Príklady na precvičovanie – nevlastné viacrozmerné integrály

Podobne ako v analýze funkcií jednej reálnej premennej i v integrálnom počte funkcií viac premenných je prirodzenou nadstavbou štandardnej teórie problematika *nevlastných* viacrozmerných integrálov. Klasická definícia dvojného integrálu z funkcie $f(x,y)$ na neprázdnej množine $\Omega \in \mathbb{R}^2$ vyžadovala dva dôležité predpoklady:

- Množina Ω je *merateľná*, a teda nutne *ohraničená* v $\mathbb{R}^2$.
- Funkcia $f(x,y)$ je *ohraničená* na množine Ω.

Mnohokrát je však žiadúce nejakým rozumným spôsobom zadefinovať dvojný integrál $\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ aj v prípade, keď aspoň jeden z týchto predpokladov je porušený. Rozlišujeme dve základné situácie.

Nevlastný dvojný integrál – neohraničený integračný obor

Nech teda množina $\Omega \in \mathbb{R}^2$ je *neohraničená* a nech funkcia $f(x,y)$ je definovaná na celom Ω a

$$\text{integrovateľná na každej merateľnej podmnožine } M \subseteq \Omega. \tag{1}$$

Uvažujme nejakú postupnosť merateľných podmnožín $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ množiny Ω, t.j., $M_n \subseteq \Omega$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. Povieme, že postupnosť $\{M_n\}$ *vyčerpáva* množinu Ω, ak pre každý (otvorený) kruh K so stredom v bode $[0,0]$ existuje index n_K taký, že pre každý index $n \geq n_K$ platí inklúzia $\Omega \cap K \subseteq M_n$. Premyslime si, čo vlastne hovorí táto definícia :). Je zrejmé, že čím väčší polomer bude mať kruh K, tým viac bodov z množiny Ω sa bude nachádzať vo vnútri K (to je vyjadrené prienikom $\Omega \cap K$ a zaručené neohraničenosťou množiny Ω). Vždy však bude existovať dostatočne veľký index n_K tak, že všetky tieto body množiny Ω budú obsiahnuté v každej množine M_n s indexom n väčším (nanajvyš rovným) než n_K (to je reprezentované inklúziou $\Omega \cap K \subseteq M_n$). To znamená, že postupným zakresľovaním množín M_n budeme čoraz viac „vyčerpávať“ množinu Ω :) (pokúste sa samy ilustrovať tieto skutočnosti pomocou vhodného obrázku ;)).

Nech teda $\{M_n\}$ je nejaká postupnosť merateľných podmnožín, ktorá vyčerpáva množinu Ω. Uvažujme číselnú postupnosť $\{I_n\}$ definovanú

$$I_n := \iint_{M_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad n \in \mathbb{N}$$

(číslo I_n je pre každé $n \in \mathbb{N}$ definované korektne, nakoľko podľa predpokladu (1) je funkcia $f(x, y)$ integrovateľná na merateľnej množine M_n). Potom hovoríme, že nevlastný integrál $\iint_\Omega f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ *konverguje* (alebo tiež *existuje*), ak pre *každú* takúto postupnosť $\{M_n\}$ existuje *konečná* limita $I := \lim_{n\to\infty} I_n$, pričom táto limita *nezávisí* na výbere postupnosti $\{M_n\}$. V tomto prípade číslo I nazývame *hodnotou* nevlastného integrálu $\iint_\Omega f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ a píšeme

$$\iint_\Omega f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty} I_n = I.$$

V opačnom prípade, t.j., ak aspoň pre jednu postupnosť $\{M_n\}$ je limita $\lim_{n\to\infty} I_n$ nevlastná, resp. vôbec neexistuje, alebo ak hodnota $\lim_{n\to\infty} I_n$ závisí na výbere postupnosti $\{M_n\}$, hovoríme, že daný nevlastný integrál $\iint_\Omega f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ *diverguje* (alebo aj *neexistuje*). Vidíme teda, že na to, aby sme ukázali konvergenciu nevlastného integrálu $\iint_\Omega f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ je vo všeobecnosti nutné preveriť *všetky* postupnosti merateľných množín $\{M_n\}$, ktoré vyčerpávajú množinu Ω :-/. Avšak v prípade, keď funkcia $f(x, y)$ *nemení znamienko* na Ω, je situácia veselšia :). Konkrétne, dá sa dokázať, že ak platí $f(x, y) \geq 0$, resp. $f(x, y) \leq 0$, pre každý bod $[x, y] \in \Omega$, potom nevlastný integrál $\iint_\Omega f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ konverguje práve vtedy, keď *aspoň pre jednu* uvedenú postupnosť $\{M_n\}$ existuje konečná limita $I = \lim_{n\to\infty} I_n$. Toto pozorovanie má význam najmä pri praktickom výpočte neurčitých integrálov.

