Príklady na precvičovanie – aplikácie mocninových radov

Riešené príklady

Príklad 1 (približná hodnota)
Pomocou prvých piatich členov Maclaurinovho rozvoja funkcie $f(x) = \mathrm{e}^x$ stanovme približnú hodnotu čísla $\sqrt{\mathrm{e}}$.

Riešenie:
Výpočet približných hodnôt funkcií je základná aplikácia mocninových radov. Funkcia $f(x) = \mathrm{e}^x$ má Maclaurinov rozvoj

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots ,$$

platný pre každé reálne číslo x. Dosadením $x = 1/2$ dostaneme

$$\sqrt{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n!} \approx \sum_{n=0}^{4} \frac{1}{2^n n!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 \cdot 2} + \frac{1}{2^3 \cdot 6} + \frac{1}{2^4 \cdot 24} \approx 1.65.$$

Nechávame na čitateľa, aby si premyslel, že sa vlastne jedná o aproximáciu hodnoty funkcie $f(x) = \mathrm{e}^x$ jej štvrtým *Maclaurinovým polynómom* :).

Príklad 2 (približná hodnota)
Pomocou prvých dvoch členov vhodného mocninového radu aproximujme hodnotu čísla $\sqrt[5]{245}$.

Riešenie:
Prirodzene skúsime využiť Taylorov rozvoj funkcie $f(x) = \sqrt[5]{1+x}$ v okolí bodu $x_0 = 0$, t.j.,

$$\sqrt[5]{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/5}{n} \cdot x^n = 1 + \binom{1/5}{1} \cdot x + \cdots .$$

Má to však jeden háčik. Uvedený mocninový rad konverguje iba pre $|x| < 1$. V našom prípade máme $245 = 1 + 244$, a teda by sme museli vziať $x = 244 > 1$.

Týmto smerom je cesta zarúbaná :-/. Musíme na to ísť inak. Niektorých matematikov občas pochytí mánia experimentovať s prirodzených číslami a vypočítavať ich rôzne mocniny. Vďaka tomu ľudstvo napríklad vie, že $3^5 = 243$, čiže $245 = 3^5 + 2$:). Potom máme

$$\sqrt[5]{245} = \sqrt[5]{3^5 + 2} = \sqrt[5]{3^5 \cdot \left(1 + \frac{2}{3^5}\right)} = 3 \cdot \sqrt[5]{1 + \frac{2}{3^5}}.$$

Stačí nám teda sa zamerať na výraz $\sqrt[5]{1 + \frac{2}{3^5}}$, pre ktorý už platí $\left|\frac{2}{3^5}\right| < 1$. Dostávame potom vyjadrenie, a následne i hľadaný odhad

$$\sqrt[5]{245} = 3 \cdot \sqrt[5]{1 + \frac{2}{3^5}} = 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/5}{n} \cdot \left(\frac{2}{3^5}\right)^n \approx 3 \cdot \left[1 + \binom{1/5}{1} \cdot \frac{2}{3^5}\right] \approx 3.005.$$

Príklad 3 (približná hodnota)
Určme hodnotu $\ln 2$ s chybou menšou než 10^{-5}.

Riešenie:
Prirodzený nápad je použiť mocninový rozvoj funkcie $f(x) = \ln(1 + x)$, t.j.,

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \cdot (-1)^{n-1}.$$

Tento vzorec platí na intervale $(-1, 1]$, konkrétne pre $x = 1$ máme

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot (-1)^{n-1}.$$

Posledný číselný rad je Leibnizov alternujúci rad. Z teórie číselných radov vieme, že jeho zvyšok R_n po n-tom člene spĺňa $|R_n| < \frac{1}{n+1}$ (samy overte :)). Požadujeme teda, aby $\frac{1}{n+1} < 10^{-5}$, t.j., $n \geq 10^5$. To znamená, že ak chceme číslo $\ln 2$ aproximovať s presnosťou väčšou ako 10^{-5}, musíme v danom číselnom rade sčítať aspoň 100 000 prvých členov!!! Táto cesta výpočtu hodnoty $\ln 2$ teda nie je vôbec výhodná :-/. Omnoho lepšie sa ukazuje použiť mocninový rozvoj

$$\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n + 1},$$

platný pre každé $x \in (-1, 1)$. Nechávame na čitateľa, aby overil, že rovnica $\frac{1+x}{1-x} = 2$ má jediné riešenie $x = \frac{1}{3} \in (-1, 1)$:). Platí teda zaujímavá identita

$$\ln 2 = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1) \cdot 3^{2n+1}} \quad :).$$

