Príklady na precvičovanie – postupnosti a rady funkcií

Nech $\mathcal{I}$ je nedegenerovaný (t.j., viac ako jednobodový) reálny interval. Budeme uvažovať *postupnosť funkcií*

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots, \tag{1}$$

definovaných na intervale $\mathcal{I}$. Z funkcií v (1) sa dá formálne vytvoriť *rad funkcií* (alebo tiež *funkcionálny rad*)

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots . \tag{2}$$

V nasledujúcom texte a príkladoch sa budeme zaoberať otázkou *konvergencie* postupnosti funkcií (1) a jej limitou, resp. radu funkcií (2) a jej súčtom. Je zrejmé, že veľa vecí bude podobných ako pri *číselných* postupnostiach a radoch, obzvlášť kritéria konvergencie. Na druhej strane, niektoré veci skomplikuje fakt, že pracujeme s *funkciami.* Teraz bude okrem pohyblivého indexu n miešať karty i ešte viac pohyblivejšie x, ktoré beží cez celý interval $\mathcal{I}$. Z tohto dôvodu preto rozlišujeme dva základné typy konvergencie postupnosti (1), resp. radu (2), a to *bodová konvergencia* a *rovnomerná konvergencia.*

Bodová konvergencia

Je to najslabšia forma konvergencie postupnosti (radu) funkcií. Hrubo povedané, postupnosť (1) (rad (2)) konverguje *bodovo* v danom bode $x = a \in \mathcal{I}$, ak po dosadení $x = a$ do postupnosti (1) (radu (2)) získaná *číselná* postupnosť (rad) konverguje. Zozbieraním všetkých takýchto x-ov v intervale $\mathcal{I}$ dostaneme množinu, ktorá sa nazýva *obor konvergencie* postupnosti (1) (radu (2)). Je to teda množina všetkych bodov $x \in \mathcal{I}$, v ktorých postupnosť (1) (rad (2)) (bodovo) konverguje k nejakému konečnému číslu. Toto číslo zrejme závisí na konkrétnom výbere bodu x z oboru konvergencie. To znamená, že (bodovým) limitovaním postupnosti (1) dostaneme *limitnú funkciu* $f(x)$, t.j.,

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \text{ z oboru konvergencie postupnosti (1).}$$

Podobne *súčet* radu (2) bude funkciou premennej x, t.j.,

$$s(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \text{ z oboru konvergencie radu (2).}$$

Funkcie $f(x)$, resp. $s(x)$ sú zrejme definované iba na príslušnom obore konvergencie postupnosti (1), resp. radu (2).

Rovnomerná konvergencia

Rovnomerná konvergencia popisuje špeciálnu vlastnosť bodovej konvergencie na nejakej *podmnožine* oboru konvergencie (teda nie iba v jednom bode). Presnejšie, ale stále hrubo povedané, postupnosť (1) (rad (2)) konverguje *rovnomerne* na nejakej podmnožine $\mathcal{M}$ oboru konvergencie, ak spôsob, resp. rýchlosť bodovej konvergencie postupnosti (1) (radu (2)) v $\mathcal{M}$ *nezávisí* na premennej $x \in \mathcal{M}$. Ak $f(x)$ je limitná funkcia postupnosti (1) a $\mathcal{M}$ je podmnožina príslušného oboru konvergencie, tak potom postupnosť (1) konverguje rovnomerne k f na $\mathcal{M}$ práve vtedy, keď číselná postupnosť $\{a_n\}$, definovaná

$$a_n := \sup_{x \in \mathcal{M}} |f_n(x) - f(x)|,$$

spĺňa $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Keďže z vlastností supréma zrejme pre každé $x \in \mathcal{M}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$0 \leq |f_n(x) - f(x)| \leq a_n,$$

vidíme, že v prípade rovnomernej konvergencie vzdialenosti $f_n(x)$ od $f(x)$ konvergujú pre $n \to \infty$ do nuly skutočne nezávisle na premennej $x \in \mathcal{M}$ (samy si to veľmi dobre premyslite, prípadne si i nakreslite vhodný obrázok ;)). Rovnomerná konvergencia radu (2) na podmnožine $\mathcal{M}$ jeho odpovedajúceho oboru konvergencie sa definuje ako rovnomerná konvergencia príslušnej postupnosti $\{s_n\}$ čiastočných súčtov radu (2) k súčtu $s(x)$ na $\mathcal{M}$ (i toto si samy veľmi dobre premyslite a rozmeňte na drobné, t.j., ako to bude vyzerať v reči členov daného radu (2) :)).

Ak postupnosť (1), resp. rad (2) konverguje rovnomerne na množine $\mathcal{M}$, tak zrejme konverguje i bodovo v každom bode $\mathcal{M}$. Opačne to však neplatí, t.j., z bodovej konvergencie nevyplýva rovnomerná konvergencia. Preto je rovnomerná konvergencia silnejšia než bodová a má veľa vyznamných a užitočných vlastností. Obzvlášť, umožňuje *prenos* niektorých *vlastností* funkcií $f_n(x)$ na limitnú funkciu $f(x)$, resp. súčet $s(x)$. Ak napríklad sú všetky funkcie $f_n(x)$ spojité na intervale $\mathcal{I}$, tak rovnomerná konvergencia zaručuje, že i limitná funkcia $f(x)$, resp. súčet $s(x)$ budú spojitými funkciami (na vhodných podmnožinách oboru konvergencie). Rovnomerná konvergencia radu (2) umožnuje jeho integrovanie člen po člene (samozrejme, ak sú všetky funkcie $f_n(x)$ integrovateľné :)), pričom výsledný rad z integrálov funkcií $f_n(x)$ bude konvergovať k integrálu zo súčtu $s(x)$, atď. Tieto skutočnosti ilustrujeme na konkrétnych príkladoch.

Nutnú a postačujúcu podmienku rovnomernej konvergencie postupnosti (1), resp. radu (2) udáva – ako inak :) – *Cauchyho–Bolzanovo kritérium.* Avšak podobne ako pri číselných postupnostiach a radoch je jeho praktické použitie pomerne ťažkopádne.