Nevlastný dvojný integrál – neohraničená funkcia

Budeme sa zaoberať najjednoduchšou situáciou – množina Ω je ohraničená a funkcia $f(x, y)$ má v $\overline{\Omega}$ (uzáver množiny Ω v $\mathbb{R}^2$) práve jeden *singulárny bod* A. To znamená, že pre každé okolie $\mathcal{O}(A)$ bodu A platí, že funkcia $f(x, y)$ nie je ohraničená na množine $\Omega \cap \mathcal{O}(A)$. Ďalej budeme predpokladať, že funkcia $f(x, y)$ je

$$\begin{gathered}\text{integrovateľná na } \Omega \setminus M \text{ pre každú merateľnú množinu } M,\\ \text{ktorá vo svojom vnútri obsahuje bod } A.\end{gathered} \tag{2}$$

Uvažujme nejakú postupnosť merateľných množín $\{M_n\}$. Hovoríme, že postupnosť $\{M_n\}$ sa *zmršťuje do bodu* A, ak A je vnútorným bodom každej z množín M_n a postupnosť priemerov $d(M_n)$ konverguje do nuly. Nechávame na čitateľa, aby si sám premyslel (napríklad i pomocou vhodného obrázku), že uvedené pomenovanie skutočne vystihuje túto definíciu :). Množiny

M_n sa budú s rastúcim indexom n neobmedzene čoraz viac sťahovať okolo bodu A ako lačné vnútra smrteľných slučiek :). Nevlastný dvojný integrál $\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ potom definujeme v podobnom duchu ako v prípade neohraničeného integračného oboru. Pre nejakú postupnosť merateľných množín $\{M_n\}$, ktorá sa zmršťuje do bodu A, zostrojíme číselnú postupnosť (vlastných) dvojných integrálov

$$I_n := \iint_{\Omega\setminus M_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nevlastný integrál $\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ *konverguje* (*existuje*), ak pre *každú* uvedenú postupnosť $\{M_n\}$ existuje *konečná* limita $I := \lim_{n\to\infty} I_n$, ktorá *nezávisí* na výbere postupnosti $\{M_n\}$. V tomto prípade píšeme

$$\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty} I_n = I.$$

Inak hovoríme, že nevlastný integrál *diverguje*, resp. *neexistuje*. Obzvlášť, ak je funkcia $f(x,y)$ *nemení znamienko* na množine $\Omega \setminus \{A\}$, stačí vyšetriť – podobne ako v prípade neohraničeného integračného oboru – len *jednu* postupnosť $\{M_n\}$, ktorá sa zmršťuje do bodu A.

Pre obidva typy vyššie definovaných nevlastných integrálov je nutné poznamenať jednu prekvapujúcu a na prvý pohľad možno paradoxnú skutočnosť. Podobne ako pre klasický jednorozmerný nevlastný integrál, zavedený v Matematickej analýze I, tak i pre viacrozmerné nevlastné integrály definujeme ich *absolútnu konvergenciu*. Presnejšie, nevlastný dvojný integrál $\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ konverguje absolútne, ak konverguje nevlastný integrál

$$\iint_\Omega |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Nie je nič nové pod slnkom, že z absolútnej konvergencie vyplýva „štandardná“ konvergencia, t.j., platí implikácia

$$\iint_\Omega |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{konverguje} \quad \Longrightarrow \quad \iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{konverguje.}$$

Omnoho prekvapivejšia je však skutočnosť, že z vyššie uvedených definícií nevlastných integrálov nutne vyplýva i platnosť *opačnej* implikácie. Inak povedané, v tomto prípade platí *ekvivalencia*

$$\iint_\Omega |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{konverguje} \quad \Longleftrightarrow \quad \iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{konverguje.}$$

