Kvadratické nerovnost

$(r-2)x^2 + rx + 3r + 2 > 0$ $\forall x \in [3,5]$

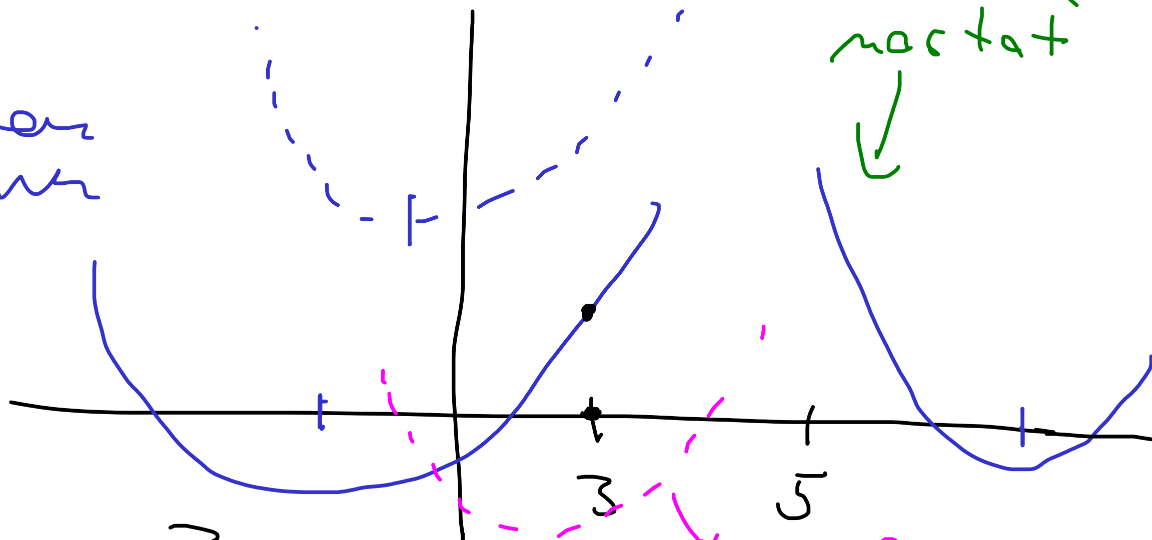
• $\boxed{r=2} \Rightarrow 2x + 6 + 2 > 0$

$x + 4 > 0$ platí na $[3,5]$

↳ splňuje požadovanou podmínku

• $r > 2$

nemůže nastat



nad ní

$(r-2)x^2 + r\,x + 3r + 2 =$

$= (r-2)\left(x^2 + \frac{r}{r-2}x\right) + 3r + 2 =$

$= (r-2)\left[\left(x + \frac{r}{r-2}\right)^2 \underbrace{- \frac{r^2}{(r-2)^2}\right] + 3r + 2}_{\text{nahoru/dolů}}$

↳ osa paraboly je v bodě

$-\frac{r}{r-2} < 0$

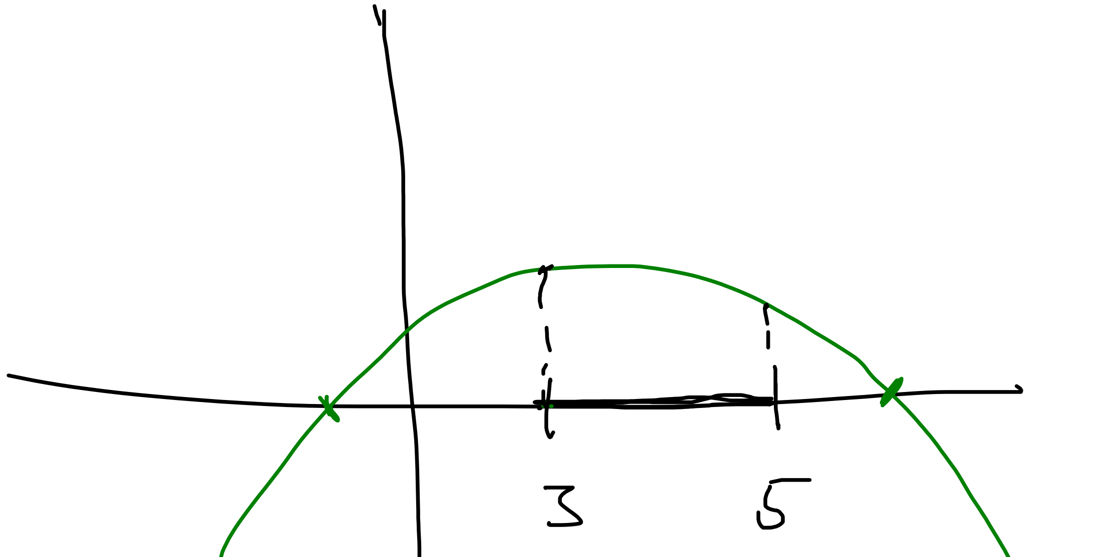
$x = 3 \Rightarrow 9(r-2) + 3r + 3r + 2 > 0$