Posledný (konvergentný) číselný rad je „d'Alembertovho typu", čo znamená, že pre každý index n platí nerovnosť

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{2}{(2n+3)\cdot 3^{2n+3}}}{\frac{2}{(2n+1)\cdot 3^{2n+1}}} \right| = \underbrace{\frac{2n+1}{2n+3}}_{\text{toto je } <1} \cdot \frac{1}{9} < \underbrace{\frac{1}{9}}_{q} < 1.$$

Zvyšok R_n po n-tom člene potom spĺňa odhad (samy si dobre premyslite :))

$$|R_n| \le |a_n| \cdot \frac{q}{1-q} = \frac{2}{(2n+1) \cdot 3^{2n+1}} \cdot \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{4 \cdot (2n+1) \cdot 3^{2n+1}}.$$

Hľadáme index n spĺňajúci $\frac{1}{4\cdot(2n+1)\cdot 3^{2n+1}} < 10^{-5}$ alebo ekvivalentne

$$(2n+1) \cdot 3^{2n+1} > 25\ 000.$$

Nie je ťažké empiricky zistiť, že $n \ge 4$ (samy overte :)). V tomto prípade teda na odhad hodnoty $\ln 2$ s predpísanou presnosťou stačí sčítať len prvých 5 členov daného radu, konkrétne

$$\ln 2 \approx \sum_{n=0}^{4} \frac{2}{(2n+1) \cdot 3^{2n+1}} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3 \cdot 3^3} + \frac{2}{5 \cdot 3^5} + \frac{2}{7 \cdot 3^7} + \frac{2}{9 \cdot 3^9} \approx 0.6931.$$

Príklad 4 (výpočet limít)
Vypočítajme limitu

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}.$$

Riešenie:
Toto je ďalší typický príklad na praktické použitie Taylorových radov funkcií.

Ihneď vidíme, že v predloženej limite po dosadení $x = 0$ vznikne neurčitý výraz $0/0$. Z Matematickej analýzy I poznáme niekoľko spôsobov, ako v princípe vyriešiť túto nepríjemnú situáciu. Na odstránenie neurčitosti buď vykonáme vhodnú úpravu alebo použijeme veľmi populárne a obľúbené L'Hospitalovo pravidlo :)). Prístup, ktorý použijeme my, spočíva vo vyjadrení limitovaného výrazu v tvare mocninového rozvoja so stredom v limitnom bode, konkrétne v $x_0 = 0$. Nakoľko pre každé $x \in (-1, 1)$ platí

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \cdot x^n = 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1} \cdot x + \binom{\frac{1}{2}}{2} \cdot x^2 + \binom{\frac{1}{2}}{3} \cdot x^3 + \cdots ,$$

$$\sqrt[3]{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{3}}{n} \cdot (-x)^n = 1 - \binom{\frac{1}{3}}{1} \cdot x + \binom{\frac{1}{3}}{2} \cdot x^2 - \binom{\frac{1}{3}}{3} \cdot x^3 + \cdots ,$$

po dosadení do limity v zadaní príkladu máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left[1 + \binom{\frac{1}{2}}{1} \cdot x + \binom{\frac{1}{2}}{2} \cdot x^2 + \binom{\frac{1}{2}}{3} \cdot x^3 + \cdots\right] - \left[1 - \binom{\frac{1}{3}}{1} \cdot x + \binom{\frac{1}{3}}{2} \cdot x^2 - \binom{\frac{1}{3}}{3} \cdot x^3 + \cdots\right]}{x}.$$

Na dostatočne malom okolí nuly obidva mocninové rozvoje konvergujú absolútne a rovnomerne, a preto môžeme ich členy vhodne zoskupovať a sčítavať. Postupne dostávame (detaily nechávame na čitateľa ;))

