Báze, dimenze, souřadnice

V je vekt. nad $\mathbb{K}$

$(u_1, u_2, \dots, u_n)$ tvoří bázi vekt. prostoru V, jestliže

(1) jsou lin. nezávislé

$$\forall (a_1, a_2, \dots a_n) \in \mathbb{K}^n \quad a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n = \vec{0} \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

(2) generují prostor V

$$(\forall u \in V)(\exists (a_1, \dots a_n) \in \mathbb{K}^n) \quad u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$$

Prostor konečné dimenze je vekt. prostor, který je generován konečnou množinou vektorů.

Minule: Každý vekt. prostor konečné dimenze má bázi.

Dnes: Každé dvě báze prostoru konečné dimenze mají stejný počet prvků.

Steinitzova věta Nechť $u_1, u_2, \dots, u_k$ jsou lin. nezávislé vektory v U, nechť $v_1, v_2, \dots, v_n$ jsou nějaké vektory a $[u_1, u_2, \dots, u_k] \subseteq [v_1, v_2, \dots, v_n]$.
Pak $n \geq k$.

Důsledek: Každé dvě báze v prostoru konečné dimenze mají stejný počet vektorů.

Důkaz důsledku Dvě báze nechť jsou tyto:

$u_1, u_2, \dots, u_k$

$v_1, v_2, \dots, v_n$

Platí $u_1, u_2, \dots, u_k$ jsou lin. nezávislé.

$$u_1, u_2, \dots, u_k \subset [v_1, v_2, \dots, v_n] = U$$

Podle Steinitzovy věty je $K \leq N$.

Analogicky dokážeme, že $m \le k$.

$v_1, v_2, \dots v_m$ jsou lin. nezávislé

$v_1, v_2, \dots v_m \in U = [u_1, u_2, \dots u_k]$ neboť $u_1 \dots u_k$ generují U.

Odtud podle Steinitzovy věty $m \le k$.

<u>Závěr</u> $m = k$, obě báze mají stejný počet prvků.

Nyní můžeme korektně definovat, co je dimenze.

<u>Definice</u>: Dimenze prostoru konečné dimenze je počet prvků nějaké báze tohoto prostoru. Označíme

$$\dim_{\mathbb{K}} U.$$

<u>Příklady</u> ① $U = \mathbb{R}^n$ vekt. prostor nad $\mathbb{R}$.

Standardní báze $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. $\quad \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$.

Příklad 2

Polynomy stupně nejvýše n s koeficienty v $\mathbb{C}$.

$U = \mathbb{C}_n[x]$. Báze $1, x, x^2, \dots, x^n$.

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_n[x] = n+1.$$

Příklad 3

$U = \mathbb{C}_2[x]$, vekt. prost. nad $\mathbb{R}$.

Báze U nad $\mathbb{C}$ je $1, x, x^2$. $\quad \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_2[x] = 3$

Báze U nad $\mathbb{R}$ je $1, i, x, ix, x^2, ix^2$ $\quad \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}_2[x] = 6$

$$p(x) = (a_2 + i b_2) x^2 + (a_1 + i b_1) x + (a_0 + i b_0)$$
$$= a_2 x^2 + b_2 i x^2 + a_1 x + b_1 i x + a_0 + b_0 i$$

Příklad 5

$V = \mathrm{Mat}_{k \times n}(\mathbb{R})$ je vekt. prostor nad $\mathbb{R}$

Báze je dána maticemi A^{ij}

$$\left(A^{ij}\right)_{ab} = \begin{cases} 0 & i \neq a \text{ nebo } j \neq b \\ 1 & i = 1 \text{ a } j = b \end{cases}$$

$$A^{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \\ \vdots & & & & & \end{pmatrix}$$

prvek matice A^{ij} v řádku $\underline{a}$ a ve sloupci $\underline{b}$

B je libovolná matice

$$B = \sum_{\substack{i \in \{1, \dots k\} \\ n \in \{1 \dots n\}}} B_{ij} A^{ij}$$

Počet prvků báze je $k \cdot n$, tedy

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Mat}_{k \times n}(\mathbb{R}) = k \cdot n$$

Důkaz Steinitzovy věty:

Předpokládejme $u_1, u_2, \dots, u_k \in [v_1, v_2, \dots, v_n]$.