$15r - 18 + 2 > 0$

$15r - 16 > 0 \Rightarrow r > \frac{16}{15}$

Tedy pro $v > 2$ je požadovaná podmínka splněna.

- $v < 2$



$x = 3 \Rightarrow v > \frac{16}{15}$

$x = 5 \Rightarrow 25(v-2) + 5v + 3v + 2 > 0$

$$33v - 50 + 2 > 0$$

$$33v - 48 > 0$$

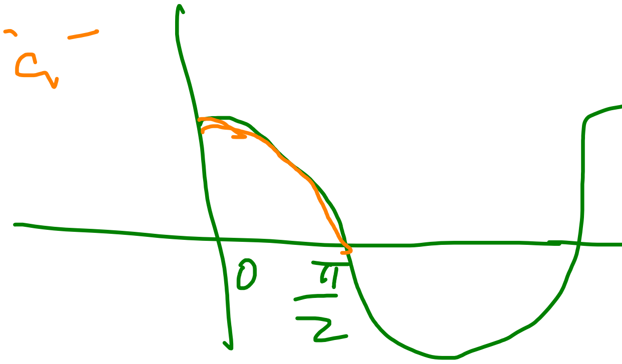
$$v > \frac{48}{33} = \frac{16}{11} \Rightarrow v > \frac{16}{11}$$

Závěr: $v > \frac{16}{11}$

Monotonie: $f(x)$ klesající na $D(f) = \mathbb{R}$ s $H(f) = (0, \frac{\pi}{2})$

a) Ukažte, že $\cos(f(x))$ je rostoucí.

klesající



$x_1 < x_2$ $\quad / f(\ldots)$

$f(x_1) > f(x_2)$ $\quad / \cos(\ldots)$

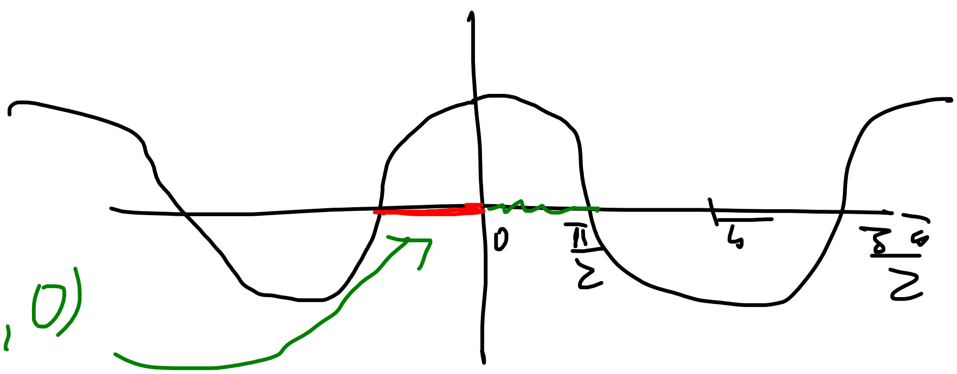
$\cos(f(x_1)) < \cos(f(x_2))$

$\Rightarrow \cos(f(x))$ rostoucí

b) $g(x) = \dfrac{\cos(x-\frac{\pi}{2})}{f(x)}$ pro $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$x - \frac{\pi}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$



