3.7: $f(x)$, $g(x)$ rostoucí na I

(i) $h(x) = f(x) + g(x)$

$\hookrightarrow$ rostoucí

Dk: Zvolme $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$

f rostoucí $\Rightarrow$ $f(x_1) < f(x_2)$

g -"- $\quad g(x_1) < g(x_2)$

$$f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2)$$

$$h(x_1) < h(x_2) \quad \text{D}$$

(ii) $h(x) = f(x) - g(x)$

- $h(x)$ klesající

$f(x) = x$, $g(x) = 2x$

$h(x) = f(x) - g(x) = x - 2x$

$= -x$

na $I = \mathbb{R}$

- $h(x)$ rostoucí $\quad f(x) = 2x$

" $2x - x = x$ rostoucí $\quad g(x) = x$

na $\mathbb{R}$

(iii) $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

- $h(x)$ rostoucí $f(x), g(x)$ klesající

$I \in (0, \infty)$ $\quad f(x) = x$

$g(x) = x$

- $h(x)$ klesající

$I = (-\infty, 0)$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x \\ g(x) = x \end{array}\right\} h(x) = x^2 \text{ klesající}$$

(iv) $h(x) = -g(x)$

$\Rightarrow h(x)$ klesající

Dk: $x_1, x_2 \in I \quad x_1 < x_2$