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left[1 + \binom{\frac{1}{2}}{1} \cdot x + \binom{\frac{1}{2}}{2} \cdot x^2 + \binom{\frac{1}{2}}{3} \cdot x^3 + \cdots\right] - \left[1 - \binom{\frac{1}{3}}{1} \cdot x + \binom{\frac{1}{3}}{2} \cdot x^2 - \binom{\frac{1}{3}}{3} \cdot x^3 + \cdots\right]}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left[\binom{\frac{1}{2}}{1} + \binom{\frac{1}{3}}{1}\right] \cdot x + \left[\binom{\frac{1}{2}}{2} - \binom{\frac{1}{3}}{2}\right] \cdot x^2 + \left[\binom{\frac{1}{2}}{3} + \binom{\frac{1}{3}}{3}\right] \cdot x^3 + \cdots}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left\{ \binom{\frac{1}{2}}{1} + \binom{\frac{1}{3}}{1} + \overbrace{\left[\binom{\frac{1}{2}}{2} - \binom{\frac{1}{3}}{2}\right] \cdot x + \left[\binom{\frac{1}{2}}{3} + \binom{\frac{1}{3}}{3}\right] \cdot x^2 + \underbrace{\cdots}_{\text{členy s } x^3 \text{ a viac}}}^{\text{toto ide do nuly pre } x\to 0} \right\}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left\{ \binom{\frac{1}{2}}{1} + \binom{\frac{1}{3}}{1} \right\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

Príklad 5 (výpočet limít)
Stanovme limitu

$$\lim_{x\to\infty}\left[x - x^2\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right].$$

Riešenie:
Postupujeme v rovnakom duchu ako v predchádzajúcom príklade. Potrebujeme nájsť nejaký mocninový rozvoj výrazu $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ na *okolí nekonečna.* Z teórie Taylorových radov vieme, že platí

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots$$

pre každé $t \in (-1,1)$. Pomocou substúcie $x = 1/t$ získame rozvoj

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\cdot x^2} + \frac{1}{3\cdot x^3} - \frac{1}{4\cdot x^4} + \cdots$$

platný pre každé reálne číslo x s $|x| > 1$ (samy si dobre premyslite :)). Dosadením do limity v zadaní príkladu postupne dostaneme (po úpravách)

$$\lim_{x\to\infty}\left\{x - x^2\cdot\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2\cdot x^2} + \frac{1}{3\cdot x^3} - \frac{1}{4\cdot x^4} + \cdots\right]\right\}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{2} - \underbrace{\frac{1}{3\cdot x} + \frac{1}{4\cdot x^2} + \cdots}_{\text{toto ide do nuly pre } x\to\infty}\right\} = \frac{1}{2}.$$

Príklad 5 (výpočet určitých integrálov)
Vypočítajme určitý integrál

$$\int_0^{1/2}\frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$

s presnosťou väčšou než 10^{-4}.

Riešenie:
Stratégia riešenia tohto príkladu je nasledujúca. Podintegrálny výraz vyjadríme v tvare vhodného mocninového rozvoja, ktorý následne integrujeme člen po člene. Musíme však dať pozor na to, aby predpísaný interval integrácie bol podmnožinou oboru konvergencie daného mocninového radu. Nie je ťažké overiť, že funkciu $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$ možno chápať ako súčet nekonečného geometrického radu s kvocientom $q = -x^4$ a s prvým členom 1, konkrétne

$$\frac{1}{1+x^4} = 1 - x^4 + x^8 - x^{12} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^4)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot x^{4n}.$$

Interval (a zároveň i obor) konvergencie tohto rozvoja je $(-1, 1)$ (samy si premyslite :)), preto je možné uvedenú sumu smelo integrovať v daných medziach člen po člene (i toto si samy zdôvodnite :)). Postupne teda dostávame

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot x^{4n}\right]\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^{1/2}(-1)^n \cdot x^{4n}\,\mathrm{d}x\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \left[\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right]_0^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4n+1)\cdot 2^{4n+1}}.$$