Cauchyho–Bolzanovo kritérium rovnomernej konvergencie

Postupnosť (1) konverguje rovnomerne na množine $\mathcal{M} \subset \mathcal{I}$ práve vtedy, keď pre každé kladné číslo ε existuje index n_0 taký, že pre každé dva indexy $m, n \geq n_0$ a pre každé $x \in \mathcal{M}$ platí

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Podobne, rad (2) konverguje rovnomerne na množine $\mathcal{M} \subset \mathcal{I}$ práve vtedy, keď pre každé kladné číslo ε existuje index n_0 taký, že pre každý index $n \geq n_0$, pre každé $m \in \mathbb{N}$ a pre každé $x \in \mathcal{M}$ platí

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+m}(x)| < \varepsilon.$$

Prakticky výhodnejšie a široko používané sú *Weierstrassovo kritérium* a *Dirichletovo a Abelovo kritérium* rovnomernej konvergencie radu (2). Poskytujú však iba *postačujúce* podmienky rovnomernej konvergencie.

Weierstrassovo kritérium rovnomernej konvergencie radu funkcií

Ak existuje konvergentný číselný rad $\sum a_n$ taký, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ a pre každé $x \in \mathcal{M} \subseteq \mathcal{I}$ platí $|f_n(x)| \leq a_n$, potom rad (2) rovnomerne konverguje na množine $\mathcal{M}$ k súčtu $s(x)$. Číselný rad $\sum a_n$ sa potom nazýva *majorantným radom* (alebo tiež *majorantou*) pre funkcionálny rad (2).

Dirichletovo a Abelovo kritérium rovnomernej konvergencie radu funkcií

Sú to analógie rovnomenných kritérií pre konvergenciu číselných radov. Prv, ako ich vyslovíme, je nutné zaviesť dva pojmy týkajúce sa funkcionálnej postupnosti (1).

- Postupnosť (1) sa nazýva *monotónna* na intervale $\mathcal{I}$, ak pre každú hodnotu $x = a \in \mathcal{I}$ je príslušná číselná postupnosť $\{f_n(a)\}$ monotónna rovnakého typu (t.j., napríklad klesajúca pre každú hodnotu $x = a \in \mathcal{I}$).

- Postupnosť (1) sa nazýva *rovnomerne ohraničená* na intervale $\mathcal{I}$, ak existuje kladné číslo K tak, že platí $|f_n(x)| \leq K$ pre každé $x \in \mathcal{I}$ a pre každé $n \in \mathbb{N}$.

Samy si dobre premyslite, že v špeciálnom prípade, kedy funkcie $f_n(x)$ sú *konštanty*, t.j., postupnosť (1) je číselnou postupnosťou, predchádzajúce dva pojmy prechádzajú na starú dobrú monotónnosť a ohraničenosť číselnej postupnosti :). Nuž a teraz k našim dvom junákom Dirichletovi a Abelovi :).

Nech $\{f_n(x)\}$ a $\{g_n(x)\}$ sú dve postupnosti funkcií definovaných na intervale $\mathcal{I}$, pričom nech $\{g_n\}$ je monotónna na $\mathcal{I}$. Nech naviac je splnená aspoň jedna z nasledujúcich podmienok.

- *(Dirichlet)* Postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n(x)\}$ radu $\sum f_n(x)$ je rovnomerne ohraničená na $\mathcal{I}$ a postupnosť $\{g_n(x)\}$ konverguje rovnomerne na $\mathcal{I}$ k nulovej funkcii.

- *(Abel)* Rad $\sum f_n(x)$ konverguje rovnomerne na $\mathcal{I}$ a postupnosť $\{g_n(x)\}$ je rovnomerne ohraničená na $\mathcal{I}$.

Potom funkcionálny rad $\sum f_n(x)g_n(x)$ konverguje rovnomerne na $\mathcal{I}$.

Nechávame na čitateľa, aby porovnal tieto dve „funkcionálne“ kritériá s odpovedajúcimi „číselnými“ kritériami (pre číselné rady) a všimol si vzájomné analógie :).

Riešené príklady

Príklad 1

Určme obor konvergencie, limitnú funkciu a typ konvergencie pre postupnosť

$$f_n(x) = x^n, \qquad x \in [0,1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Riešenie:

Toto je typický príklad na vyšetrovanie funkcionálnej postupnosti. Stanovíme najprv obor konvergencie a limitnú funkciu postupnosti v zadaní príkladu. Nie je ťažké sa presvedčiť, že platí

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

To znamená, že postupnosť $\{f_n(x)\}$ bodovo konverguje pre každé $x \in [0,1]$, t.j., jej oborom konvergencie je celý interval $[0,1]$, pričom limitná funkcia je

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Poďme teraz preskúmať, či táto konvergencia je i rovnomerná na $[0,1]$. V súlade s úvodnými poznámkami sa potrebujeme pozrieť na číselnú postupnosť

$$a_n = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)|.$$

Postupne platí (samy si dobre premyslite :))

$$a_n = \sup_{x\in[0,1]} |x^n - f(x)| = \sup_{x\in[0,1)} |x^n - 0| = \sup_{x\in[0,1)} x^n = 1 \quad \text{pre každé } n \in \mathbb{N}.$$

Nakoľko $\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$, funkcionálna postupnosť $\{f_n(x)\}$ nekonverguje rovnomerne na intervale $[0,1]$. Toto je výsledok, ktorý sme získali formálnou aplikáciou definície rovnomernej konvergencie postupnosti funkcií. Je však veľmi dôležité si uvedomiť, čo to hovorí *v skutočnosti*, resp. prečo to vyšlo práve takto a nie inak :). Ak si do vhodného obrázku nakreslíme grafy funkcií $f_n(x)$ a $f(x)$, tak vidíme, že pre $x \in [0,1)$ sa grafy funkcií $f_n(x)$ síce približujú k nulovej funkcii, avšak rýchlosť tejto konvergencie *závisí* od x; čím sme bližšie k bodu 1, tým sa konvergencia *neobmedzene spomaľuje*. Je to spôsobené dvomi vecami – faktom, že $f_n(1) = 1$ nezávisle na indexe n, a faktom, že funkcie $f_n(x)$ sú spojité (dobre si to premyslite pomocou obrázka :)). Nechávame na čitateľa, aby ukázal, že z podobných dôvodov postupnosť $\{f_n(x)\}$ nekonverguje rovnomerne ani na polootvorenom intervale $[0,1)$. Avšak pre *každé pevné* $q \in [0,1)$ je konvergencia $\{f_n(x)\}$ na intervale $[0,q]$ *rovnomerná*, pretože v tomto prípade máme (platí $f(x) = 0$ pre každé $x \in [0,q]$)