pak $g(x_1) < g(x_2) \quad / \cdot (-1)$

$$-g(x_1) > -g(x_2)$$

$$h(x_1) > h(x_2) \quad \square$$

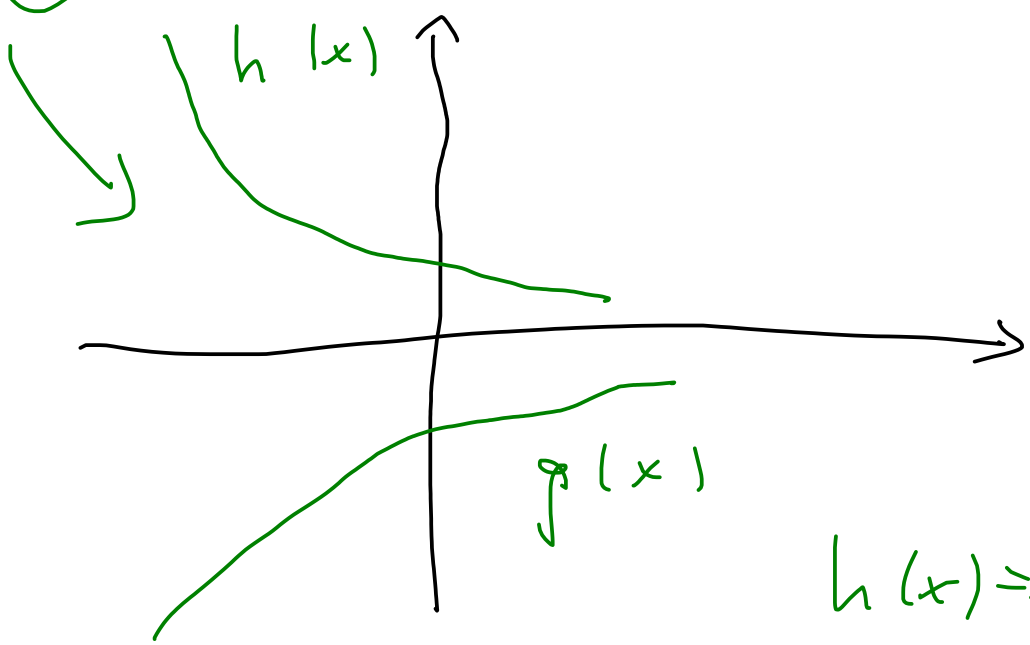
(v) $h(x) = g(x)\, g(x)$

může být rostoucí i klesající

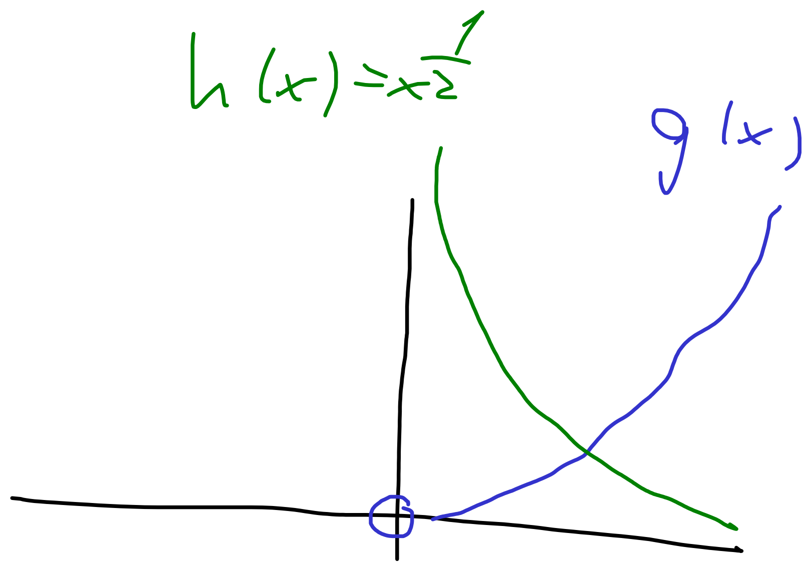
(viz (iii))

(vi) $h(x) = |g(x)|$

- $g(x) > 0 \rightsquigarrow h(x)$ rostoucí
- $g(x) < 0 \rightsquigarrow h(x)$ klesající



(vii) $h(x) = \frac{1}{g(x)}$



- $g(x) = x^2$

$I = (0, \infty)$

Platí: $g(x)$ rostoucí $\Rightarrow \frac{1}{g(x)}$ klesající

Dk: $x_1, x_2 \in I$, $g(x_1) < g(x_2) \quad / \cdot \frac{1}{g(x_1)\cdot g(x_2)}$

$I \not\ni 0$ $\qquad \frac{1}{g(x_2)} < \frac{1}{g(x_2)} \qquad g(x_1)\cdot g(x_2) > 0$

$h(x_2) < h(x_1) \quad \square$

Dalo priedp, je $f(x) = c \in \mathbb{R}$

(i) $h(x) = c + g(x)$, $g(x)$ rastuća

$h(x)$ je rastuća

(ii) $h(x) = c - \underbrace{\underbrace{g(x)}_{\text{padajuća}}}_{\text{padajuća}}$, $g(x)$ rastuća

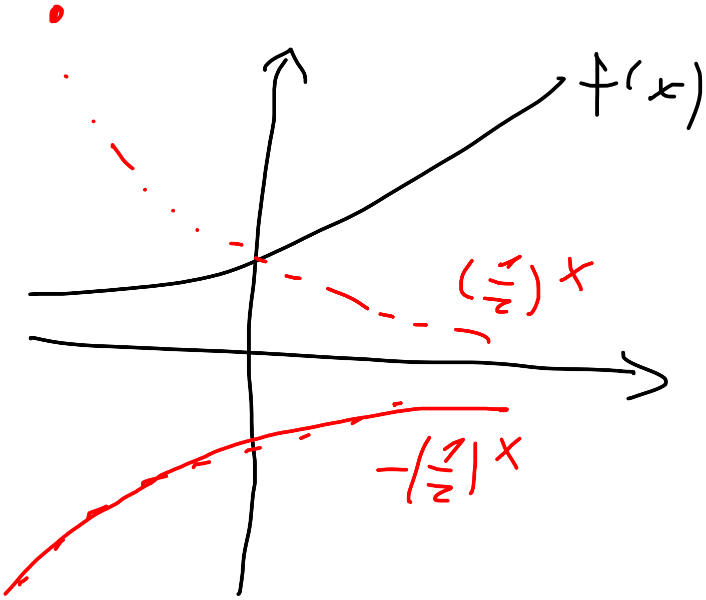
(iii) $h(x) = c \cdot g(x)$, $g(x)$ rastuća