Hodnotu predloženého určitého integrálu sme vyjadrili v tvare nekonečného číselného radu. Nakoľko sa jedná o konvergentný rad (prečo? :)) spĺňajúci predpoklady Leibnizovho kritéria (samy overte :)), pre jeho zvyšok R_n po n-tom člene (t.j., pre chybu, akej sa dopúšťame, keď presnú hodnotu súčtu aproximujeme n-tým čiastočným súčtom) máme

$$|R_n| < \frac{1}{(4n+5)\cdot 2^{4n+5}}.$$

Chceme, aby platilo $\frac{1}{(4n+5)\cdot 2^{4n+5}} < 10^{-4}$ alebo ekvivalentne $(4n+5)\cdot 2^{4n} > 312.5$. Skusmo zistíme, že tejto nerovnosti vyhovuje každý index $n \geq 2$ (samy sa presvedčte ;)). Preto pre približnú hodnotu určitého integrálu v zadaní príkladu dostávame

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x \approx \sum_{n=0}^{2}\frac{(-1)^n}{(4n+1)\cdot 2^{4n+1}}$$

$$= \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{5\cdot 2^5} + \frac{1}{9\cdot 2^9} \approx 0.49397.$$

Poznamenajme, že tento integrál je možné stanoviť i priamo, nakoľko platí

$$\int \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot\ln\left|\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right| + \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} + \operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

(pokúste sa samy dokázať ;)). Pomocou Newtonovej–Leibnizovej formuly pre presnú hodnotu predloženého integrálu potom máme

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot\ln\left|\frac{5+2\sqrt{2}}{5-2\sqrt{2}}\right| + \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{2}}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right) \approx 0.49396.$$

Príklad 6 (určenie primitívnej funkcie)
Nájdime neurčitý integrál k funkcii $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ (na $\mathbb{R}$). Pomocou tohto výsledku stanovme obsah oblasti pod grafom funkcie $f(x)$ na intervale $[0,1]$ s chybou menšou než 10^{-3}.

Riešenie:
Funkcia $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ je zrejme spojitá na $\mathbb{R}$, preto má primitívnu funkciu $F(x)$ definovanú na celej reálnej osi, konkrétne platí

$$F(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{pre každé } x \in (-\infty,\infty).$$

Posledný integrál sa však nedá vyjadriť v uzavretom tvare pomocou elementárnych funkcií (funkcia $f(x)$ s touto vlastnosťou sa nazýva tzv. *vyššia transcendentná funkcia*). Dá sa však vyjadriť ako súčet istého mocninového radu. Pre každé reálne číslo t totiž máme

$$\mathrm{e}^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot t^{2n}.$$

Posledný mocninový rad konverguje absolútne a lokálne rovnomerne na celom $\mathbb{R}$. Pre funkciu $F(x)$ teda platí

$$F(x) = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot t^{2n}\right]\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^x \frac{(-1)^n}{n!}\cdot t^{2n}\,\mathrm{d}t\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot n!}\cdot x^{2n+1}, \qquad x \in (-\infty,\infty).$$

Nechávame na čitateľa, aby si premyslel, že získaný mocninový rad konverguje opäť absolútne a lokálne rovnomerne na celej reálnej osi :). Neurčitý integrál z funkcie $f(x)$, ako množina všetkých k nej primitívnych funkcií, má potom tvar

$$I = \left\{ C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot n!} \cdot x^{2n+1}, \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Z Matematickej analýzy I vieme, že pre hľadaný obsah oblasti pod grafom funkcie $f(x)$ platí $S = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. V kombinácii s vyššie odvodenými skutočnosťami napokon dostávame

$$S = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot n!}.$$

Posledný konvergentný číselný rad alternuje a spĺňa predpoklady Leibnizovho kritéria (samy overte :)). Chybu aproximácie presnej hodnoty jeho súčtu n-tým čiastočným potom možno odhadnúť

$$|R_n| < \frac{1}{(2n+3)\cdot(n+1)!} < 10^{-3}.$$

Platí teda $(2n+3)\cdot(n+1)! > 1\ 000$, z čoho dostaneme $n \geq 4$ (samy overte :)). Potom

$$S \approx \sum_{n=0}^{4} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot n!} = 1 - \frac{1}{3\cdot 1!} + \frac{1}{5\cdot 2!} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{9\cdot 4!} \approx 0.74753.$$