Chceme dokázat implikaci

jsou-li $u_1, u_2, \dots, u_k$ lin. nezávislé $\Rightarrow k \le n$.

Provedeme nepřímý důkaz:

Nechť $k > n$. Protože $u_1, u_2, \dots, u_k \in [v_1, v_2, \dots, v_n]$, platí

$$
\begin{aligned}
u_1 &= a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \dots + a_{n1} v_n \\
u_2 &= a_{12} v_1 + a_{22} v_2 + \dots + a_{n2} v_n \\
&\dots \\
u_k &= a_{1k} v_1 + a_{2k} v_2 + \dots + a_{nk} v_n
\end{aligned}
$$

$$\vec{u}_1 = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_2 = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}$$

$$\dots\dots \qquad \vec{u}_k = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$$

$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k) = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)\, A \qquad A = (a_{ij})$$

n řádků a k sloupců.

Předp. že $k > n$. Tedy

$$A = {}_{n}\overset{k}{\boxed{\qquad\qquad\qquad}}$$

Uvažujme rovnici $Ax = 0$, kde $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$.

Při řešení soustavy $Ax=0$, převedeme A do schod. tvaru. Počet vedoucích koeficientů je maximálně m. Tedy aspoň $k-m$ (>0) neznámých si můžeme zvolit libovolně. Tedy soustava má nějaké řešení

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq (0, 0, \dots 0).$$

Ukážeme, že

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_k u_k = \vec{0}.$$

Což znamená, že $u_1, u_2, \dots, u_k$ jsou lin. závislé.

$$\sum_{i=1}^{k} x_i u_i = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \left((\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n) A\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} =$$

$$= (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n)\left(A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}\right) = (\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

4 užitečné věty o dimenzi

① Nechť $\dim_{\mathbb{K}} U = n$ a nechť $v_1, v_2, \ldots v_n$ jsou lineárně nezávislé vektory z U. Pak $v_1, v_2, \ldots v_n$ tvoří bázi.

Důkaz: Sporem. Předp. že $v_1, v_2, \ldots v_n$ není báze.
Pak lze bylo nějaký doplnit do báze celého prostoru.
$$(v_1, \ldots v_n, u_1, \ldots u_\ell) \text{ báze.}$$
Pak ale $\dim_{\mathbb{K}} U = n + \ell > n$, spor.

② Nechť $\dim_{\mathbb{K}} U = n$ a nechť vektory $u_1, u_2, \ldots u_n$ generují prostor U. Pak vektory $u_1, u_2, \ldots u_n$ tvoří bázi.

Kdyby $u_1, u_2, \ldots u_k$ nebyly lin. nezávislé, pak z nich vybereme některé se stejným lin. obalem, které jsou nezávislé. Pak by ale
$$\dim_{\mathbb{K}} U < n, \text{ spor.}$$

3 Nechť V je podprostor ve vekt. prostoru U. Je-li U konečné dimenze, pak
$$\dim_{\mathbb{K}} V \leq \dim_{\mathbb{K}} U.$$

Důkaz: Musíme ukázat, že V je malé konečné dimenze. Nechť $\dim_{\mathbb{K}} U = n$. Kdyby V nebyl prostor konečné dimenze, uvažovali by vektory
$$v_1, v_2, \dots, v_{n+1} \in V$$
takové, že $v_1 \in V \setminus \{\vec{o}\}$, $v_2 \in V - [v_1]$, …
$$v_{n+1} \in V \setminus [v_1, v_2, \dots v_n]$$
Tyto vektory jsou lin. nezávislé ve V a tedy v U. Protože U má dim n, má nejvýše bázi $u_1, u_2, \dots u_n$.
Pak $v_1, v_2, \dots v_{n+1} \in U = [u_1, u_2, \dots u_n]$. Podle Steinitzovy věty $n+1 \leq n$, spor.