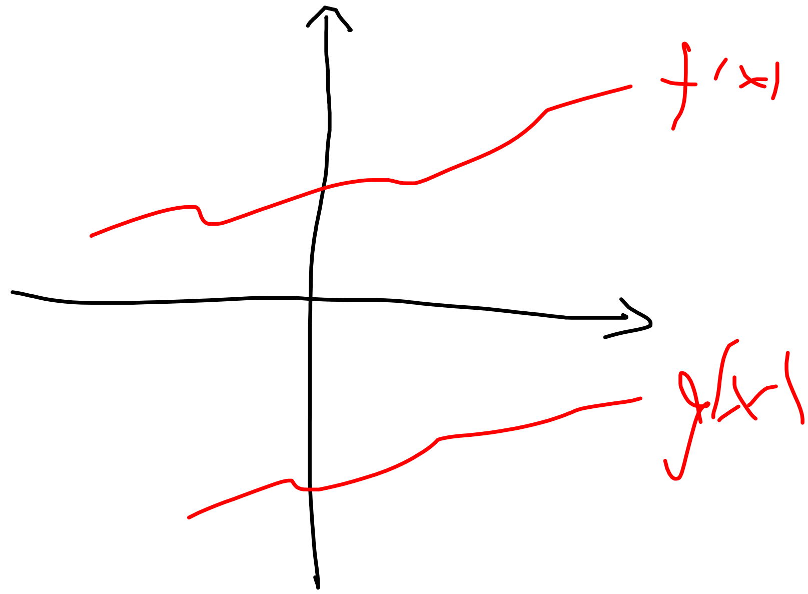
$c > 0$ rastuća

$c < 0$ padajuća

4.1 $f(x), g(x)$ rostoucí na $\mathbb{R}$

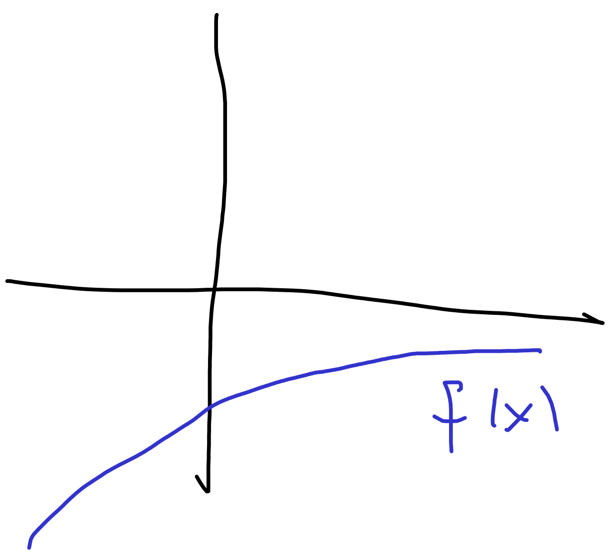
t. ž. $h(x) = f(x)\cdot g(x)$ klesající





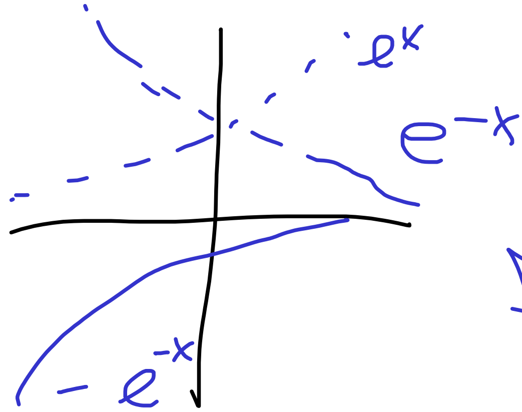
$$\left.\begin{aligned} f(x) &= 4^x \\ g(x) &= -(\tfrac{1}{2})^x \end{aligned}\right\} f(x)g(x) = -2^x$$

klesající



$(f(x))^2$ klesající

$f(x) = g(x) = -(\frac{1}{2})^x$



$f(x) = g(x) = -e^{-x}$

<u>4.2</u>: $f(x)$ rostoucí na $D(f) = \mathbb{R}$
a $H(f) \subset (0, \infty)$

Ukažte, že $g(x) = x \cdot f(x)$ je <u>rostoucí na</u> $(0, \infty)$

<u>Dk:</u> $x_1, x_2 > 0$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 < x_2 \\ \underline{f(x_1) < f(x_2)} \end{array}\right\} \text{kladné hodnoty}$$