Príklad 7 (riešenie diferenciálnych rovníc)
Nájdime všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice

$$y'' + kxy = 0, \quad k \text{ je reálna konštanta.}$$

Riešenie:
Jedná sa o – na prvý pohľad – jednoduchú lineárnu diferenciálnu rovnicu druhého rádu. Háčik je v tom, že táto rovnica nemá konštantné koeficienty. A čo je na tom najtrápnejšie, nevieme ju ani presne vyriešiť :((. V týchto ťažkých životných chvíľach nám pomôžu práve Maclaurinove rozvoje :). Nechávame

na čitateľa, aby si premyslel, že z tvaru rovnice v zadaní príkladu vyplýva, že každé jej riešenie $y(x)$ má na celom $\mathbb{R}$ definované derivácie všetkých rádov ;). To ale potom znamená, že každé takéto riešenie je súčtom nejakého mocninového rozvoja v okolí nuly, t.j., funkciu $y(x)$ možno pre každé reálne číslo x predpokladať v tvare

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

kde a_i, $i \in \mathbb{N}_0$, sú reálne konštanty nezávislé na x (i toto si samy veľmi dobre premyslite :)). Všeobecné riešenie $y(x)$ predloženej rovnice budeme teda hľadať v tvare súčtu mocninového radu, pričom jediné, čo nám chýba ku šťastiu, je stanoviť neznáme koeficienty a_i tohto rozvoja. Postup je jednoduchý. Predpokladané vyjadrenie funkcie $y(x)$ dosadíme do danej rovnice a porovnaním jej strán (metódu neurčitých koeficientov) určíme hľadané koeficienty. Daný mocninový rozvoj pritom derivujeme člen po člene (prečo je to možné? :)). Tak s chuťou do toho :).

$$y' = a_1 + 2 \cdot a_2 x + 3 \cdot a_3 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \cdot (n+1) \cdot x^n,$$

$$y'' = 2 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 x + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot x^n.$$

Po dosadení do rovnice v zadaní príkladu dostávame

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot x^n + kx \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = 0.$$

Táto rovnosť musí platiť identicky, t.j., pre každé reálne číslo x. Porovnaním koeficientov pri mocninách x na oboch stranách identity máme

$$x^0 \ : \ 2a_2 = 0 \implies a_2 = 0,$$

$$x^n,\, n \in \mathbb{N} \ : \ a_{n+2}(n+2)(n+1) + k a_{n-1} = 0.$$

Z poslednej rovnice vyplýva pre koeficienty a_i rekurentná závislosť

$$a_{n+2} = -\frac{k}{(n+2)(n+1)} \cdot a_{n-1}, \quad \text{resp.} \quad a_{n+3} = -\frac{k}{(n+3)(n+2)} \cdot a_n$$

pre každý index n (v poslednom výraze sme vykonali posun indexu $n \mapsto n+1$). Vidíme teda, že na úplné určenie všetkých neznámych koeficientov a_i stačí poznať hodnoty a_0, a_1 a a_2 (samy si premyslite, že odvodená rekurentná formula pomocou a_0 jednoznačne určuje všetky koeficienty s indexami $3m$, pomocou a_1 všetky koeficienty s indexami $3m+1$ a pomocou a_2 všetky koeficienty s indexami $3m+2$, kde $m \in \mathbb{N}$:)). Napríklad pre pevne dané a_0 postupne dostávame

$$a_3 = -\frac{k}{3 \cdot 2} \cdot a_0,$$

$$a_6 = -\frac{k}{6 \cdot 5} \cdot a_3 = \frac{+k^2}{(3 \cdot 6) \cdot (2 \cdot 5)} \cdot a_0 = \frac{+k^2}{3^2 \cdot (1 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 5)} \cdot a_0,$$

$$a_9 = -\frac{k}{9 \cdot 8} \cdot a_6 = \frac{-k^3}{(3 \cdot 6 \cdot 9) \cdot (2 \cdot 5 \cdot 8)} \cdot a_0 = \frac{-k^3}{3^3 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 5 \cdot 8)} \cdot a_0,$$