Tento výsledok platí dokonca i pre jednorozmerné nevlastné integrály. V Matematickej analýze sme sa však stretli s nevlastnými integrálmi, ktoré boli konvergentné, ale neboli absolútne konvergentné. Napríklad

$$\text{nevlastný integrál } \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \text{ konverguje,}$$

$$\text{ale nevlastný integrál } \int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x \text{ diverguje}$$

(samy sa pokúste ukázať :)). Aká je teda pravda? :) Kľúčom k tejto zdanlivej záhade je pozorovanie, že ak aplikujeme vyššie uvedené definície nevlastných integrálov na jednorozmerný prípad, nedostaneme klasické definície nevlastných integrálov, predstavené v Matematickej analýze I, ale omnoho *všeobecnejšie* definície. Podľa tejto novej definície obidva nevlastné integrály

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$$

divergujú, a teda nenastáva nijaký spor :). Nechávame na čitateľa, aby si pripomenul klasické definície nevlastných integrálov z Matematickej analýzy I a pozorne ich porovnal s novými definíciami ;).

Riešené príklady

Príklad 1

Vypočítajme nevlastný dvojný integrál

$$I = \iint_\Omega xy\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde množina $\Omega = [0,\infty) \times [0,\infty)$.

Riešenie:

Funkcia $f(x,y) = xy\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ je spojitá na množine Ω a ohraničená na každej ohraničenej podmnožine v Ω (samy overte :)). Preto je splnený predpoklad (1), t.j., $f(x,y)$ je integrovateľná na každej merateľnej podmnožine v Ω (i toto si samy premyslite ;)). Keďže naviac je funkcia $f(x,y)$ nezáporná na oblasti Ω, stačí podľa úvodných poznámok preveriť len jednu postupnosť merateľných množín $\{M_n\}$, ktorá vyčerpáva množinu Ω. Uvažujme systém množín $M_n \subseteq \Omega$ tvaru

$$M_n := [0, n] \times [0, n], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Merateľnosť každej z podmnožín M_n je zrejmá (samy overte :)). Ukážeme, že postupnosť $\{M_n\}$ vyčerpáva množinu Ω. Pre dané $R > 0$ uvažujme otvorený kruh K so stredom v bode $[0, 0]$ a s polomerom R a položme $n_K := \lfloor R \rfloor + 1$ (výraz $\lfloor R \rfloor$ značí celú časť reálneho čísla R, t.j., najväčšie celé číslo nepresahujúce R; v našom prípade je n_K prirodzené číslo ostro väčšie než R :)). Potom platí $\Omega \cap K \subseteq M_n$ pre každé $n \geq n_K$ (samy sa presvedčte pomocou vhodného nákresu ;)). Postupnosť $\{M_n\}$ teda podľa definície v úvode skutočne vyčerpáva množinu Ω. Pomocou Fubiniho vety postupne máme

$$I_n = \iint_{M_n} xy\, \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^n \left[\int_0^n xy\, \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y$$

$$= \left(\int_0^n x\, \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x \right) \left(\int_0^n y\, \mathrm{e}^{-y^2} \mathrm{d}y \right) = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2} \right]_0^n \left[-\frac{\mathrm{e}^{-y^2}}{2} \right]_0^n = \frac{\left(1 - \mathrm{e}^{-n^2}\right)^2}{4}$$

pre každé $n \in \mathbb{N}$ (samy overte detaily výpočtu :)). Následne platí

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 - \mathrm{e}^{-n^2}\right)^2}{4} = \frac{1}{4}.$$

Teda nevlastný dvojný integrál v zadaní príkladu konverguje s hodnotou

$$I = \iint_{\Omega} xy\, \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{4}.$$