$$a_n = \sup_{x\in[0,q]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,q]} x^n = q^n,$$

a tak $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} q^n = 0$. Dôvodom je skutočnosť, že rýchlosť konvergencie sa síce na intervale $[0,q]$ s rastúcim x opäť spomaľuje, avšak *nie neobmedzene*; najpomalšia bude v bode $x = q$. Postupnosť $\{f_n(x)\}$ bude teda na intervale $[0,q]$ konvergovať k nulovej funkcii *nezávisle na* x rýchlosťou $q^n \to 0$ pre $n \to \infty$ – jedná sa teda o rovnomernú konvergenciu.

Námet na pokračovanie Príkladu 1
Pokúste sa dokázať (podobným spôsobom ako vyššie), že na *každom uzavretom podintervale* $\mathcal{I} \subseteq [0,1)$ postupnosť $\{f_n(x)\}$ z Príkladu 1 konverguje rovnomerne k nulovej funkcii. V takomto prípade povieme, že príslušná postupnosť $\{f_n(x)\}$ konverguje k svojej limite *skoro-rovnomerne* (alebo tiež *lokálne rovnomerne*) na intervale $[0,1)$:).

Príklad 2
Určme obor konvergencie, limitnú funkciu a typ konvergencie pre postupnosť

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx}, \qquad x \in [1,\infty), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Riešenie:
Postupujeme podobne ako v predchádzajúcom príklade. Keďže

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx} = 0 \quad \text{pre každé } x \in [1,\infty),$$

funkcionálna postupnosť $\{f_n(x)\}$ konverguje bodovo na celom intervale $[1,\infty)$ k limitnej funkcii $f(x) \equiv 0$ na $[1,\infty)$. Okrem toho pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sup_{x\in[1,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[1,\infty)} \left|\frac{1}{1+nx} - 0\right| = \sup_{x\in[1,\infty)} \frac{1}{1+nx} = \frac{1}{1+n}$$

(samy sa presvedčte :)). Nakoľko $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n} = 0$, postupnosť $\{f_n(x)\}$ konverguje rovnomerne (k funkcii $f(x)$) na intervale $[1,\infty)$.

Príklad 3

Určme obor konvergencie, súčet a typ konvergencie pre rad

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n - x^{n-1}\right), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Riešenie:

Príklad budeme riešiť priamo podľa definície, t.j., nájdeme (funkcionálnu) postupnosť $\{s_n(x)\}$ čiastočných súčtov uvedeného radu. Pre dané prirodzené n a reálne x platí

$$s_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(x^k - x^{k-1}\right) = 1 + (x-1) + \left(x^2 - x\right) + \left(x^3 - x^2\right) + \cdots$$
$$+ \left(x^{n-1} - x^{n-2}\right) + \left(x^n - x^{n-1}\right) = x^n$$

(samy overte :)). Ďalej máme

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} \text{neexistuje}, & x \le -1, \\ \infty, & x > 1, \\ 1, & x = 1, \\ 0, & |x| < 1 \end{cases}$$

(i toto samy overte ;)). Obor konvergencie postupnosti $\{s_n(x)\}$, a teda i funkcionálneho radu v zadaní príkladu, je preto interval $(-1,1]$. Pre hľadaný súčet $s(x)$ radu potom platí

$$s(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n - x^{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1,1), \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

(pripomeňme, že funkcia $s(x)$ je definovaná iba na obore konvergencie radu, teda na intervale $(-1,1]$). Napokon, rovnomerná konvergencia radu v zadaní na intervale $(-1,1]$ znamená rovnomernú konvergenciu postupnosti $\{s_n(x)\}$ na $(-1,1]$. Analogicky ako v predchádzajúcich príkladoch dostávame

$$\sup_{x\in(-1,1]} |s_n(x) - s(x)| = \sup_{x\in(-1,1)} x^n = 1 \overset{n\to\infty}{\not\to} 0.$$

To znamená, že postupnosť $\{s_n(x)\}$, a teda aj rad v zadaní príkladu nekonverguje rovnomerne na intervale $(-1, 1]$ (pre upresnenie sa jedná o skororovnomernú konvergenciu na $(-1, 1]$, ako si čitateľ môže sám overiť :)).

Príklad 4 (Weiestrassovo kritérium)
Určme obor a typ konvergencie pre rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Riešenie:
Pri zisťovaní oboru konvergencie predloženého funkcionálneho radu môžeme využívať všetky kritéria konvergencie číselných radov (voľbou konkrétnej hodnoty premennej x zrejme získame číselný rad). Konkrétne, aplikáciou limitného podielového kritéria dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}}{\frac{x^n}{n(n+1)}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} \cdot |x| = |x|.$$

Teda pre $|x| > 1$ rad v zadaní príkladu diverguje, kým pre $|x| < 1$ konverguje absolútne. Pre $x = \pm 1$ máme číselné rady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)},$$

ktoré obidva konvergujú absolútne (samy overte :)). To znamená, že obor konvergencie skúmaného radu funkcií je interval $[-1, 1]$. Na tomto intervale uvedený rad bodovo konverguje k svojmu súčtu. O tom, či táto konvergencia je naviac i rovnomerná, rozhodneme pomocou Weiestrassovho kritéria. Nakoľko pre každý index n platí

$$\left| \frac{x^n}{n(n+1)} \right| = \frac{|x|^n}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{pre každé } x \in [-1, 1],$$

a číselný rad $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ je konvergentný, rad v zadaní príkladu konverguje rovnomerne na celom svojom obore konvergencie $[-1, 1]$.