$$\vdots$$

$$a_{3m} = -\frac{k}{3m \cdot (3m-1)} \cdot a_{3m-3} = \frac{(-1)^m \cdot k^m}{3^m \cdot m! \cdot [2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3m-1)]} \cdot a_0,$$

kde $m \in \mathbb{N}$ (samy overte správnosť poslednej formuly ;)). Podobne, pre danú voľbu koeficientu a_1 máme

$$a_4 = -\frac{k}{4 \cdot 3} \cdot a_1,$$

$$a_7 = -\frac{k}{7 \cdot 6} \cdot a_4 = \frac{+k^2}{(3 \cdot 6) \cdot (4 \cdot 7)} \cdot a_1 = \frac{+k^2}{3^2 \cdot (1 \cdot 2) \cdot (4 \cdot 7)} \cdot a_1,$$

$$a_{10} = -\frac{k}{10 \cdot 9} \cdot a_7 = \frac{-k^3}{(3 \cdot 6 \cdot 9) \cdot (4 \cdot 7 \cdot 10)} \cdot a_1 = \frac{-k^3}{3^3 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 7 \cdot 10)} \cdot a_1,$$

$$\vdots$$

$$a_{3m+1} = -\frac{k}{(3m+1) \cdot 3m} \cdot a_{3m-2} = \frac{(-1)^m \cdot k^m}{3^m \cdot m! \cdot [4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots (3m+1)]} \cdot a_1,$$

pre $m \in \mathbb{N}$ (i teraz samy overte správnosť poslednej formuly ;)). Napokon, nakoľko $a_2 = 0$, platí $a_{3m+2} = 0$ pre každé $m \in \mathbb{N}$ (samy si premyslite :)).

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice v zadaní príkladu má teda tvar

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} a_{3m} \cdot x^{3m}}_{\text{indexy } 3m} + \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} a_{3m+1} \cdot x^{3m+1}}_{\text{indexy } 3m+1} + \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} a_{3m+2} \cdot x^{3m+2}}_{\text{indexy } 3m+2}.$$

Po dosadení vyššie získaných výsledkov dostaneme

$$\begin{aligned} y &= a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m k^m}{3^m m! \cdot [2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3m-1)]} \cdot a_0 \cdot x^{3m} \\ &+ a_1 x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m k^m}{3^m m! \cdot [4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots (3m+1)]} \cdot a_1 \cdot x^{3m+1} \\ &= a_0 \cdot \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m k^m \cdot x^{3m}}{3^m m! \, [2 \cdot 5 \cdots (3m-1)]} \right] + a_1 \cdot \left[x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m k^m \cdot x^{3m+1}}{3^m m! \, [4 \cdot 7 \cdots (3m+1)]} \right] \end{aligned}$$

(jednotlivé členy daného mocninového radu môžeme ľubovoľne združovať a sčítavať, prečo? :)). Poznamenajme, že finálna formula je v plnom súlade s poznatkami o štruktúre všeobecného riešenia lineárnej diferenciálnej rovnice druhého rádu (lineárna kombinácia dvoch lineárne nezávislých riešení).

Príklad 8 (riešenie diferenciálnych rovníc)
Stanovme partikulárne riešenie diferenciálnej rovnice

$$xy^{(4)} + 4y^{(3)} - xy - 1 = 0,$$

spĺňajúce začiatočné podmienky

$$y(1) = -1, \quad y'(1) = 1, \quad y''(1) = -2, \quad y'''(1) = 6.$$

Riešenie:
Jedná sa opäť o lineárnu diferenciálnu rovnicu (štvrtého rádu), preto postupujeme podobne ako v predchádzajúcom príklade. Keďže koeficienty sú spojité funkcie premennej x, predložená začiatočná úloha má práve jedno riešenie $y(x)$ definované na nejakom okolí bodu $x_0 = 1$ (samy si premyslite :)). Funkciu y môžeme predpokladať v tvare súčtu mocninového radu so stredom

v bode $x_0 = 1$. Tento rad je potom Taylorovým radom funkcie y so stredom v 1 (prečo? :)). Máme teda