Príklad 2

Stanovme hodnotu nevlastného dvojného integrálu

$$I = \iint_{\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+} \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Riešenie:
Postupujeme analogicky ako v predchádzajúcom príklade. V tomto prípade opäť množina $\Omega = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ = [0, \infty) \times [0, \infty)$ a funkcia $f(x, y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ je nezáporná a spojitá na Ω. Preto je $f(x, y)$ integrovateľná na každej merateľnej podmnožine $M \subseteq \Omega$ (samy overte :)). Budeme teraz uvažovať podmnožiny M_n tvaru

$$M_n := \{x^2 + y^2 = n^2, \quad x \geq 0,\ y \geq 0\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

t.j., uzavreté štrťkruhy v prvom kvadrante so stredmi v bode $[0, 0]$ a s polomermi n, kde $n \in \mathbb{N}$. Nechávame na čitateľa, aby si premyslel, že každá z množín M_n je merateľná a že postupnosť $\{M_n\}$ vyčerpáva množinu Ω :). Ďalej určíme pre každé $n \in \mathbb{N}$ dvojný integrál

$$I_n = \iint_{M_n} \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Na jeho výpočet využijeme transformáciu do polárnych súradníc $x = \rho \cos\varphi$ a $y = \rho \sin\varphi$. Postupne dostávame

$$I_n = \left| \begin{array}{c} x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \\ \text{jakobián } J = \rho, \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/2, \quad 0 \leq \rho \leq n \end{array} \right| \overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^n \rho\, \mathrm{e}^{-\rho^2} \mathrm{d}\rho \right] \mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{\mathrm{e}^{-\rho^2}}{2} \right]_0^n \mathrm{d}\varphi = \left(\frac{1 - \mathrm{e}^{-n^2}}{2} \right) \cdot \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{4} \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-n^2}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

(samy overte jednotlivé kroky ;)). Keďže platí

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{4} \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-n^2}\right) = \frac{\pi}{4},$$

nevlastný integrál v zadaní príkladu konverguje a má hodnotu

$$I = \iint_{\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+} \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi}{4}.$$

Príklad 3
Overme existenciu tzv. *Poissonovho integrálu*

$$I = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t.$$

Ďalej dokážme platnosť (Fubiniho) identity

$$\iint_{\mathbb{R}_0^+\times\mathbb{R}_0^+} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right]^2 = I^2. \tag{3}$$

S jej pomocou potom určme hodnotu Poissonovho integrálu I.

Riešenie:
Metódami Matematickej analýzy I sa dá ukázať platnosť nerovnosti

$$\mathrm{e}^t \geq 1 + t$$

pre každé nezáporné reálne číslo t (pokúste sa samy dokázať :)). Následne, dostaneme nerovnosti

$$\mathrm{e}^{t^2} \geq 1 + t^2 \quad \Longrightarrow \quad 0 < \mathrm{e}^{-t^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \quad \text{pre každé } t \in \mathbb{R}$$

(samy si pozorne premyslite ;)). A keďže nevlastný integrál

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = [\operatorname{arctg} t]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$

konverguje, podľa porovnávacieho kritéria konverguje i nevlastný integrál

$$I = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$

(samy overte na základe poznatkov z Matematickej analýzy I :)). Tým sme overili existenciu Poissonovho integrálu I. Okrem toho z uvedenej analýzy vyplýva i odhad $0 < I \leq \frac{\pi}{2}$:). Dokážeme ďalej platnosť rovnosti (3). V Príklade 2 sme ukázali konvergenciu a určili hodnotu nevlastného dvojného integrálu na ľavej strane formuly (3). Podľa definície v úvode dokumentu to znamená, že pre *každú* postupnosť merateľných množín $\{M_n\}$, ktorá vyčerpáva množinu $\Omega := \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$, platí

$$\iint_{\mathbb{R}_0^+\times\mathbb{R}_0^+} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty} \iint_{M_n} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(samy si overte :)). Uvažujme postupnosť $\{M_n\}$ z Príkladu 1. Potom máme

$$\iint_{\mathbb{R}_0^+\times\mathbb{R}_0^+} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \overset{\text{Fubini}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(\int_0^n \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(\int_0^n \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x \right) \cdot \left(\int_0^n \mathrm{e}^{-y^2} \mathrm{d}y \right) \right]$$

(samy si pozorne premyslite jednotlivé argumenty a kroky ;)). Na druhej strane, z konvergencie Poissonovho integrálu I vieme, že

$$I = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^n \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t \right),$$

t.j., uvedená limita existuje a je konečná. Kombináciou posledných dvoch rovností teda dostaneme

$$\iint_{\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+} \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left[\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^n \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x \right) \right] \cdot \left[\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^n \mathrm{e}^{-y^2} \mathrm{d}y \right) \right]$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^n \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t \right) \right]^2 = \left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t \right]^2 = I^2,$$