Príklad 5 (Weiestrassovo kritérium)
Určme obor a typ konvergencie pre rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Riešenie:
Pre každé reálne číslo x a každý index zrejme platí nerovnosť

$$\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| = \frac{|\sin nx|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Číselný rad $\sum \frac{1}{n^2}$ je preto majorantou daného funkcionálneho radu na celom $\mathbb{R}$. A keďže rad $\sum \frac{1}{n^2}$ konverguje (samy overte :)), podľa Weierstrassovho kritéria rad v zadaní príkladu konverguje rovnomerne na celom $\mathbb{R}$. To znamená, že tento rad konverguje na $\mathbb{R}$ i bodovo, t.j., jeho obor konvergencie je celé $\mathbb{R}$.

Príklad 6 (ťažší) (Weiestrassovo + Cauchyho–Bolzanovo kritérium)
Dokážme, že rad funkcií

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in (-\infty, \infty),$$

konverguje rovnomerne na každom konečnom a uzavretom reálnom intervale, ale na celom $(-\infty, \infty)$ nekonverguje rovnomerne.

Riešenie:
Nech $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ je nejaký konečný a uzavretý interval. Potom $\mathcal{I}$ je zrejme ako podmnožina v $\mathbb{R}$ ohraničený, t.j., existuje $K > 0$ tak, že $|x| \leq K$ pre každé $x \in \mathcal{I}$. Následne, pre každý index n máme

$$\left| \frac{x^n}{n!} \right| = \frac{|x|^n}{n!} \leq \frac{K^n}{n!} \quad \text{pre každé } x \in \mathcal{I}.$$

Číselný rad $\sum \frac{K^n}{n!}$ je teda majorantný k funkcionálnemu radu v zadaní príkladu na intervale $\mathcal{I}$. Nechávame na čitateľa, aby overil, že tento číselný rad konverguje :). Podľa Weiestrassovho kritéria potom skúmaný rad funkcií konverguje rovnomerne na $\mathcal{I}$. Tým sme ukázali prvú časť príkladu. Druhú časť budeme dokazovať sporom, t.j., predpokladajme, nech rad v zadaní konverguje rovnomerne na celom $(-\infty, \infty)$. Podľa Cauchyho–Bolzanovho kritéria potom pre každé kladné číslo ε existuje index n_0 tak, že pre každé $n \geq n_0$ a pre každé $m \in \mathbb{N}$ nerovnosť

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \cdots + \frac{x^{n+m}}{(n+m)!} \right| < \varepsilon \quad \text{platí pre každé } x \in (-\infty, \infty).$$

Zvoľme $\varepsilon = 1$ a nech n_0 je k nemu odpovedajúci index. Položme ďalej $n = n_0$ a $m = 1$. Potom pre každé reálne číslo x musí platiť nerovnosť

$$\left| \frac{x^{n_0+1}}{(n_0+1)!} \right| = \frac{|x|^{n_0+1}}{(n_0+1)!} < 1.$$

Táto nerovnosť musí byť teda splnená aj pre reálne číslo

$$x_0 := 1 + [(n_0+1)!]^{\frac{1}{n_0+1}}.$$

Zrejme $x_0 > 0$, preto platí

$$|x_0| = x_0 > [(n_0+1)!]^{\frac{1}{n_0+1}}$$

$$\Downarrow$$

$$|x_0|^{n_0+1} > (n_0+1)!$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{|x_0|^{n_0+1}}{(n_0+1)!} > 1 \ \ldots \ \text{spor!!!}$$

To znamená, že náš predpoklad rovnomernej konvergencie na celom $(-\infty, \infty)$ bol nesprávny. Rad v zadaní príkladu teda nekonverguje rovnomerne na celom $\mathbb{R}$. V súlade s výsledkom prvej časti príkladu sa jedná o skoro-rovnomernú konvergenciu na $(-\infty, \infty)$.

Príklad 7 (Dirichletovo kritérium)
Vyšetrime rovnomernú konvergenciu radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n + x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Riešenie:
Predložený rad funkcií chceme skúmať pomocou Dirichletovho kritéria. V súlade s jeho predpokladmi preto pre $n \in \mathbb{N}$ položme

$$f_n(x) :\equiv (-1)^{n-1}, \qquad g_n(x) := \frac{1}{n+x^2} \quad \text{pre každé } x \in \mathbb{R}$$

(funkcia $f_n(x)$ je pre každý index n konštantnou funkciou vzhľadom na x). Poďme teraz overiť, či sú splnené všetky požiadavky kladené na funkcionálne postupnosti $\{f_n(x)\}$ a $\{g_n(x)\}$. Každá z funkcií $g_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, je zrejme klesajúca na $\mathbb{R}$ (vzhľadom na premennú x). Okrem toho platí

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) \equiv 0 \qquad \text{a} \qquad |g_n(x) - 0| = \frac{1}{n+x^2} \leq \frac{1}{n} \quad \text{pre každé } x \in \mathbb{R}.$$

Postupnosť $\{g_n(x)\}$ teda konverguje rovnomerne na celom $\mathbb{R}$ k nulovej funkcii (samy si dobre premyslite :)). Ďalej postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n(x)\}$ radu $\sum f_n(x)$ spĺňa pre každé reálne x rovnosť

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} = \begin{cases} 0, & n \text{ párne}, \\ 1, & n \text{ nepárne}, \end{cases}$$

(samy overte :)). To znamená, že $|s_n(x)| \leq 1$ pre každé $n \in \mathbb{N}$ a pre každé $x \in \mathbb{R}$ (i toto si dobre premyslite :)). Postupnosť $\{s_n(x)\}$ je preto rovnomerne ohraničená na celom $\mathbb{R}$. Rad v zadaní príkladu spĺňa všetky predpoklady Dirichletovho kritéria, a preto konverguje rovnomerne na $\mathbb{R}$ k svojmu súčtu. Premyslite si, že tento výsledok potom implikuje i bodovú konvergenciu radu s oborom konvergencie celé $\mathbb{R}$;).