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(1)}{n!} \cdot (x-1)^n$$

pre každé x z nejakého okolia bodu 1. Na úplné určenie partikulárneho riešenia y teda potrebujeme vyčísliť derivácie všetkých rádov funkcie y v bode 1. Hodnotu $y(1)$ a prvé tri derivácie $y'(1)$, $y''(1)$ a $y'''(1)$ máme predpísané pomocou začiatočných podmienok. Ďalšie derivácie funkcie y v bode 1 budeme rekurentne počítať pomocou samotnej rovnice. Podľa zadania totiž platí

$$y^{(4)} = \frac{1 + xy - 4y^{(3)}}{x} \quad \text{pre každé } x \neq 0.$$

Využijúc začiatočné podmienky v zadaní príkladu potom dostaneme

$$y^{(4)}(1) = \frac{1 + 1 \cdot y(1) - 4 \cdot y^{(3)}(1)}{1} = \frac{1 + 1 \cdot (-1) - 4 \cdot 6}{1} = -24.$$

Ďalej, obmedziac sa na dostatočne malé okolie bodu 1 (neobsahujúce nulu) pre piatu deriváciu $y^{(5)}$ vo všeobecnom bode x z tohto okolia máme (detaily necháme na čitateľa :))

$$y^{(5)} = \left(y^{(4)}\right)' = \left(\frac{1 + xy - 4y^{(3)}}{x}\right)' = -y^{(4)} \cdot \frac{5}{x} + y^{(1)} + \frac{y}{x}.$$

Následne pre hodnotu $y^{(5)}(1)$ platí

$$y^{(5)}(1) = -y^{(4)}(1) \cdot \frac{5}{1} + y^{(1)}(1) + \frac{y(1)}{1} = 24 \cdot 5 + 1 - 1 = 120.$$

Podobným spôsobom odvodíme

$$y^{(6)} = \left(y^{(5)}\right)' = \left(-y^{(4)} \cdot \frac{5}{x} + y^{(1)} + \frac{y}{x}\right)' = -y^{(5)} \cdot \frac{6}{x} + y^{(2)} + y^{(1)} \cdot \frac{2}{x},$$

$$y^{(6)}(1) = -720 = -6! \quad :),$$

$$y^{(7)} = \left(y^{(6)}\right)' = \left(-y^{(5)} \cdot \frac{6}{x} + y^{(2)} + y^{(1)} \cdot \frac{2}{x}\right)' = -y^{(6)} \cdot \frac{7}{x} + y^{(3)} + y^{(2)} \cdot \frac{3}{x},$$

$$y^{(7)}(1) = 5\ 040 = 7! \quad :).$$

Takto môžeme postupne vypočítavať i hodnoty ďalších derivácií riešenia $y(x)$ v bode 1. Dá sa ukázať, že pre každé prirodzené $n \geq 5$ platia identity

$$y^{(n)} = -y^{(n-1)} \cdot \frac{n}{x} + y^{(n-4)} + y^{(n-5)} \cdot \frac{n-4}{x},$$

$$y^{(n)}(1) = (-1)^{n+1} \cdot n!$$

(druhá z identít platí dokonca pre každé $n \in \mathbb{N}_0$). Dosadením poslednej rovnosti do vyššie uvedeného Taylorovho radu funkcie $y(x)$ dostaneme

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(1)}{n!} \cdot (x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot (x-1)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \left[-(x-1)\right]^n .$$

Posledný rad je však geometrický s oborom konvergencie $(0, 2)$ a so súčtom $-1/x$ (samy overte :)). To znamená, že hľadaným jediným riešením predloženej začiatočnej úlohy je funkcia $y = -1/x$, ktorá danú rovnicu rieši aspoň na intervale $(0, 2)$. Priamym dosadením sa môžeme ľahko presvedčiť, že táto funkcia je skutočne riešením uvedenej diferenciálnej rovnice a spĺňa predpísané začiatočné podmienky. Funkcia $y = -1/x$ sa však ako riešenie dá rozšíriť na väčší interval než $(0, 2)$, konkrétne na celú kladnú reálnu polos $(0, \infty)$.