Determinanty

Pravidla pro počítání ① – ⑤ B vznikne z A

Jestliže řádek vynásobíme číslem c .... $\det B = c \det A$

Jestliže přehodíme 2 řádky $\det B = -\det A$

Jestliže k i-tému řádku přičteme c-násobek j-tého řádku $\det B = \det A$

⑥ Platí $\det A^T = \det A$

Dk: $A = (a_{ij})$ $A^T = (b_{ij})$ $b_{ij} = a_{ji}$

$$\det A^T = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sign} \tau \; b_{1\tau(1)} b_{2\tau(2)} \cdots b_{n\tau(n)}$$

$$= \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sign} \tau \; a_{\tau(1)1} a_{\tau(2)2} \cdots a_{\tau(n)n}$$

$$= \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sign} \tau \; a_{1\tau^{-1}(1)} \cdots\cdots a_{n\tau^{-1}(n)}$$

$$= \sum_{\tau^{-1} \in S_n} \operatorname{sign} \tau^{-1} \; a_{1\tau^{-1}(1)} \cdots\cdots a_{n\tau^{-1}(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \det A .$$

$$\tau : \quad \begin{matrix} 1 & 2 & \cdots\cdots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & & \tau(n) \end{matrix} \qquad A^T$$

$$\tau^{-1} \quad \underbrace{\begin{matrix} \tau(1) & \tau(2) & \cdots & \tau(n) \\ 1 & 2 & & n \end{matrix}} \qquad A$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & \cdots\cdots & n \\ \tau^{-1}(1) & \tau^{-1}(2) & & \tau^{-1}(n) \end{matrix}$$

$$\operatorname{sign} \tau \cdot \operatorname{sign} \tau^{-1} = \operatorname{sign}(\tau \circ \tau^{-1})$$
$$= \operatorname{sign}(id) = 1$$

$$\Rightarrow \operatorname{sign} \tau^{-1} = \operatorname{sign} \tau$$

(7) Všechna tvrzení (1) až (5) platí i pro sloupce a sloupcové operace.

Příklad: B vznikne z A prohozením i-tého a j-tého sloupce.

$$\det B = \det B^T$$

B^T vznikne z A^T prohozením i-tého a j-tého řádku, proto

$$\det B^T = -\det A^T = -\det A.$$

Sloupce v B přecházejí v řádky v B^T.

Počítání determinantů velkých matic

Příklad 1 matice $n \times n$

$$\det\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ & & & \ddots & \\ 1 & 1 & 1 & & a \end{pmatrix} \underset{\text{ostatní řádky}}{\overset{\text{K 1. řádku přičteme}}{=}} \det\begin{pmatrix} a+n-1 & a+n-1 & \cdots & a+n-1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ & & & \\ 1 & 1 & & a \end{pmatrix}$$

$$= (a+n-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{pmatrix} \underset{\text{1. řádek}}{\overset{\text{Od 2., 3., ..., n. tého řádku odečteme}}{=}} (a+n-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & a-1 \end{pmatrix}$$

$$= (a+n-1)(a-1)^{n-1}$$

Příklad 2 Vandermondův determinant

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \cdots & & & & & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = D_n$$

$$D_1 = \det(1) = \underline{1}$$

$$D_2 = \det\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} = x_2 - x_1$$

$$D_3 = \det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix} \underset{3.\check{r} - 1.\check{r}}{\overset{2.\check{r} - 1.\check{r}}{=}}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & x_2 - x_1 & (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) \\ 0 & x_3 - x_1 & (x_3 - x_1)(x_3 + x_1) \end{pmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 \\ 0 & 1 & x_3 + x_1 \end{pmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)$$

3. s. $- x_1 \cdot$ 2. s.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \end{pmatrix} \overset{\text{2. s.} - x_1 \cdot \text{1. s.}}{=} (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \det \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \end{array}\right)$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) D_2(x_2, x_3) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det A \cdot \det C$$