Príklad 8 (Abelovo kritérium)
Vyšetrime rovnomernú konvergenciu radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n, \qquad x \in [0,1].$$

Riešenie:
Postupujeme podobne ako v predchádzajúcom príklade. Položme

$$f_n(x) :\equiv \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \qquad g_n(x) := x^n \quad \text{pre každé } x \in [0,1].$$

Nechávame na čitateľa, aby si premyslel, že postupnosť $\{g_n(x)\}$ je monotónna na intervale $[0, 1]$, konkrétne neklesajúca na $[0, 1]$. Okrem toho zrejme pre každý index n a každé $x \in [0, 1]$ platí $|g_n(x)| = |x^n| = x^n \leq 1$. Postupnosť $\{g_n(x)\}$ je preto i rovnomerne ohraničená na intervale $[0, 1]$. Na druhej strane, funkcionálny rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

rovnomerne konverguje na intervale $[0, 1]$. Jedná sa totiž o *číselný rad* (členy $f_n(x)$ sú pre každý index n konštantné funkcie vzhľadom na x), ktorý konverguje (samy overte :)) *nezávisle na premennej* x. Veľmi dobre si toto premyslite ;). Overili sme teda všetky predpoklady Abelovho kritéria, kladené na skúmaný rad. To znamená, že tento rad konverguje rovnomerne k svojmu súčtu na intervale $[0, 1]$. Z toho potom vyplýva, že konverguje i bodovo s oborom konvergencie $[0, 1]$.

Nasledujúce príklady ilustrujú niektoré základné a dôležité vlastnosti rovnomerne konvergentných funkcionálnych postupností a radov v (1) a (2). V Príkladoch 9–14 rozoberáme vzájomný vzťah rovnomernej konvergencie postupnosti funkcií a spojitosti jej členov, resp. jej limitnej funkcie.

Príklad 9

$$\textbf{spojitosť } f_n(x) \ + \ \textbf{rovnomerná konvergencia postupnosti (1)}$$
$$\Downarrow$$
$$\textbf{spojitosť limity } f(x)$$

Postupnosť spojitých funkcií $f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}$ konverguje na intervale $[1, \infty)$ bodovo k limitnej funkcii $f(x) \equiv 0$ (samy overte :)). Táto konvergencie je i rovnomerná na $[1, \infty)$, nakoľko číselná postupnosť

$$a_n := \sup_{x \in [1,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [1,\infty)} |\mathrm{e}^{-nx} - 0| = \sup_{x \in [1,\infty)} \mathrm{e}^{-nx} = \mathrm{e}^{-n}$$

spĺňa $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$. Vidíme, že potom i limitná funkcia $f(x)$ je spojitá na intervale $[1, \infty)$.

Príklad 10

$$\textbf{spojitosť } f_n(x) \ + \ \textbf{nespojitosť limity } f(x)$$
$$\Downarrow$$
$$\textbf{nerovnomerná konvergencia postupnosti } (\mathbf{1})$$

Postupnosť spojitých funkcií $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$ konverguje na intervale $(-\infty, \infty)$ bodovo k nespojitej limitnej funkcii

$$f(x) = \begin{cases} -\pi/2, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \pi/2, & x > 0 \end{cases}$$

(samy overte :)). Táto konvergencia potom nutne nemôže byť rovnomerná na $(-\infty, \infty)$. Skutočne, ukážte, že platí

$$\sup_{x \in (-\infty,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \frac{\pi}{2} \quad \text{pre každé } n \in \mathbb{N},$$

a teda $\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in(-\infty,\infty)} |f_n(x) - f(x)| \right) = \pi/2 \neq 0$.

Príklad 11

$$\textbf{spojitosť } f_n(x) \ + \ \textbf{spojitosť limity } f(x)$$
$$\not\Downarrow$$
$$\textbf{rovnomerná konvergencia postupnosti } (\mathbf{1})$$

Postupnosť spojitých funkcií $f_n(x) = nx \cdot \mathrm{e}^{-nx}$ konverguje na intervale $[0, \infty)$ bodovo k spojitej limitnej funkcii $f(x) \equiv 0$ (samy ukážte :)). Napriek tomu táto konvergencia nie je rovnomerná na $[0, \infty)$. Pre každý index $n \in \mathbb{N}$ totiž platí $1/n \in [0, \infty)$ a $f_n(1/n) = 1/\mathrm{e}$. To znamená, že suprémum funkcie $f_n(x)$ je na intervale $[0, \infty)$ väčšie, nanajvyš rovné hodnote $1/\mathrm{e}$ (pozorne si to premyslite :)). Následne číselná postupnosť

$$a_n = \sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,\infty)} nx \cdot \mathrm{e}^{-nx} \geq \frac{1}{\mathrm{e}},$$

a teda $\lim_{n\to\infty} a_n$ buď neexistuje alebo $\lim_{n\to\infty} a_n \geq \frac{1}{\mathrm{e}} > 0$.

Príklad 12

$$\textbf{spojitosť a monotónnosť } f_n(x) \ + \ \textbf{spojitosť limity } f(x)$$
$$+ \ \textbf{kompaktný interval } [a,b]$$
$$\Downarrow$$
$$\textbf{rovnomerná konvergencia postupnosti (1)}$$

Postupnosť spojitých funkcií $f_n(x) = 1 + x^n$ konverguje bodovo na kompaktnom intervale $[0, 1/2]$ k spojitej limitnej funkcii $f(x) \equiv 1$. Naviac, pre každý index n je funkcia $f_n(x)$ rastúca na $[0, 1/2]$. Preto daná konvergencia musí byť rovnomerná na celom intervale $[0, 1/2]$. Ukazuje to i priamy výpočet

$$\sup_{x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]} x^n = \frac{1}{2^n} \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0$$

(detaily si premyslite samy :)).

Príklad 13

$$\textbf{spojitosť } f_n(x) \ + \ \textbf{spojitosť limity } f(x) \ + \ \textbf{kompaktný interval } [a,b]$$
$$\not\Downarrow$$
$$\textbf{rovnomerná konvergencia postupnosti (1)}$$

Postupnosť spojitých funkcií $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ konverguje bodovo na kompaktnom intervale $[0, 1]$ k spojitej limitnej funkcii $f(x) \equiv 0$. Napriek tomu táto konvergencia nie je rovnomerná na $[0, 1]$, ako sa o tom môžeme ľahko presvedčiť stanovením číselnej postupnosti

$$a_n = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left|x^n - x^{2n}\right|.$$

Výraz $x^n - x^{2n}$ je spojitou funkciou na kompaktnom intervale $[0, 1]$. Z Weierstrassovej vety diferenciálneho počtu funkcií jednej reálnej premennej potom vyplýva, že uvedené suprémum prechádza na maximum (dobre si to premyslite :)). A nakoľko $x^n \geq x^{2n}$ pre každé $x \in [0,1]$ (i toto si dobre premyslite :)), dostávame

$$a_n = \max_{x\in[0,1]} \left(x^n - x^{2n}\right) = \frac{1}{4} \quad \text{pre každé } n \in \mathbb{N}.$$

Teda $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{4} \neq 0$, a preto sa nejedná o rovnomernú konvergenciu.

