\alpha,\varepsilon} (u)_\varepsilon = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Věta: Matice zobrazení v různých bazích

Nechť U je prostor s bázemi α a $\bar\alpha$, V prostor s bázemi β a $\bar\beta$ a $\varphi : U \to V$ lineární zobrazení. Potom

$$(\varphi)_{\bar\beta,\bar\alpha} = (id)_{\bar\beta,\beta}\,(\varphi)_{\beta,\alpha}\,(id)_{\alpha,\bar\alpha}$$

Důkaz plyne z věty o matici složeného zobrazení, neboť platí, že

$$\varphi = id_V \circ \varphi \circ id_U .$$

Dodatek k počítání:

Úloha: doplnit seznam lin. nezávislých vektorů v nějakém prostoru na bázi celého prostoru.

Dělá se takto: Příklad $U = \mathbb{R}^5$, $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

doplňte na bázi celého $\mathbb{R}^5$.

Vezmeme nějakou bázi $\mathbb{R}^5$, např. e_1, e_2, e_3, e_4, e_5.

Pak $[u_1, u_2, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5] \supseteq [e_1, e_2, \dots e_5] = \mathbb{R}^5$

$\Rightarrow [u_1, u_2, e_1, \dots, e_5] = \mathbb{R}^5$. Nyní stačí z těchto vektorů vybrat lin. nezávislé se stejným lin. obalem.

12

GRUPY, PERMUTACE, DETERMINANTY

Grupa je neprázdná množina s operací

$$\bullet : G \times G \longrightarrow G : (g_1, g_2) \longmapsto g_1 \bullet g_2$$

která má následující vlastnosti:

(1) $\forall g_1, g_2, g_3 \in G : \quad (g_1 \bullet g_2) \bullet g_3 = g_1 \bullet (g_2 \bullet g_3)$

(2) existence neutrálního prvku $e \in G$

$\exists e \in G \ \forall g \in G \quad e \bullet g = g \bullet e = g$

(3) existence inverzního prvku

$\forall g \in G \ \exists g^{-1} \in G \quad g \bullet g^{-1} = g^{-1} \bullet g = e.$

Je-li operace $\bullet$ navíc komutativní, mluvíme o abelovské (neboli také komutativní) grupě.

Příklady $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ s operací násobení je grupa s neutrálním prvkem 1 a inverzním prvkem a^{-1} k a. Navíc $a \cdot b = b \cdot a$, je to komutativní grupa.

Příklad U je vekt. prostor nad $\mathbb{K}$ a budeme uvažovat pouze operaci sčítání. Pak $(U, +)$ je komutativní grupa s neutrálním prvkem $\vec{o}$ a inverzním prvkem k u je $(-u)$.

Příklad Matice $n \times n$ nad tělesem $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ $Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$. Uvažujme podmnožinu

$$GL(n, \mathbb{K}) = \{A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K}),\ \text{existuje } A^{-1}\}$$

Tato množina s operací násobení matic je grupa s neutrálním prvkem jednotkovou maticí. Tato grupa je pro $n > 1$ nekomutativní.

Grupa permutací množiny $\{1,2,3,\dots n\}$ – značení S_n

Pro nás permutace bude bijekce – prosté zobrazení

$$\tau : \{1,2,\dots n\} \longrightarrow \{1,2,\dots n\}$$

τ lze definovat tabulkou

1	2	3	…	n
$\tau(1)$	$\tau(2)$	$\tau(3)$		$\tau(n)$

Zapomeneme-li na 1. řádek, dostaneme permutaci tak, jak se používá v kombinatorice.

Operace na S_n je skládání permutací jako zobrazení.

τ, σ dvě permutace, jejich složení je $\sigma \circ \tau$.

$$\tau \; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \sigma \; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \sigma \circ \tau \; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Neutrální prvek je identická permutace

$$id \; \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Inverzní permutace k $\tau = \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{matrix}}$ je

$$\tau^{-1} = \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{matrix}}$$

Homomorfismus grup

Nechť G a H jsou dvě grupy. Zobrazení $f: G \to H$ se nazývá homomorfismus grup, jestliže platí:

$$\forall a,b \in G \quad f(a \circ_G b) = f(a) \circ_H f(b)$$

Příklad U, V vekt. prostory a $\varphi: U \to V$ je lin. zobrazení. Pak φ je homomorfismus grup $(U,+) \longrightarrow (V,+)$, neboť

$$\varphi(u_1 +_U u_2) = \varphi(u_1) +_V \varphi(u_2)$$

Příklad: $G = (\mathbb{R}, +)$ $\quad H = (\mathbb{R}^+ = (0,\infty), \cdot)$

$f(x) = e^x \qquad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ je homomorfismus

$$f(x+y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = f(x) \cdot f(y)$$

$\ln : H \longrightarrow G$ je opět homomorfismus

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

ZNAMÉNKO PERMUTACE

Každé permutaci $\sigma \in S_n$ přiřadíme čísla 1 nebo -1 tak, aby toto přiřazení bylo homomorfismem grup

$$(S_n, \circ) \longrightarrow (\{1,-1\}, \cdot)$$

Toto přiřazení budeme nazývat znaménko permutace a značit

$$\operatorname{sign}: (S_n, \circ) \longrightarrow (\{1,-1\}, \cdot\,)$$

<u>Definice</u>: Nechť $\sigma \in S_n$, tj. $\sigma: \{1,2,\dots,n\} \longrightarrow \{1,2,\dots,n\}$ je bijekce

$$\operatorname{sign}\sigma = \prod_{1 \le j < i \le n} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$$

Součin přes všechny dvojice i, j takové, že $1 \le j < i \le n$.

<u>Příklad</u> $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \operatorname{sign}\sigma = \dfrac{1-3}{2-1} \cdot \dfrac{2-3}{3-1} \cdot \dfrac{2-1}{3-2} = 1 \cdot (-1)(-1) = 1$

Odtud je vidět, že $\operatorname{sign}\sigma \in \{1,-1\}$

Věta Pro $\sigma, \pi \in S_n$ platí

$$\operatorname{sign}(\sigma \circ \pi) = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \operatorname{sign}(\pi)$$

Tedy $\operatorname{sign}: S_n \to \{1, -1\}$ je homomorfismus grup.

Dk: $\operatorname{sign}(\sigma \circ \pi) = \prod_{i>j} \frac{\sigma(\pi(i)) - \sigma(\pi(j))}{i-j} =$

$$= \prod_{i>j} \left(\frac{\sigma(\pi(i)) - \sigma(\pi(j))}{\pi(i) - \pi(j)} \cdot \frac{\pi(i) - \pi(j)}{i-j} \right)$$

$$= \left(\prod_{i>j} \frac{\sigma(\pi(i)) - \sigma(\pi(j))}{\pi(i) - \pi(j)} \right) \cdot \left(\prod_{i>j} \frac{\pi(i) - \pi(j)}{i-j} \right) =$$

$$= \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \operatorname{sign}(\pi)$$