Nyní ukážeme, že

$$D_n(x_1, x_2, \dots x_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1)\, D_{n-1}(x_2, x_3, \dots x_n)$$

Odtud indukcí spočítáme, že

$$D_n(x_1, x_2, \dots x_n) = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j)$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{array}{l} 2.\check{r} - 1.\check{r} \\ 3.\check{r} - 1.\check{r} \\ \vdots \\ n.\check{r} - 1.\check{r} \end{array} = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & x_2^3 - x_1^3 & \dots & x_2^n - x_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & x_n^3 - x_1^3 & \dots & x_n^n - x_1^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$a^i - b^i = (a-b)(a^{i-1} + a^{i-2}b + a^{i-3}b^2 + \dots b^{i-1})$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) & (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2) & \dots & (x_2 - x_1)(x_2^{n-2} + x_2^{n-3} x_1 + \dots x_1^{n-2}) \\ \dots & & & & & \end{pmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1) \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 & x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2 & \dots \\ \dots & & & & \end{pmatrix}$$

Od 4. sloupce odečteme x_1 násobek 3. sloupce.

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\dots(x_n-x_1)\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_2+x_1 & x_2^2 & x_2^3 \dots & x_2^{n-2} \\ \dots & & & & & \end{pmatrix}$$

z předchozích úprav

Od 3. sloupce odečteme x_1-násobek 2. sloupce

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\dots(x_n-x_1)\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots \\ \dots & & & & & \end{pmatrix}$$

Od 2. sloupce odečteme x_1 násobek 1. sloupce

$$= (x_2-x_1)\cdots(x_n-x_1)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots x_2^{n-2} \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & x_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

$$= (x_2-x_1)\cdots(x_n-x_1)\det(1)\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} \\ & & \vdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

$$= (x_2-x_1)\cdots(x_n-x_1)\,D_{,n-1}(x_2, x_3, \dots x_n)$$

Věta: Nechť A je matice $k\times k$ a B je matice $(n-k)\times(n-k)$.

Potom

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{matrix} \}k \\ \}n-k \end{matrix} = \det A \cdot \det B$$

$$\ \ \underbrace{}_{k}\ \underbrace{}_{n-k}$$

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det (d_{ij}) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}\sigma \; d_{1\sigma(1)} d_{2\sigma(2)} \cdots d_{n\sigma(n)}$$

Vyšetříme součiny, ve kterých se nevyskytují prvky d_{ij}, kde $i \geq k+1$ a $j \leq k$, neboť ty jsou rovny 0.

Musí být $\sigma(\{k+1, k+2, \dots n\}) = \{k+1, \dots n\}$

Odtud

$$\sigma(\{1,2,\dots k\}) = \{1,2,\dots k\}$$

Z permutace σ vytvoříme 2 permutace

$$\tau \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & k+2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & & \sigma(k) & k+1 & k+2 & & n \end{pmatrix} \qquad w \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \dots & k & k+1 & \dots & n \\ 1 & 2 & k & \sigma(k+1) & & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \tau \circ w \qquad \operatorname{sign} \sigma \quad \operatorname{sign} \tau \cdot \operatorname{sign} w$$

$$\bar\tau \quad \begin{pmatrix} 1 & \dots & k \\ \sigma(1) & & \sigma(k) \end{pmatrix} \qquad \bar w \quad \begin{pmatrix} k+1 & \dots & n \\ \sigma(k+1) & & \sigma(n) \end{pmatrix} \qquad \bar\tau \in S_k \quad \bar w \in S_{n-k}$$

$$\operatorname{sign} \bar\tau = \operatorname{sign} \tau \qquad \operatorname{sign} \bar w = \operatorname{sign} w$$