Na druhej strane, postupnosť spojitých funkcií $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ konverguje tiež bodovo na kompaktnom intervale $[0,1]$ k limite $f(x) \equiv 0$. Táto konvergencia je však rovnomerná na $[0,1]$, keďže platí

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x\in[0,1]} \left(x^n - x^{n+1}\right) = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{n+1} \quad \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0$$

(podrobnosti si premyslite samy ;)).

Príklad 14

nespojitosť $f_n(x)$ + **spojitosť limity** $f(x)$

$\not\Downarrow$

nerovnomerná konvergencia postupnosti (1)

Postupnosť nespojitých funkcií $f_n(x) = \chi(x)/n$, kde $\chi(x)$ je *Dirichletova funkcia* ($\chi(x) = 1$ pre $x \in \mathbb{Q}$ a $\chi(x) = 0$ pre $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) konverguje na $\mathbb{R}$ bodovo k spojitej limitnej funkcii $f(x) \equiv 0$ (samy sa presvedčte :)). Táto konvergencia je i rovnomerná na celom $\mathbb{R}$, pretože platí

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{\chi(x)}{n} = \frac{1}{n} \quad \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0$$

(i toto si samy dobre premyslite :)).

V ďalších dvoch príkladoch budeme testovať nasledujúce tvrdenie.

Zámena limít

Nech postupnosť (1) konverguje rovnomerne na množine $\mathcal{I} \setminus \{x_0\}$ ($\mathcal{I}$ je interval) k limitnej funkcii $f(x)$. Nech ďalej pre každý index n existuje limita $\lim_{x\to x_0} f_n(x)$. Potom i funkcia $f(x)$ má limitu v bode x_0 a platí

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \underbrace{\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right]}_{\text{toto je } f(x)} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left[\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right]}_{\text{zámena limít}}.$$

Príklad 15
V Príklade 2 sme ukázali, že postupnosť

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx}, \qquad x \in [1,\infty),$$

konverguje rovnomerne na intervale $\mathcal{I} = [1,\infty)$ k limitnej funkcii $f(x) \equiv 0$. Položme $x_0 = 2$. Zrejme postupnosť $\{f_n(x)\}$ konverguje rovnomerne i na množine $\mathcal{I} \setminus \{x_0\} = [1,2) \cup (2,\infty)$ k limite $f(x)$. Okrem toho pre $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to 2} \frac{1}{1+nx} = \frac{1}{1+2n}.$$

Podľa vyššie uvedenej vety teda i funkcia $f(x)$ má limitu v bode $x_0 = 2$ (čo je v tomto prípade zrejmé :)) a platí

$$\lim_{x\to x_0} \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] = \lim_{x\to 2} \left[\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx}\right] = \lim_{x\to 2} 0 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\lim_{x\to 2} \frac{1}{1+nx}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+2n} = 0.$$

Príklad 16
Na druhej strane, funkcionálna postupnosť

$$f_n(x) = x^n, \qquad x \in \mathbb{R},$$

konverguje iba bodovo na $[0,1)$ k limite $f(x) \equiv 0$, nie však rovnomerne, ako sme dokázali v druhej časti Príkladu 1. Hoci pre $x_0 = 1$ platí

$$\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to 1} x^n = 1 \quad \text{pre každý index } n,$$

a funkcia $f(x)$ má (jednostrannú zľava) limitu v bode $x_0 = 1$ (s akou hodnotou? :)), nemôžeme zameniť limitovanie

$$\lim_{x\to x_0^-}\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] = \lim_{x\to 1^-}\left[\lim_{\substack{n\to\infty\\ x\in[0,1)}} x^n\right] = \lim_{x\to 1^-} 0 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{x\to x_0^-} f_n(x)\right] = \lim_{\substack{n\to\infty\\ x\in[0,1)}}\left[\lim_{x\to 1^-} x^n\right] = \lim_{\substack{n\to\infty\\ x\in[0,1)}} 1 = 1.$$

Príčinou tohto výsledku je skutočnosť, že daná konvergencia nie je rovnomerná na $[0,1)$ (v tomto príklade berieme vo vyššie uvedenom tvrdení $\mathcal{I} = [0,1]$).

Ďalšou významnou vlastnosťou rovnomerne konvergentných funkcionálnych postupností je zámena limitovania a integrácie.

Zámena limity a integrálu

Nech postupnosť (1) konverguje rovnomerne na množine $\mathcal{I}$ k limitnej funkcii $f(x)$ a nech $[a,b] \subseteq \mathcal{I}$ je uzavretý interval. Nech pre každý index n je funkcia $f_n(x)$ integrovateľná na $[a,b]$. Potom i funkcia $f(x)$ je integrovateľná na $[a,b]$ a platí

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^a \underbrace{\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right]}_{\text{toto je } f(x)}\mathrm{d}x = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\int_b^a f_n(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{zámena limity a integrálu}}\ .$$

Príklad 17

Funkcionálna postupnosť

$$f_n(x) = 2n^2x\cdot \mathrm{e}^{-n^2x^2}, \qquad x\in[0,1],$$

konverguje bodovo na intervale $\mathcal{I} = [0,1]$ k limitnej funkcii $f(x) = 0$ pre každé $x\in[0,1]$ (samy overte :)). Každá z funkcií $f_n(x)$ je spojitá na $[0,1]$, a teda i integrovateľná na $[0,1]$, pričom

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2n^2x\cdot \mathrm{e}^{-n^2x^2}\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-n^2x^2}\right]_0^1 = 1-\mathrm{e}^{-n^2}.$$

Zrejme integrovateľná na $[0,1]$ je i limitná funkcia $f(x)$. Napriek tomu nefunguje zámena limitovania a integrácia

$$\int_b^a \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] \mathrm{d}x = \int_0^1 0 \, \mathrm{d}x = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_b^a f_n(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \mathrm{e}^{-n^2}\right) = 1.$$

Dôvodom tohto zyhania je fakt, že postupnosť $\{f_n(x)\}$ nekonverguje rovnomerne na intervale $[0,1]$ (pokúste sa to dokázať :); inšpirujte sa postupom v Príklade 11 a využite pozorovanie $f_n(1/n) = 2n/\mathrm{e}$ pre každé $n \in \mathbb{N}$).

