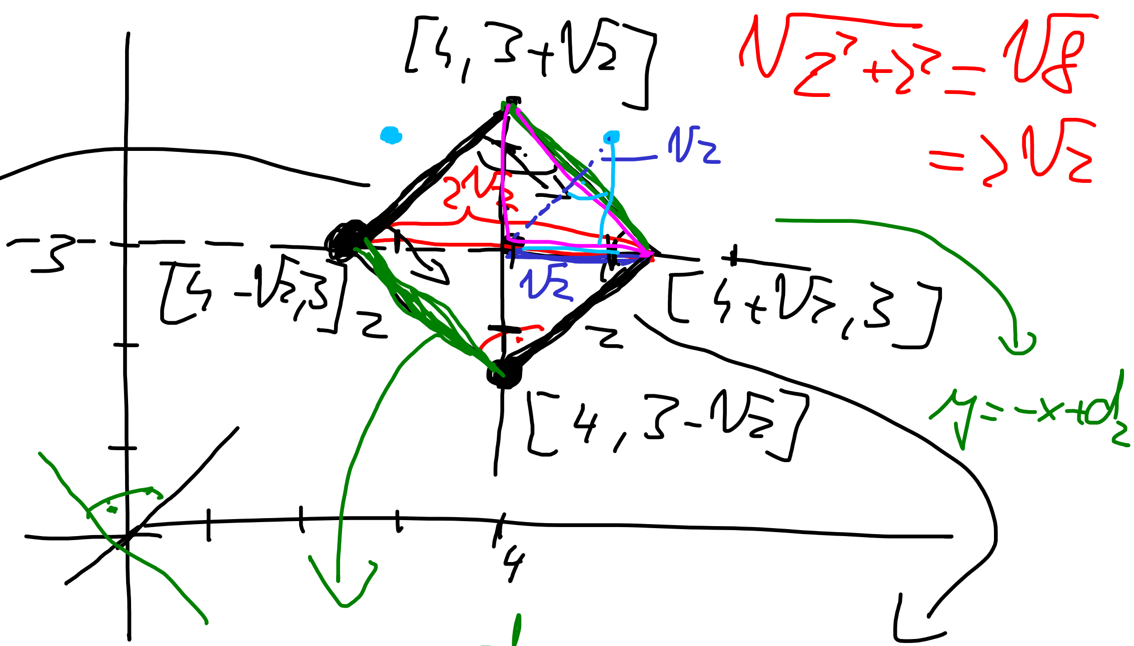
1. Čtverec:



$y = -x + d_1$

$y = x + c_1$

$3 = 4 - \sqrt{2} + c_1$

$-1 + \sqrt{2} = c_1$

$y = x - 1 + \sqrt{2}$

$y \leq x - 1 + \sqrt{2}$

$y - x + 1 \leq \sqrt{2}$

$y = x + c_2$

$3 - \sqrt{2} = 4 + c_2$

$-1 - \sqrt{2} = c_1$

$y = x - 1 - \sqrt{2}$

$y \geq x - 1 - \sqrt{2}$

$y - x + 1 \geq -\sqrt{2}$

$-\sqrt{2} \leq y - x + 1 \leq \sqrt{2}$

$|y - x + 1| \leq \sqrt{2}$

$y = -x + d_1$, bod $[4, 3-\sqrt{2}]$

$3 - \sqrt{2} = -4 + d_1$

$7 - \sqrt{2} = d_1$

$y = -x + 7 - \sqrt{2}$

$y \geq -x + 7 - \sqrt{2}$

$y = -x + d_2$, bod $[4, 3+\sqrt{2}]$

$3 + \sqrt{2} = -4 + d_2$

$7 + \sqrt{2} = d_2$

$y = -x + 7 + \sqrt{2}$

$y \leq -x + 7 + \sqrt{2}$

$y + x - 7 \geq -\sqrt{2}$

$y + x - 7 \leq \sqrt{2}$

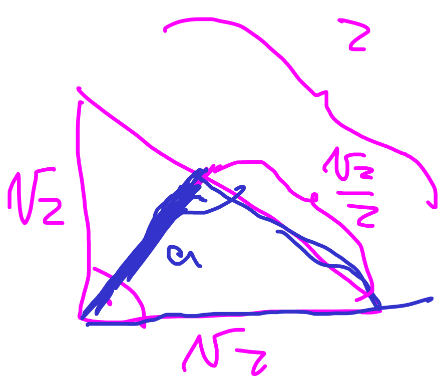
$|x + y - 7| \leq \sqrt{2}$

Body s celočíselnými souřadnicemi: $[4,3], [4,2], [4,4]$

$[3,3], [5,3]$

$\sqrt{\frac{3}{2}} < \sqrt{2}$

$\sqrt{3} < 2$



$a^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = (\sqrt{2})^2$

$a^2 + \frac{2}{4} = 2$, $a^2 = \frac{3}{2}$

$a = \sqrt{\frac{3}{2}}$

3. kvadratická nerovnost

$$(r-2)x^2 + rx + 3r + 2 > 0 \quad \forall x \in [3,5]$$

Určete, pro která r tato platí:

• $r = 2$: $2x + 6 + 2 > 0$

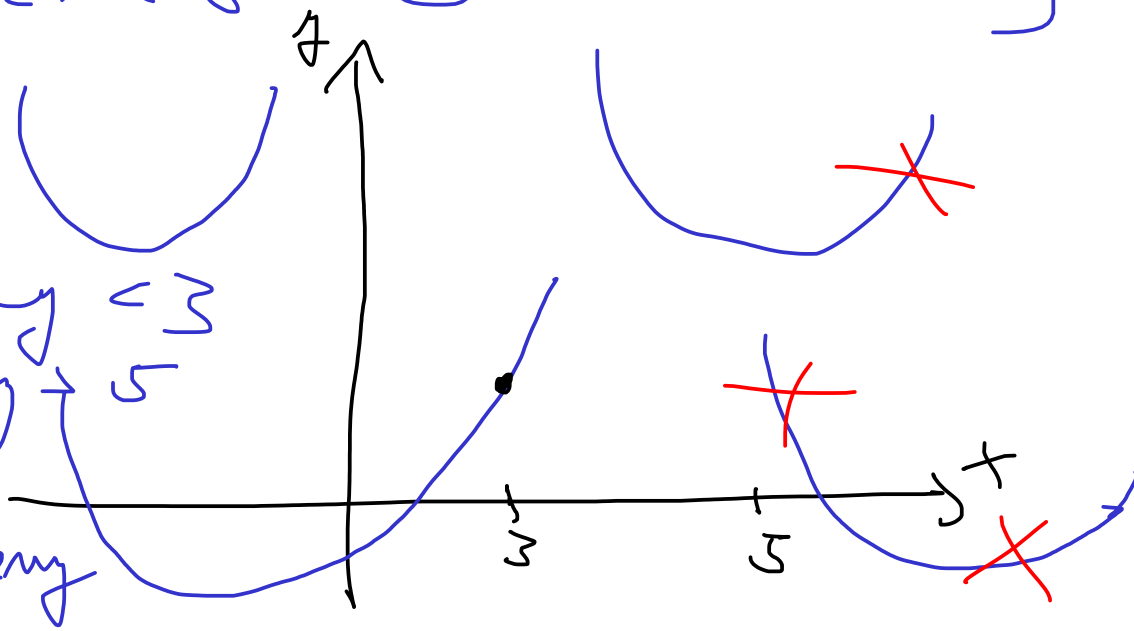
$\underbrace{r=2}_{\text{ok}}$ $\quad 2x + 8 > 0 \quad \forall x \in [3,5]$

• $r > 2$:

buď korieny < 3

nebo korieny > 5

nebo nemá reálné korieny



$$(r-2)\left[x^2 + \frac{r}{r-2}x\right] + 3r + 2 > 0$$

$$(r-2)\left[\left(x + \frac{r}{2(r-2)}\right)^2 - \frac{r^2}{4(r-2)^2}\right] + 3r + 2 > 0$$

$$(r-2)\left(x + \underbrace{\frac{r}{2(r-2)}}_{>0}\right)^2 - \frac{r^2}{4(r-2)} + 3r + 2 > 0$$