Pokračujme ve výpočtu

$$= \sum_{\substack{\sigma = \tau \circ w \\ \bar\tau \in S_k \ \bar w \in S_{n-k}}} \operatorname{sign} \tau \cdot \operatorname{sign} w \; a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\substack{\bar\tau \in S_k \\ \bar w \in S_{n-k}}} \operatorname{sign} \bar\tau \cdot \operatorname{sign} \bar w \cdot$$

$$a_{1\bar\tau(1)} \dots a_{k\bar\tau(k)} \, a_{k+1\,\bar w(k+1)} \dots a_{n\bar w(n)} =$$

$$= \sum_{\substack{\overline{\tau} \in S_k \\ \overline{w} \in S_{n-k}}} \operatorname{sign} \overline{\tau} \cdot \operatorname{sign} \overline{w} \; a_{1\overline{\tau}(1)} \cdots a_{k\overline{\tau}(k)} \, b_{k+1\,\overline{w}(k+1)} \cdots b_{n\overline{w}(n)}$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{\overline{\tau} \in S_k} \operatorname{sign} \overline{\tau} \; a_{1\tau(1)} \cdots a_{k\tau(k)} \right)}_{\det A} \underbrace{\left(\sum_{\overline{w} \in S_{n-k}} \operatorname{sign} \overline{w} \; b_{k+1\,\overline{w}(k+1)} \cdots b_{n\overline{w}(n)} \right)}_{\det B}$$

Obdobně platí, že $\det \begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B$

CAUCHYOVA VĚTA

Nechť A a B jsou matice $n \times n$.

Potom

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Poznámky:

① determinant je homomorfismus grup

$$G = GL(n, \mathbb{K}) = \{\text{matice } n \times n, \text{ které mají inverzi}\}$$

s operací násobení matic je jedna grupa

$$H = \mathbb{K} \setminus \{0\} \qquad \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ nebo } \mathbb{C}$$

je grupa s operací násobení čísel.

Často ukážeme, že $\det A \neq 0$ pro $A \in G$. Potom máme zobrazení

$$\det : GL(n, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K} \setminus \{0\}$$

Cauchyova věta nám říká, že toto zobrazení je homomorfismus grup.

② Neplatí: $\det(A+B) = \det A + \det B$!

Důkaz: $\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B$ = pravá strana rovnice

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{ESO}]{\cancel{\text{EŘO}}} \begin{pmatrix} A & A\cdot B \\ -E & 0 \end{pmatrix}$$

ukážeme

$$\det\begin{pmatrix} A & A\cdot B \\ -E & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^n \det\begin{pmatrix} A\cdot B & A \\ 0 & -E \end{pmatrix} = (-1)^n \det(A\cdot B)\cdot\det(-E)$$

$$= (-1)^n \det(A\cdot B)\cdot(-1)^n = \det(A\cdot B)$$ = Levá strana rovnice

Úpravy ukážeme na maticích 2×2

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & b_{12} \\ 0 & -1 & 0 & b_{22} \end{pmatrix}$$

$(A\cdot B)_{11}$

$(A\cdot B)_{21}$

K 3. sloupci
přičteme
b_{11} násobek 1. sloupce
a b_{21} násobek 2. sloupce

Stejně tak upravíme 4. sloupec

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix} \overset{ESO}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} A & A\cdot B \\ -E & 0 \end{pmatrix}$$

Laplaceův rozvoj determinantu

A matice $n \times n$ $\quad A = (a_{ij})$

A_{ij} bude matice $(n-1)\times(n-1)$, která vznikne z A vynecháním řádku i a sloupce j

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 & 5 \\ 6 & 9 & 11 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_{23} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \\ 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

det A značíme někdy jako $|A|$

$\det A_{ij} = |A_{ij}|$

<u>Algebraický doplněk</u> prvku a_{ij} v matici A je číslo

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \, |A_{ij}|$$

Laplaceův rozvoj determinantu podle i-tého řádku je rovnost

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tilde{a}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

i je pevné.

Příště příklady a důkaz