čo potvrdzuje platnosť formuly (3) (premenovaním integračných premenných x, y na t sa hodnota určitého integrálu nemení ;)). Napokon, využitím výsledku z Príkladu 2 odvodíme

$$I = \sqrt{\iint_{\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+} \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Platí teda takáto pekná identita

$$I = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad :).$$

Príklad 4

Dokážme konvergenciu tzv. *Fresnelových integrálov*

$$I = \int_0^\infty \cos t^2 \,\mathrm{d}t, \quad J = \int_0^\infty \sin t^2 \,\mathrm{d}t.$$

Riešenie:

Dokážeme konvergenciu nevlastného integrálu $I = \int_0^\infty \cos t^2 \,\mathrm{d}t$. Daný integrál môžeme *intuitívne* vyjadriť ako súčet

$$\int_0^\infty \cos t^2 \,\mathrm{d}t \overset{???}{=} \int_0^1 \cos t^2 \,\mathrm{d}t + \int_1^\infty \cos t^2 \,\mathrm{d}t.$$

Troch otáznikov nad symbolom = sa môžeme zbaviť jedine vtedy, keď ukážeme existenciu oboch integrálov na pravej strane uvedenej rovnosti :). Nakoľko funkcia $\cos t^2$ je spojitá na intervale $[0, 1]$, určitý Riemannov integrál $\int_0^1 \cos t^2 \,\mathrm{d}t$ bez problémov existuje a má konečnú hodnotu. V druhom, nevlastnom integrále $\int_1^\infty \cos t^2 \,\mathrm{d}t$ vykonáme substitúciu $t = \sqrt{u}$, t.j.,

$$\int_1^\infty \cos t^2 \,\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} t = \sqrt{u} \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \\ 1 \rightsquigarrow 1, \quad \infty \rightsquigarrow \infty \end{array} \right| = \int_1^\infty \frac{\cos u}{2\sqrt{u}} \,\mathrm{d}u.$$

Všimnime si účelnosť rozdelenia pôvodného nevlastného integrálu na dva integrály. Uvedená substitúcia totiž nie je použiteľná na celom intervale $[0, \infty)$ (samy si premyslite :)). Vzniknutý nevlastný integrál teraz vyšetríme pomocou *Dirichletovho kritéria*, známeho z Matematickej analýzy I. Položme

$$f(u) := \cos u, \qquad g(u) := \frac{1}{2\sqrt{u}}.$$

Funkcia $f(u)$ je iste spojitá na $[1, \infty)$, a teda určitý integrál $\int_1^p f(u)\,\mathrm{d}u$ ako funkcia hornej hranice p existuje pre každé $p \in [1, \infty)$. Naviac je *rovnomerne ohraničený* vzhľadom na p na $[1, \infty)$. V ľudskej reči to znamená, že

$$\int_1^p f(u)\,\mathrm{d}u = \int_1^p \cos u \,\mathrm{d}u = [\sin p]_1^p = \sin p - \sin 1,$$

$$\left| \int_1^p f(u)\,\mathrm{d}u \right| = |\sin p - \sin 1| \leq \underbrace{|\sin p|}_{\leq 1} + \underbrace{|\sin 1|}_{\leq 1} \leq 2,$$

pričom horné ohraničenie v poslednej nerovnosti *nezávisí* na p (samy si premyslite clivou spomienkou na krásne časy Matematickej analýzy I ;)). Ďalej, funkcia $g(u)$ je klesajúca na intervale $[1, \infty)$ a $\lim_{u\to\infty} g(u) = \lim_{u\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{u}} = 0$ (i toto je nostalgia minulých čias :)). Podľa Dirichletovho kritéria je potom zaručená konvergencia nevlastného integrálu

$$\int_1^\infty f(u)\,g(u)\,\mathrm{d}u = \int_1^\infty \frac{\cos u}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \int_1^\infty \cos t^2 \,\mathrm{d}t \quad :).$$

To následne dokazuje i konvergenciu nevlastného integrálu

$$\int_0^1 \cos t^2 \,\mathrm{d}t + \int_1^\infty \cos t^2 \,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \cos t^2 \,\mathrm{d}t \quad ;).$$

Analogicky odvodíme i konvergenciu Fresnelovho integrálu $J = \int_0^\infty \sin t^2 \,\mathrm{d}t$ (samy podrobne ukážte ;)).