osa paraboly je přímka

$$x = -\frac{r}{2(r-2)} < 0$$

tedy stačí dosadit x = 3 do levé strany

$(r-2)x^2 + rx + 3r + 2 > 0$ ← $x=3$

$9(r-2) + 3r + 3r + 2 > 0$

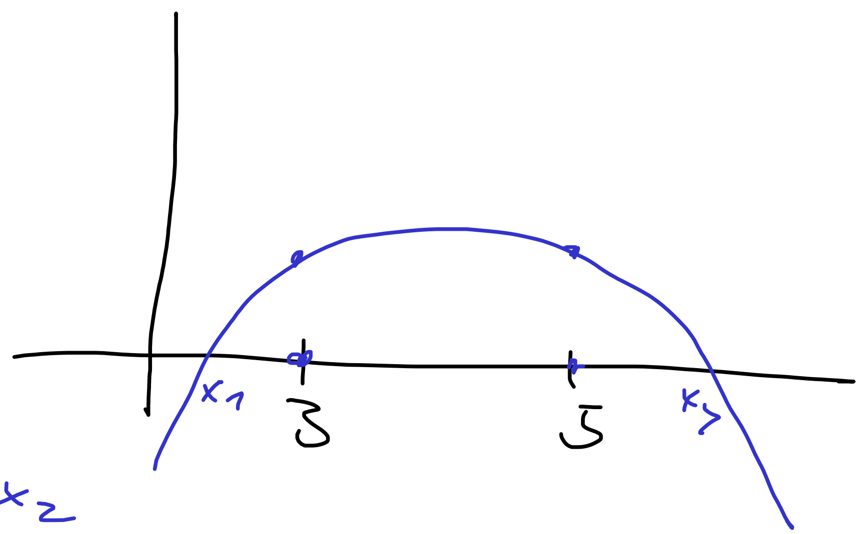
$15r - 16 > 0$ $\qquad r > \frac{16}{15}$

Závěr: $r > 2$ splňuje zadání

• $r < 2$:

⇓

2 reálné kořeny



$x_1 < 3 < 5 < x_2$

$(r-2)x^2 + rx + 3r + 2 > 0$ $\qquad \frac{16}{11} > \frac{16}{15}$

x = 3: $r > \frac{16}{15}$

x = 5: $25(r-2) + 5r + 3r + 2 > 0$

$33r - 50 + 2 > 0$

$33r - 48 > 0 \Rightarrow r > \frac{48}{33} = \frac{16}{11}$

pro $r < 2$ musí $r > \frac{16}{11}$

Závěr: $v > \frac{16}{11}$

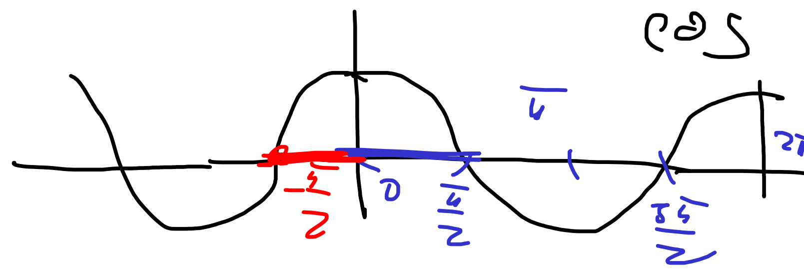
4. Monotonie:

$f(x)$ t.ž. $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = (0, \frac{\pi}{2})$

↳ klesající na $D(f)$

a) Dokažte, že $\cos(f(x))$ je rostoucí na celém definičním oboru

- $f(x)$ klesající
- $\cos$ klesající na $(0, \frac{\pi}{2})$



Tedy: $x_1 < x_2$

$f(x_1) > f(x_2) \quad / \cos$

$\cos(f(x_1)) < \cos(f(x_2))$

$\Rightarrow \cos(f(x))$ rostoucí

(b) $g(x) = \dfrac{\cos(x - \frac{\pi}{2})}{f(x)}$ pro $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

obě funkce kladné:
- $\cos(x - \frac{\pi}{2})$ rostoucí $\quad | \; x - \frac{\pi}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$
- $f(x)$ klesající

$x_1 < x_2 \longrightarrow \cos(x_1 - \frac{\pi}{2}) < \cos(x_2 - \frac{\pi}{2})$

$\frac{1}{f(x_1)} < \frac{1}{f(x_2)}$

$f(x_1) > f(x_1) \quad \left(\frac{1}{f(x_1) f(x_2)}\right) \quad \left(\frac{\cos(x_1 - \frac{\pi}{2})}{f(x_1)} < \frac{\cos(x_2 - \frac{\pi}{2})}{f(x_2)}\right)$

$\frac{1}{f(x_2)} > \frac{1}{f(x_1)}$

5. Jednociferná čísla

a, b, c, d čtyřčíselná jednociferná kladná čísla t. ž. $3 \mid a^2+b^2+c^2+d^2$

Dokažte, že pak $3 \nmid a^2+b^2$

Řeš: $3 \mid a^2+b^2+c^2+d^2$

každé číslo p je tvaru

$p = 3k$ nebo $\quad p^2 = 9k^2$

$p = 3k+1$ nebo $\quad p^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(\ldots)+1$

$p = 3k+2 \quad p^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(\ldots)+1$

Tedy

$p^2 = 3l$ nebo

$p^2 = 3l+1$

$3 \mid a^2+b^2+c^2+d^2$

neto

3 dělí všechna čísla a, b, c, d

NEJDE

→ 3 dělí právě jedno z těchto čísel

např. $3 \mid a$

$\Rightarrow 3 \nmid a^2+b^2$

ani $3 \nmid c^2+d^2$