Príklad 18

Podobne postupnosť

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \qquad x \in [0,1],$$

konverguje iba bodovo na intervale $[0,1]$ k limitnej funkcii $f(x) \equiv 0$, nie však rovnomerne (samy ukážte s využitím $f_n(1/n) = 1/2$ pre každý index n). V tomto prípade je však možné zameniť limitu s integrálom, nakoľko

$$\int_0^1 \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2}\right] \mathrm{d}x = \int_0^1 0 \, \mathrm{d}x = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2} \, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\ln(1+n^2x^2)}{2n}\right]_0^1$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+n^2)}{2n} = 0.$$

Tento výsledok ukazuje, že podmienka rovnomernej konvergencie postupnosti (1) je postačujúcou, nie však nutnou podmienkou na vzájomnú zámenu limitovania a integrácie.

Príklad 19

Vypočítajme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\cos x^n}{n^2} \, \mathrm{d}x.$$

Riešenie:
Funkcia $f_n(x) = \frac{\cos x^n}{n^2}$ síce má pre každý index n primitívnu funkciu na intervale $[0,1]$ (prečo? :)), avšak nie je možné ju vyjadriť pomocou elementárnych funkcií (jedná sa o tzv. *vyššiu transcendentnú funkciu*). Uvedený integrál preto nevieme priamo vypočítať. Podvedome teda očakávame, že bude možné zameniť limitovanie s integráciou. V tomto prípade totiž dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\cos x^n}{n^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\cos x^n}{n^2}\right] \mathrm{d}x = \int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0,$$

pretože $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos x^n}{n^2} = 0$ pre každé $x \in [0,1]$ (samy ukážte :)). Je však nutné overiť, či je skutočne možné takúto zámenu previesť. Postupnosť $\{f_n(x)\}$ konverguje rovnomerne na $[0,1]$ k identicky nulovej funkcii, nakoľko platí

$$0 \le \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{\cos x^n}{n^2} - 0\right| = \sup_{x\in[0,1]} \frac{|\cos x^n|}{n^2} \le \frac{1}{n^2} \quad \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0$$

(dobre si to premyslite ;)). Náš intuitívny výpočet bol preto korektný.

Všetky vlastnosti rovnomerne konvergentných funkcionálnych postupností zostávajú v platnosti i pre rovnomerne konvergentné funkcionálne rady, ako ukazuje nasledujúci príklad.

Príklad 20
Ukážme, že pre dané $r \in (0,1)$ funkcionálny rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos nx$$

bodovo konverguje na celom $\mathbb{R}$ k spojitému súčtu $s(x)$, a stanovme hodnotu integrálu $\int_0^{2\pi} s(x)\,\mathrm{d}x$.

Riešenie:
Z vlastností trigonometrických funkcií vyplýva, že pre každé $x \in \mathbb{R}$ a pre každý index n platí nerovnosť $|r^n \cos nx| \le r^n$. A keďže číselný geometrický rad $\sum r^n$ konverguje (prečo? :)), podľa Weierstrassovho kritéria rad v zadaní príkladu konverguje rovnomerne na celom $\mathbb{R}$ k svojmu súčtu $s(x)$. Funkcia $s(x)$ je teda definovaná pre každé reálne číslo x. Nakoľko členy $f_n(x) =$

$r^n \cos nx$ sú spojité funkcie na celom $\mathbb{R}$, rovnomerná konvergencia zaručuje i spojitosť funkcie $s(x)$ na $\mathbb{R}$ (všimnime si, že koľko vlastností sme o funkcii $s(x)$ už zistili, hoci vôbec nepoznáme jej explicitný predpis :)). Pre hľadaný integrál platí

$$\int_0^{2\pi} s(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \left[\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos nx\right] \mathrm{d}x.$$

Skutočnosť, že daný funkcionálny rad konverguje rovnomerne na celom $\mathbb{R}$, umožňuje zameniť poradie integrácie a sumácie v poslednom výraze (dobre si to premyslite ;)). Potom máme

$$\int_0^{2\pi} s(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} r^n \cos nx\,\mathrm{d}x.$$

Integrály v poslednej rovnosti vypočítame ľavou-zadnou :) (v prípade ľavákov pravou-zadnou ;)). Samy ukážte, že platí

$$\int_0^{2\pi} r^n \cos nx\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\pi, & n = 0, \\ 0, & n \geq 1. \end{cases}$$

Pre hodnotu integrálu v zadaní príkladu teda dostávame $\int_0^{2\pi} s(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi$.

Pri funkcionálnych postupnostiach a radoch je možná i zámena limitovania a derivovania.

Zámena limity a derivácie

Nech postupnosť (1) bodovo konverguje na otvorenom intervale $\mathcal{I}$ k limitnej funkcii $f(x)$. Nech pre každý index n má funkcia $f_n(x)$ deriváciu na $\mathcal{I}$ a nech postupnosť $\{f_n'(x)\}$ rovnomerne konverguje na intervale $\mathcal{I}$. Potom i funkcia $f(x)$ má deriváciu na $\mathcal{I}$ a platí

$$f'(x) = \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right]' = \underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n'(x)}_{\text{zámena limity a derivácie}}.$$

Príklad 21
Postupnosť funkcií

$$f_n(x) = x^2 + \frac{\sin n\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{n}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

bodovo konverguje na celom $\mathbb{R}$ k limitnej funkcii $f(x) = x^2$ (samy overte :)). Funkcie $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, ako aj $f(x)$ sú zrejme diferencovateľné na $\mathbb{R}$, pričom

$$f_n'(x) = 2x + \cos n\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{pre každé } x \in \mathbb{R} \text{ a každé } n \in \mathbb{N}.$$

Okrem toho postupnosť $\{f_n(x)\}$ konverguje rovnomerne k $f(x)$ na celom $\mathbb{R}$ (samy ukážte :)). Napriek tomu však máme

$$\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right]' = \left[\lim_{n\to\infty}\left(x^2 + \frac{\sin n\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{n}\right)\right]' = \left[x^2\right]' = 2x,$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to\infty}\left(2x + \cos n\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \text{ neexistuje.}$$

Dôvodom je fakt, že postupnosť derivácií $\{f_n'(x)\}$ nekonverguje rovnomerne (dokonca ani bodovo, ako ukazuje posledný výraz) na žiadnom otvorenom intervale v $\mathbb{R}$.