$$x_1 f(x_1) < x_2 f(x_2)$$

$$g(x_1) < g(x_2)$$

4.3 $\quad ax^2+bx+c=0$

$a\neq 0$

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0$$

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=0$$

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0$$

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right]=0$$

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right]=0$$

4.4 Určete všechna $r \in \mathbb{R}$ t. ž. následující nerovnost platí pro $\forall x \in A$:

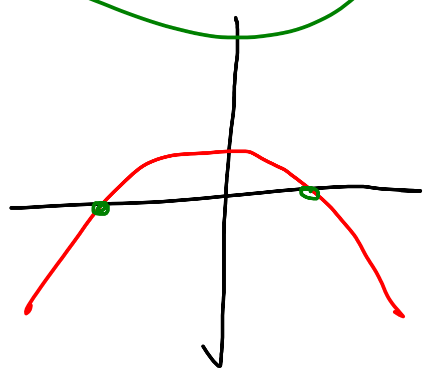
(a) $(r+4)x^2 - 2rx + 2r - 6 < 0$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

$r = -4$

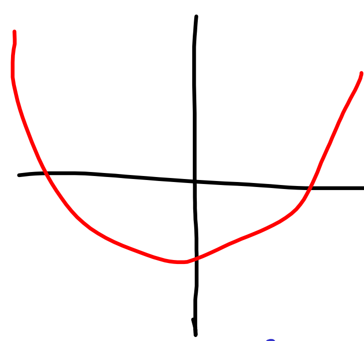
$8x - 8 - 6 < 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$ nejde

$r < -4$

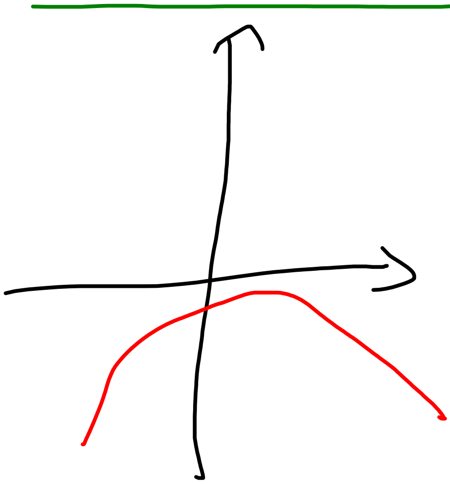


$r > -4$



nejde

Dále předp. $r < -4$



neexistují reálné kořeny

$D < 0$

$$(r+4)x^2 - 2rx + 2r - 6 < 0$$

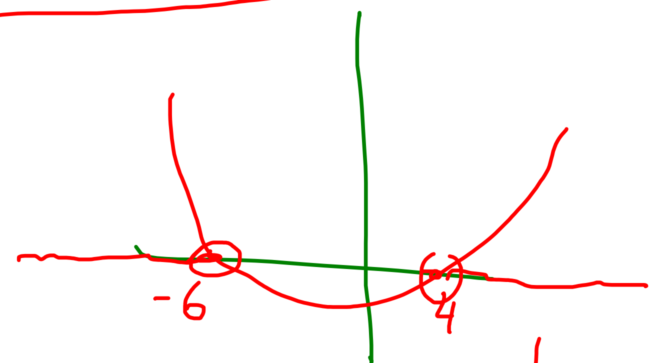
$$D = 4r^2 - 4(r+4)(2r-6) < 0 \quad / \cdot \tfrac{1}{4}$$

$$r^2 - (2r^2 - 6r + 8r - 24) < 0$$

$$-r^2 - 2r + 24 < 0 \quad / \cdot (-1)$$

$$\boxed{r^2 + 2r - 24 > 0}$$

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 24}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{25}}{2} = -1 \pm 5 \begin{cases} -6 \\ 4 \end{cases}$$



