Príklad 1

Vyšetrime konvergenciu funkcionálneho radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Riešenie:

Stanovíme najprv obor bodovej konvergencie radu funkcií (1). Zrejme pre žiadne $x \le 0$ nie je splnená nutná podmienka konvergencie radu (1), keďže

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^x} = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x = 0, \\ \infty, & x < 0, \end{array} \right\} \neq 0,$$

a teda v tomto prípade daný rad diverguje (samy overte :)). Na druhej strane, pre $x > 0$ môžeme aplikovať Cauchyho integrálne kritérium, keďže každá z funkcí $f_x(t) := 1/t^x$, $x > 0$, je nezáporná a nerastúca na intervale $[1, \infty)$. Okrem toho platí (detaily overte samy :))

$$\int_1^\infty f_x(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^\infty \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \infty, & x \in (0,1], \\ \frac{1}{x-1}, & x > 1. \end{cases}$$

Funkcionálny rad (1) v zadaní príkladu má teda za obor (bodovej) konvergencie otvorený interval $(1, \infty)$. Okrem toho, na každom *konečnom a uzavretom* intervale $\mathcal{I} \subset (1, \infty)$ konverguje dokonca rovnomerne (samy overte využitím Weierstrassovho kritéria rovnomernej konvergencie funkcionálneho radu :)). Priamo z definície teraz dokážeme, že rad (1) na celom svojom obore konvergencie $(1, \infty)$ nekonverguje rovnomerne. Ukážeme to sporom. Predpokladajme, že rad (1) konverguje rovnomerne na $(1, \infty)$. To znamená, že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje index $N \in \mathbb{N}$ tak, že pre každý index $n \ge N$ a každé $m \in \mathbb{N}$ platí nerovnosť

$$\left| \frac{1}{(n+1)^x} + \frac{1}{(n+2)^x} + \cdots + \frac{1}{(n+m)^x} \right| < \varepsilon \quad \text{pre každé } x \in (1, \infty).$$

Nakoľko členy radu (1) sú kladné, nemusíme písať absolútnu hodnotu, t.j.,

$$\frac{1}{(n+1)^x} + \frac{1}{(n+2)^x} + \cdots + \frac{1}{(n+m)^x} < \varepsilon \quad \text{pre každé } x \in (1, \infty).$$

Každý člen na ľavej strane poslednej nerovnosti je pre každé dané n, m a $x \in (1, \infty)$ väčší alebo rovný než zlomok $\frac{1}{(n+m)^x}$. Preto platí

$$\underbrace{\frac{1}{(n+m)^x} + \cdots + \frac{1}{(n+m)^x}}_{m \text{ členov}} \leq \frac{1}{(n+1)^x} + \cdots + \frac{1}{(n+m)^x} < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{m}{(n+m)^x} < \varepsilon \quad \text{pre každé } x \in (1, \infty).$$

Zvoľme $\varepsilon := 1/3$ a pre každé dané $n \geq N$ položme $m := n$. Platí teda

$$\frac{n}{(n+n)^x} = \frac{n}{(2n)^x} < \frac{1}{3} \quad \text{pre každé } n \geq N \text{ a každé } x \in (1, \infty). \tag{2}$$

Pre každé $n \in \mathbb{N}$ zrejme číslo $1 + \frac{1}{n} \in (1, \infty)$. Zvoľme preto pre každé dané $n \geq N$ hodnotu $x := 1 + \frac{1}{n}$. Potom podľa (2) máme

$$\frac{n}{(2n)^{1+\frac{1}{n}}} < \frac{1}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2^{1+\frac{1}{n}} \cdot n^{\frac{1}{n}}} < \frac{1}{3} \quad \text{pre každé } n \geq N.$$

Limitovaním poslednej rovnosti pre $n \to \infty$ dostávame

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{1+\frac{1}{n}} \cdot n^{\frac{1}{n}}} < \frac{1}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2^{1+0} \cdot 1} < \frac{1}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2} < \frac{1}{3} \quad \ldots \text{ spor!!!}$$

To znamená, že rad (1) nemôže konvergovať rovnomerne na celom otvorenom intervale $(1, \infty)$. Všimnime si, že v prípade uzavretého intervalu typu $[a, \infty)$ pre *dané* $a > 1$ nenastáva žiadny problém, pretože hodnota $x = 1 + \frac{1}{n}$ patrí do $[a, \infty)$ iba pre *konečne veľa* indexov n, avšak nie pre *všetky* $n \in \mathbb{N}$.