Príklad 22
Funkcionálny rad

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{\sin nx}{n^3}$$

konverguje rovnomerne na intervale $(-\infty,\infty)$. Vyplýva to z Weierstrassovho kritéria (pokúste sa zdovodniť samy :)). Konverguje teda i bodovo všade na $(-\infty,\infty)$. Členy tohto radu majú zrejme deriváciu (podľa premennej x) na celom $(-\infty,\infty)$, pričom odpovedajúci rad derivácií

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}\cdot\frac{\sin nx}{n^3}\right]' = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{\cos nx}{n^2}$$

tiež konverguje rovnomerne na intervale $(-\infty,\infty)$ (opäť podľa Weierstrassa :)). To znamená, že rad v zadaní príkladu možno derivovať člen po člene, t.j., pre každé reálne číslo x platí identita

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{\sin nx}{n^3}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}\cdot\frac{\sin nx}{n^3}\right]' = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{\cos nx}{n^2}.$$

Príklad 23

Na druhej strane, rad funkcií

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin 2^n x}{2^n}$$

konverguje síce rovnomerne na celom $\mathbb{R}$ (samy overte podľa Weiestrassa :)), avšak príslušný rad derivácií

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\sin 2^n x}{2^n}\right]' = \sum_{n=0}^{\infty}\cos 2^n x$$

diverguje pre každú voľbu premennej x. Pre limitu $\lim_{n\to\infty}\cos 2^n x$ totiž platí

$$\lim_{n\to\infty}\cos 2^n x = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ \text{neexistuje}, & x \neq 0, \end{cases}$$

a teda pre každé $x \in \mathbb{R}$ je porušená nutná podmienka konvergencie radu. V tomto prípade preto máme

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin 2^n x}{2^n}\right)' \neq \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\sin 2^n x}{2^n}\right]' \quad \text{pre každé reálne číslo } x.$$

Poznamenajme, že derivácia súčtu radu v zadaní príkladu ani nemusí existovať (z rovnomernej konvergencie vieme iba to, že tento súčet je spojitou funkciou na celom $\mathbb{R}$).

Neriešené príklady

1. Nájdite limitnú funkciu a obor konvergencie daných postupností. V príkladoch a), b), c), d) a g) určte aj typ konvergencie.

a) $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}, \quad x \in [0,1]$

b) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}, \quad x \in \mathbb{R}$

c) $f_n(x) = \sin\frac{x}{n}, \quad x \in \mathbb{R}$

d) $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

e) $f_n(x) = n \cdot \left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right), \quad x \in \mathbb{R}^+$

f) $f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \quad x \in \mathbb{R}$

g) $$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in \left[-1, -\frac{1}{n}\right] \cup \left[\frac{1}{n}, 1\right], \\ n^2x, & x \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right). \end{cases}$$

2. Stanovte obor a typ konvergencie daných funkcionálnych radov.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-n^2x}, \quad x \in \mathbb{R}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^n, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, \quad x \in [-1,1]$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg}\frac{x}{2^n}, \quad x \in \mathbb{R}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} (3-x^2)^n, \quad x \in \mathbb{R}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^n}, \quad x \in \mathbb{R}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}, \quad x \in \mathbb{R}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^4+n^2}, \quad x \in \mathbb{R}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}, \quad x \in \mathbb{R}$

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}, \quad x \in \mathbb{R}_0^+$

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, \quad x \in \mathbb{R}$

m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x^2n^2}}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}$

n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}, \quad x \in \mathbb{R}.$

3. Pomocou Dirichletovho kritéria dokážte, že dané rady konvergujú rovnomerne na uvedených intervaloch k svojim súčtom.

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}, \quad x \in [-r,r], \quad r \in (0,1)$$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \cdot \sin nx}{\sqrt{n+x}}, \quad x \in (-1, \infty)$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad x \in [r, 2\pi - r], \quad r \in (0, \pi).$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+x)}}, \quad x \in [0, \infty).$

Príklad d) sa pokúste vyriešiť i pomocou Abelovho kritéria :).

4. Ukážte, že dané funkcionálne postupnosti nekonvergujú rovnomerne na intervale $[0,1]$, ale napriek tomu platí rovnosť

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] \mathrm{d}x.$$

a) $f_n(x) = nx \cdot (1-x)^n$ b) $f_n(x) = \dfrac{n^2 x}{1 + n^3 x^2}$

c) $f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, \frac{1}{2^n}\right] \cup \left[\frac{1}{2^{n-1}}, 1\right], \\ \frac{1}{x}, & x \in \left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right). \end{cases}$

5. Ukážte, že funkcionálna postupnosť $f_n(x) = nx \cdot \mathrm{e}^{-nx^2}$ síce konverguje bodovo na intervale $[0,1]$ k svojej limitnej funkcii, ale

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1 \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] \mathrm{d}x.$$

Čo je príčinou tohto výsledku? :)

6. Overte, že postupnosť funkcií

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{arctg} x^n}{n}, \quad x \in \mathbb{R}$$

konverguje rovnomerne na celom $\mathbb{R}$ k svojej limitnej funkcii $f(x)$, avšak $f'(1) \neq \lim_{n\to\infty} f_n'(1)$. Toto pozorovanie i zdôvodnite :).

7. Dokážte, že súčet $s(x)$ funkcionálneho radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n(n+1)}$$

je spojitou funkciou na celom $\mathbb{R}$.

8. Nájdite hodnotu určitého integrálu $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)\,\mathrm{d}x$, kde

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \mathrm{e}^{-nx}.$$