- $\cos(x - \frac{\pi}{2})$ rostoucí
- $f(x)$ klesající

} obě všude kladné

$x_1 < x_2$

$$\boxed{\cos(x_1 - \tfrac{\pi}{2}) < \cos(x_2 - \tfrac{\pi}{2})}$$

$f(x_1) > f(x_2)$ $\quad / \frac{1}{f(x_1) f(x_2)}$

$$\frac{1}{f(x_2)} > \frac{1}{f(x_1)}$$

$$\boxed{\frac{1}{f(x_1)} < \frac{1}{f(x_2)}}$$

Zaměň

$$\underbrace{\frac{\cos(x_1 - \frac{\pi}{2})}{f(x_1)}}_{\text{rostoucí}} < \frac{\cos(x_2 - \frac{\pi}{2})}{f(x_2)}$$

5.8: $x^2 + ax + b = 0$

$x^2 + x + a = 0 \quad / \cdot (-1)$

Najděte $a \in \mathbb{R}$ t. ž. tato soustava má alespoň jedno řešení.

Řeš: $(a-1)x + b - a = 0$

$$x = \frac{a-b}{a-1}$$

$$\left(\frac{a-b}{a-1}\right)^2 + \frac{a-b}{a-1} + a = 0 \quad / (a-1)^2$$

$$(a-b)^2 + (a-1)(a-b) + a(a-1)^2 = 0$$

$(a^2 - 16a + 64) + (a^2 - 9a + 8) +$

$+ a(a^2 - 2a + 1) = 0$

$$\boxed{a^3 - 24a + 72 = 0}$$

pol. 3 stupně ⟹ racionální kořeny : $\frac{p}{q}$ .... $p \mid 72$, $q \mid 1$

⟹ kandidáti na racionální kořeny jsou

$\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \dots\}$

(dělitelé 72)

	1	0	-24	72
6	1	6	12	> 0
-6	1	-6	12	0

$a^3 - 24a + 72 =$

$= (a+6)(a^2 - 6a + 12)$

$a_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 12}}{2}$

pouze komplexní

$a = -6$

• $x^2 - 6x + 8 = 0$

$(x-2)(x-4) = 0$

• $x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$ → $x=2$ je společný kořen

61

$x \geq -1,\ x \geq -8,\ \ldots$

① $\sqrt{x+1}-1=\sqrt{x-\sqrt{x+8}}$ $/()^2$

$(x+1)-2\sqrt{x+1}+1=x-\sqrt{x+8}$

$2-2\sqrt{x+1}=-\sqrt{x+8}$ $/()^2$

$4-8\sqrt{x+1}+4(x+1)=x+8$

$3x=8\sqrt{x+1}$ $/()^2$

$9x^2=64(x+1)$

$9x^2-64x-64=0$

$D=64^2+4\cdot9\cdot64=$

$=64(64+4\cdot9)=$

$=64\cdot4(16+9)=64\cdot4\cdot25$

$x_{1,2}=\dfrac{64\pm8\cdot2\cdot5}{18}=\dfrac{32\pm40}{9}$

$x_{1,2}=\left\langle \begin{matrix}\frac{72}{9}=8\\ -8/9\end{matrix}\right.$

$$\sqrt{x+1}-1=\sqrt{x-\sqrt{x+8}}$$

- $x=8 \rightsquigarrow \sqrt{9}-1=\sqrt{8-\sqrt{16}}$

  $2=2$ **Ok**

- $x=-\frac{8}{9} \rightsquigarrow \underbrace{\sqrt{\frac{1}{9}}-1}_{<0} = \underbrace{\qquad}_{\geq 0}$

  ↳ nem vési'lu

$$\boxed{\text{Zòner: } x=8}$$

② $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x} \quad /()^2$

$$(3x+4)+2\sqrt{(3x+4)(x-4)}+(x-4)=4x$$

$$2\sqrt{(3x+4)(x-4)}=0$$

$x=-\frac{4}{3}$ $\qquad$ $x=4$

- $x=4 \rightsquigarrow \sqrt{16}+0=2\sqrt{4}$ **Ok**

- $x=-\frac{4}{3} \rightsquigarrow 0+\sqrt{\underbrace{-\ldots}_{\text{neg ale}}}=$

Závěr: $x = 4$ jediné řešení