Príklad 5

Rozhodnime o konvergencii nevlastného dvojného integrálu

$$I = \iint_\Omega \sin(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde množina $\Omega = [0,\infty) \times [0,\infty)$.

Riešenie:

Tento príklad ilustruje skutočnosť, že niekedy musíme byť pri vyšetrovaní nevlastných viacrozmerných integrálov obzvlášť opatrní. V tomto prípade funkcia $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$ *mení znamienko* na množine Ω, a preto je vo všeobecnosti nutné vyšetriť *všetky* postupnosti merateľných množín $\{M_n\}$, ktoré vyčerpávajú množinu Ω. Uvažujme napríklad postupnosť $\{M_n\}$ z Príkladu 1, t.j.,

$$M_n := [0,n] \times [0,n], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Potom podľa Fubiniho vety postupne dostávame

$$I_n = \iint_{M_n} \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{M_n} \big(\sin x^2 \cos y^2 + \cos x^2 \sin y^2\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^n \left[\int_0^n \big(\sin x^2 \cos y^2 + \cos x^2 \sin y^2\big)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^n \left[\left(\int_0^n \sin x^2\,\mathrm{d}x\right)\cdot \cos y^2 + \left(\int_0^n \cos x^2\,\mathrm{d}x\right)\cdot \sin y^2\right]\mathrm{d}y$$

$$= \left(\int_0^n \sin x^2\,\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_0^n \cos y^2\,\mathrm{d}y\right) + \left(\int_0^n \cos x^2\,\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_0^n \sin y^2\,\mathrm{d}y\right)$$

$$= 2\left(\int_0^n \cos t^2\,\mathrm{d}t\right)\cdot\left(\int_0^n \sin t^2\,\mathrm{d}t\right)$$

(samy overte jednotlivé kroky; premenovanie integračných premenných x, y na t nemení hodnotu určitého integrálu :)). V Príklade 4 sme dokázali existenciu Fresnelových integrálov. To znamená, že limity

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^n \cos t^2\,\mathrm{d}t\right), \quad \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^n \sin t^2\,\mathrm{d}t\right) \quad \text{existujú a sú konečné}$$

(samy si premyslite :)). Preto i $\lim_{n\to\infty} I_n$ existuje a je konečná. Výborne, takže nevlastný dvojný integrál v zadaní príkladu konverguje a sme v pohode :)… alebo nie? Čo sa bude diať, keď namiesto uvažovanej postupnosti $\{M_n\}$ použijeme postupnosť $\{N_n\}$ z Príkladu 2, konkrétne, zoberieme

$$N_n := \{x^2 + y^2 = n^2, \quad x \geq 0,\ y \geq 0\}, \quad n \in \mathbb{N} \quad ???$$

Využitím transformácie do polárnych súradníc a Fubiniho vety máme

$$J_n = \iint_{N_n} \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left| \begin{array}{c} x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \\ \text{jakobián } J = \rho, \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/2, \quad 0 \leq \rho \leq n \end{array} \right|$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^n \left(\sin\rho^2\right)\rho\,\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi/2}\left[-\frac{\cos\rho^2}{2}\right]_0^n \mathrm{d}\varphi$$

$$= \left(\frac{1-\cos n^2}{2}\right)\cdot\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{4}\cdot\left(1-\cos n^2\right)$$

(samy overte ;)). Avšak teraz $\lim_{n\to\infty} J_n$ neexistuje, ako sa môžeme ľahko presvedčiť. Podľa poznámok v úvode dokumentu to teda znamená, že nevlastný dvojný integrál I v zadaní príkladu diverguje.

Príklad 6

Vyšetrime konvergenciu nevlastného trojného integrálu

$$I = \iiint_\Omega \frac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^\alpha}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

v závislosti na reálnom parametri α. Množina $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus G$, kde G je vnútro jednotkovej sféry so stredom v bode $[0,0,0]$.