Dokázali jsme, že V má konečnou dimenzi. Má tedy konečnou bázi a tu lze doplnit do báze celého U. Proto

počet vektorů báze V $= \dim_{\mathbb{K}} V \leq \dim_{\mathbb{K}} U =$ počet vektorů báze U

4 Je-li $V \subseteq U$ podprostor a $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} U$, pak $V = U$.

Vezmeme bázi $v_1, \dots, v_n$ prostoru V, tu lze doplnit na bázi prostoru U. Protože však $\dim V = \dim U$, musí být „doplněná báze" stejná jako původní. Proto

$$[v_1, \dots, v_n] = V = U = [v_1, \dots, v_n]$$

Souřadnice vektoru v dané bázi

Lemma Je-li $u_1, \dots, u_n$ báze prostoru U, pak existuje právě jedna n-tice čísel takových, že daný vektor $u \in U$

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n .$$

Výrok v kvantifikátorech

Je-li $u_1, u_2, \dots, u_n$ báze prostoru U

$$(\forall u \in U)\,\Big(\underbrace{\exists!}_{\text{existuje právě jedna}}\ (a_1, a_2 \dots a_n) \in \mathbb{K}^n\Big)\,\big(u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n\big)$$

<u>Důkaz:</u> nechť
$$u = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$$
$$u = b_1 u_1 + \dots + b_n u_n$$

Odečteme
$$\vec{o} = (a_1 - b_1) u_1 + \dots + (a_n - b_n) u_n$$

Protože $u_1, u_2, \dots, u_n$ jsou LN, tak $a_1 - b_1 = \dots = a_n - b_n = 0$, tedy
$$a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n.$$

<u>Definice souřadnic</u> Souřadnice vektoru u v bázi $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ je n-tice čísel $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ taková, že

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n.$$

<u>Označení:</u> Tuto n-tici čísel budeme označovat

$$(u)_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Příklad Daný vektor má v různých bázích různé souřadnice.

$V = \mathbb{R}_2[x]$, $\quad \alpha = (1, x, x^2) \quad \beta = (1, (x-1), (x-1)^2)$

$$u = x^2 + x - 1 = \underline{(-1)} \cdot 1 + \underline{1 \cdot} x + \underline{1 \cdot} x^2$$

$$= \underline{1} \cdot 1 + \underline{3}(x-1) + \underline{1 \cdot} (x-1)^2$$

$$= 1 + 3x - 3 + x^2 - 2x + 1$$

$$= x^2 + x - 1$$

$$(u)_\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(u)_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vektorové podprostory – průnik a součet

U vekt. prostor, V a W jeho podprostory.

$$V \cap W = \{u \in U;\ u \in V \wedge u \in W\}$$

je opět vekt. podprostor.

$\vec{o} \in V$, $\vec{o} \in W$ $\Rightarrow$ $\vec{o} \in V \cap W$, tedy $V \cap W$ je neprázdný

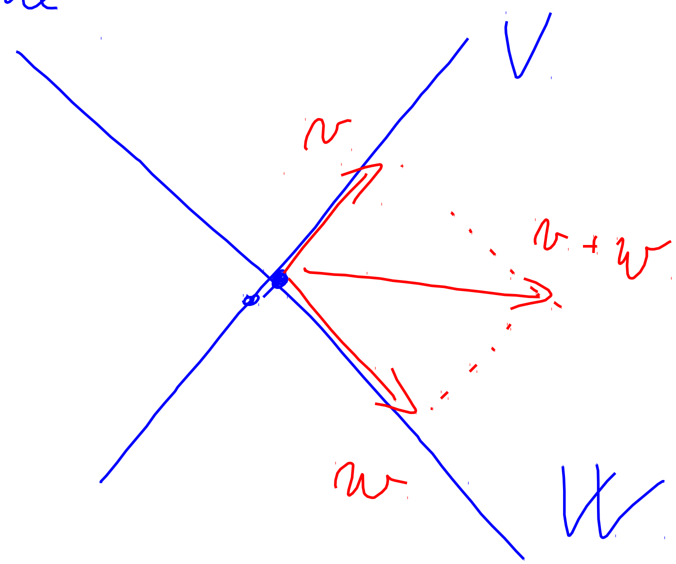
$$v_1, v_2 \in V \cap W \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v_1, v_2 \in V \Rightarrow v_1 + v_2 \in V \\ \Rightarrow v_1, v_2 \in W \Rightarrow v_1 + v_2 \in W \end{array}\right\} \Rightarrow v_1 + v_2 \in V \cap W$$