$$r \in (-\infty, -6) \cup (4, \infty)$$

$$r < -4$$

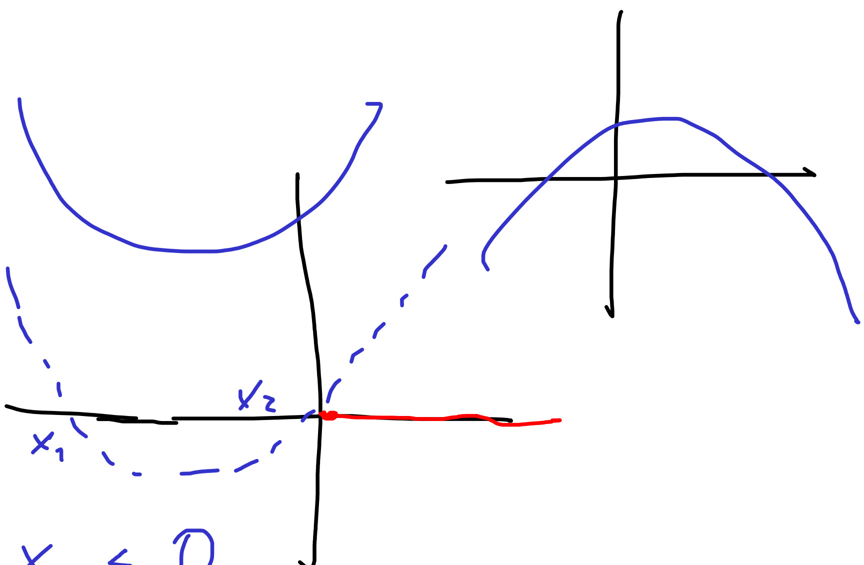
Závěr: $r \in (-\infty, -4)$

(b) $vx^2 - 4x + 3v + 1 > 0$ platí pro $\forall x \in (0, \infty)$

$v > 0$ | $\cancel{v < 0}$ | $\cancel{v = 0}$

$-4x + 1 > 0$

$x < \frac{1}{4}$



$x_2 \le 0$

↳ větší kořen

2 možnosti:
- $D < 0$
- $D \ge 0$, ale oba kořeny ≤ 0

$vx^2 - 4x + 3v + 1 > 0$

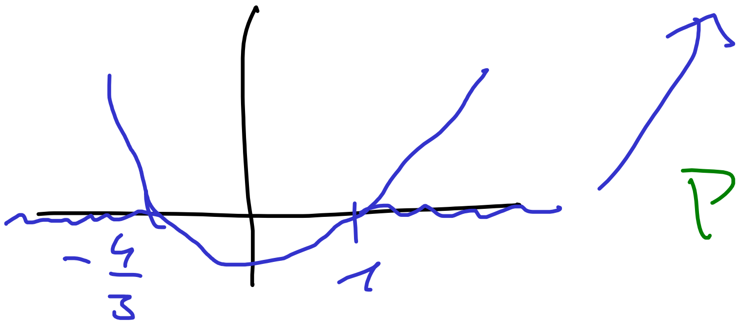
- $D = 16 - 4 \cdot v(3v + 1) < 0$

$4 - (3v^2 + v) < 0 \quad / \cdot (-1)$

$3v^2 + v - 4 > 0$

$$r_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\cdot 3\cdot 4}}{6} = \frac{-1 \pm 7}{6} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

pro $x \in \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right) \cup (1, \infty)$



přidáme $r > 0$

závěr pro $D<0$: $r \in (1, \infty)$

• $D \geq 0$, ale oba kořeny ≤ 0

$$rx^2 - 4x + 3r + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4r(3r+1)}}{2r} \leq 0$$

$$\hookrightarrow \quad 4 + \sqrt{16 - 4r(3r+1)} \leq 0$$

nemůže platit

Závěr: $r \in \langle 1, \infty)$

(c) $\underbrace{(r-2)}\, x^2 + rx + 1 - r > 0$ pro $\forall x > 0$

$r > 2$ $\quad$ $\cancel{r < 2}$ $\quad$ $r = 2$

$2x - 1 > 0$

neplatí $\forall x > 0$

$$D = r^2 - 4(r-2)(1-r)$$
$$= r^2 - 4(-r^2 + r + 2r - 2)$$
$$= \underbrace{5r^2 - 12r + 8}_{\text{má kořeny}}$$