Riešenie:
Nech $R > 1$ je dané reálne číslo. Uvažujme (vlastný) trojný integrál

$$I_R := \iiint_{\Omega_R} \frac{1}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\alpha}} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde množina Ω_R je uzavreté „medzigulie :)“ so stredom v bode $[0, 0, 0]$ a s polomermi 1 a R, t.j.,

$$\Omega_R := \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3, \quad 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\right\}.$$

Trojný integrál I_R vypočítame napríklad transformáciou do sférických súradníc $x = \rho \sin\theta \cos\varphi$, $y = \rho \sin\theta \sin\varphi$, $z = \rho\cos\theta$. V našom prípade máme

$$I_R = \left| \begin{array}{c} x = \rho \sin\theta\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \quad z = \rho\cos\theta, \\ x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2, \quad \text{jakobián } J = -\rho^2 \sin\theta, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 1 \le \rho \le R \end{array} \right|$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi} \left[\int_1^R \frac{1}{\left(\rho^2\right)^{\alpha}} \cdot \rho^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\rho \right] \mathrm{d}\theta \right] \mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi} \left[\int_1^R \rho^{2-2\alpha} \sin\theta \, \mathrm{d}\rho \right] \mathrm{d}\theta \right] \mathrm{d}\varphi = \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \right) \left(\int_0^{\pi} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \right) \left(\int_1^R \rho^{2-2\alpha} \mathrm{d}\rho \right)$$

$$= 2\pi \cdot [-\cos\theta]_0^{\pi} \cdot \left(\int_1^R \rho^{2-2\alpha} \mathrm{d}\rho \right) = 4\pi \cdot \int_1^R \rho^{2-2\alpha} \mathrm{d}\rho$$

(samy overte uvedené výpočty :)). Posledný určitý integrál zrejme závisí na hodnote mocniny $2 - 2\alpha$, konkrétne,

$$\int_1^R \rho^{2-2\alpha} \mathrm{d}\rho = \begin{cases} \left[\frac{\rho^{3-2\alpha}}{3-2\alpha} \right]_1^R = \frac{R^{3-2\alpha} - 1}{3-2\alpha}, & \alpha \ne \frac{3}{2}, \\ \\ [\ln \rho]_1^R = \ln R, & \alpha = \frac{3}{2} \end{cases}$$

(i toto samy overte ;)). Pre trojný integrál I_R preto dostávame

$$I_R = \begin{cases} \frac{4\pi}{3-2\alpha} \left(R^{3-2\alpha} - 1\right), & \alpha \ne \frac{3}{2}, \\ \\ 4\pi \ln R, & \alpha = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Nechávame na čitateľa, aby si premyslel, že nakoľko integrovaná funkcia $f(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}$ je nezáporná na množine Ω, stačí preskúmať limitu $\lim_{R\to\infty} I_R$:). Zrejme platí

$$\lim_{R\to\infty} I_R = \begin{cases} \frac{4\pi}{2\alpha-3}, & \alpha > \frac{3}{2}, \\ \infty, & \alpha \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

(samy sa presvedčte :)). Takže nevlastný trojný integrál I v zadaní príkladu konverguje práve vtedy keď $\alpha > \frac{3}{2}$, pričom v tomto prípade $I = \frac{4\pi}{2\alpha-3}$.

Príklad 7

Vypočítajme nevlastný trojný integrál

$$I = \iiint_\Omega \frac{1}{(1+x+y+z)^7}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde množina $\Omega = [0,\infty) \times [0,\infty) \times [0,\infty)$.

Riešenie:

Postupujeme analogicky ako v predchádzajúcom príklade. Pre dané kladné reálne číslo R uvažujme štvorsten Ω_R daný

$$\Omega_R \ : \ x+y+z \leq R, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0,$$

a nech $I_R = \iiint_{\Omega_R} \frac{1}{(1+x+y+z)^7}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. Keďže funkcia $f(x,y,z) = \frac{1}{(1+x+y+z)^7}$ je nezáporná, platí $I = \lim_{R\to\infty} I_R$ (samy si premyslite :)). Množina Ω_R je zrejme elementárna oblasť vzhľadom na každú súradnicovú rovinu. Napríklad ako elementárna oblasť vzhľadom na rovinu xy má reprezentáciu

$$\Omega_R \ : \ \left\{ \begin{array}{c} 0 \leq x \leq R, \\ 0 \leq y \leq R-x, \\ 0 \leq z \leq R-x-y \end{array} \right\}$$