Stejně pro násobek.

Průnik vekt. podprostorů je vekt. podprostor.

Sjednocení vekt. podprostorů není obecně vekt. podprostor.

Příklad $U = \mathbb{R}^2$ V, W přímky procházející počátkem, které jsou různé



$V \cup W$ není vekt. podprostor

$w \in W$, $v \in V$

$w + v \notin V \cup W$

Při práci s vekt. prostory nahradíme sjednocení součtem vekt. podprostorů.

Definice: Nechť V a W jsou vekt. podprostory v U

$$V + W = \{u \in U ; (\exists v \in V)(\exists w \in W)(u = v + w)\}$$

$$V + W = \{v + w \in U ; v \in V, w \in W\}$$

Lemma Součet vekt. podprostorů je vekt. podprostor.

Důkaz $V, W \subseteq U$. Pokud $V \neq \emptyset$, $W \neq \emptyset$, pak rovněž $V + W \neq \emptyset$.

(1) vezmi $u_1, u_2 \in V+W$

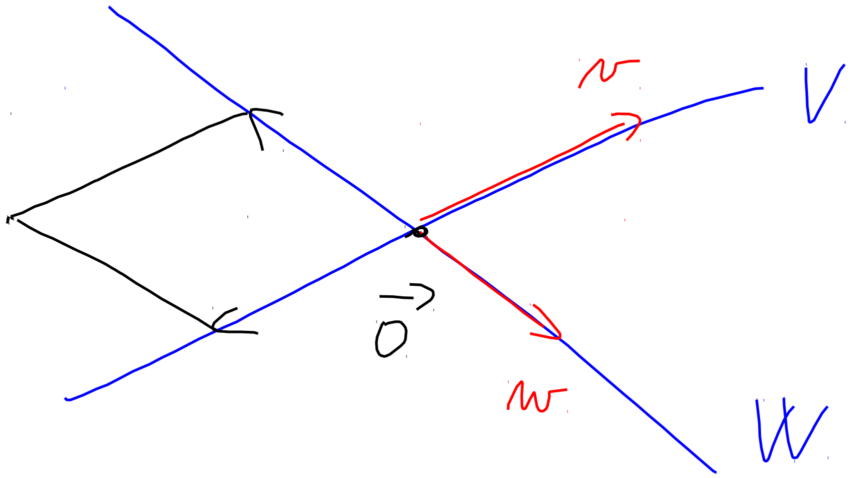
$$u_1 = v_1 + w_1, \quad v_1 \in V, \; w_1 \in W$$
$$u_2 = v_2 + w_2, \quad v_2 \in V, \; w_2 \in W$$
$$u_1 + u_2 = (v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) = \underbrace{(v_1 + v_2)}_{\in V} + \underbrace{(w_1 + w_2)}_{\in W} \in V + W$$

(2) analogicky pro násobek

Řekneme, že součet vekt. podprostorů je direktní, jestliže $V \cap W = \{\bar{o}\}$.

Příklady: $U = \mathbb{R}^2$, V, W dvě přímky procházející počátkem a navzájem různé.

18



$$V + W = \{ v + w \in \mathbb{R}^2,\ v \in V,\ w \in W \} = \mathbb{R}^2$$

$V \cap W = \{ \vec{o} \}$ Jde o direktní součet.