$$r_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4\cdot 5\cdot 8}}{10}$$
$$= \frac{12 \pm 4\sqrt{3^2 - 10}}{10}$$

nemá reálné kořeny

$$D = 5r^2 - 12r + 8 > 0$$

$$\underbrace{(r-2)x^2 + rx + 1 - r}_{=0} > 0$$

$= 0$ má dva reálné kořeny, které by měly být ≤ 0

$$x_{1,2} = \frac{-r \pm \sqrt{5r^2 - 12r + 8}}{2(r-2)} \leq 0$$

$$-r + \sqrt{5r^2 - 12r + 8} \leq 0$$

$$\sqrt{5r^2 - 12r + 8} \leq r$$

$$5r^2 - 12r + 8 \leq r^2$$

$$4r^2 - 12r + 8 \leq 0$$

$$r^2 - 3r + 2 \leq 0$$

$$\underbrace{(r-2)}_{>0}\underbrace{(r-1)}_{\leq 0} \leq 0$$

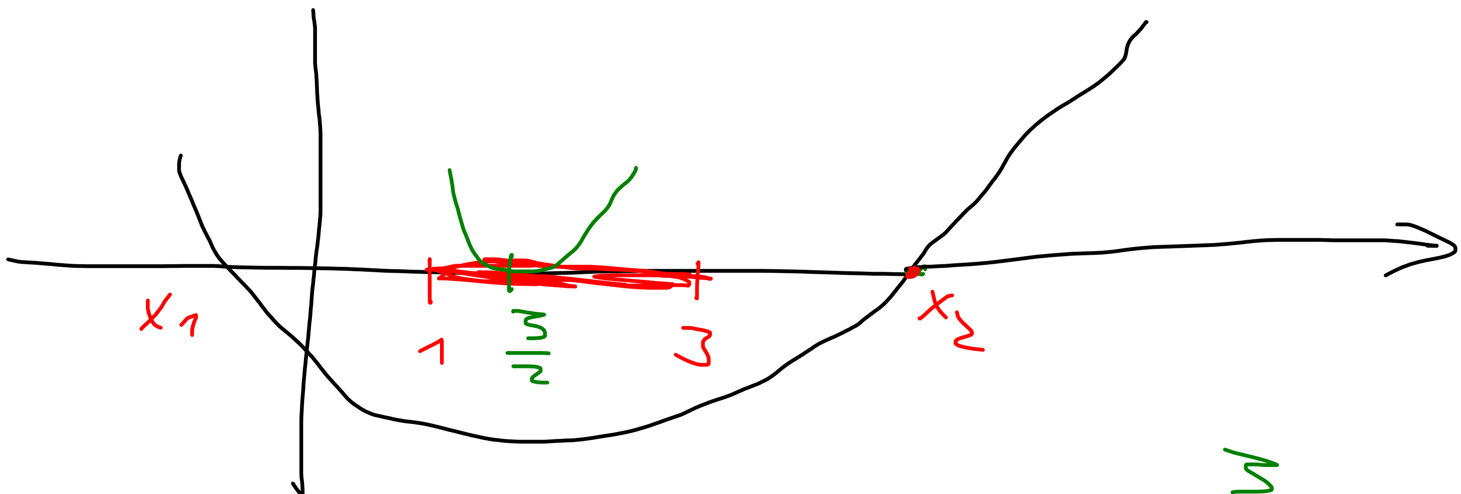
$\rightarrow r \leq 1$

Závěr

takové r neexistuje } zároveň $r > 0$

(d) $(x-3r)(x-r-3) < 0 \quad \forall x \in [1,3]$

- kořeny $3r$, $r+3$
- vedoucí člen $x^2 + \dots$



- jediný ~~koř~~ kořen $\to r = \frac{3}{2}$ nesplňuje podmínku

(i) $3r < 1 < 3 < r+3$

(ii) $r+3 < 1 < 3 < 3r$

(i) $r < \frac{1}{3}$, $r > 0 \implies r \in (0, \frac{1}{3})$

(ii) $r < -2$, $r > 1$ nemá průnik

Závěr: $r \in (0, \frac{1}{3})$