(samy overte ;)). Pre I_R potom postupnou integráciou máme

$$I_R \overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^R \left[\int_0^{R-x} \left[\int_0^{R-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^7}\,\mathrm{d}z \right] \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^R \left[\int_0^{R-x} \left[-\frac{1}{6(1+x+y+z)^6} \right]_0^{R-x-y} \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^R \left[\int_0^{R-x} \left(\frac{1}{6(1+x+y)^6} - \frac{1}{6(1+R)^6} \right) \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \int_0^R \left[-\frac{1}{5(1+x+y)^5} - \frac{y}{(1+R)^6} \right]_0^{R-x} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{30} \cdot \int_0^R \left(\frac{1}{(1+x)^5} + \frac{5}{(1+R)^6} \cdot (x+1) - \frac{6}{(1+R)^5} \right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{30} \cdot \left[-\frac{1}{4(1+x)^4} + \frac{5}{(1+R)^6} \cdot \frac{(x+1)^2}{2} - \frac{6x}{(1+R)^5} \right]_0^R$$

$$= \frac{1}{120} \cdot \left(1 - \frac{15}{(1+R)^4} + \frac{24}{(1+R)^5} - \frac{10}{(1+R)^6} \right)$$

(samy pozorne overte výpočty :)). Z poslednej rovnosti vyplýva

$$\lim_{R\to\infty} I_R = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{120} \cdot \left(1 - \frac{15}{(1+R)^4} + \frac{24}{(1+R)^5} - \frac{10}{(1+R)^6} \right) = \frac{1}{120}.$$

To znamená, že nevlastný trojný integrál v zadaní príkladu konverguje a jeho hodnota je $I = \frac{1}{120}$.

Príklad 8

Vyšetrime existenciu nevlastného trojného integrálu

$$I = \iiint_\Omega \frac{\sin xyz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde množina Ω má vyjadrenie $1 \leq x^2 + y^2 + z^2$.

Riešenie:

Priama integrácia je v tomto prípade beznádejná :(. Nám však ide len o existenciu/neexistenciu uvedeného nevlastného integrálu :). Môžeme si preto pomôcť nejakým vhodným kritériom. Jedným zo základných a najrozšírenejším je *porovnávacie* kritérium. Funguje rovnako ako pre klasické jednorozmerné nevlastné integrály. Konkrétne v prípade nevlastných trojných integrálov platí, že ak $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ sú dve funkcie, *nezáporné* na množine Ω, ktoré spĺňajú podmienku (1) a nerovnosť $f(x,y,z) \leq g(x,y,z)$ pre každý bod $[x,y,z] \in \Omega$, potom

$$\text{nevlastný integrál } \iiint_\Omega g(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \text{ konverguje}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{nevlastný integrál } \iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \text{ konverguje.}$$

V našom prípade položíme

$$f(x,y,z) := \left|\frac{\sin xyz}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right| = \frac{|\sin xyz|}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \qquad g(x,y,z) := \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

Zrejme obe funkcie $f(x,y,z)$ a $g(x,y,z)$ sú nezáporné a spojité na množine Ω, a teda spĺňajú podmienku (1) (samy si premyslite :)). Okrem toho platí

$$f(x,y,z) = \frac{\overbrace{|\sin xyz|}^{\leq 1}}{(x^2+y^2+z^2)^2} \leq \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2} = g(x,y,z), \quad [x,y,z] \in \Omega.$$

Z výsledku Príkladu 6 pre voľbu $\alpha = 2$ vyplýva, že nevlastný trojný integrál

$$\iiint_\Omega g(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_\Omega \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

konverguje (samy overte ;)). Preto podľa porovnávacieho kritéria konverguje i nevlastný integrál

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_\Omega \left|\frac{\sin xyz}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

To ukazuje, že nevlastný integrál I v zadaní príkladu konverguje *absolútne*, a preto i konverguje (samy si premyslite :)).

Príklad 9
Ukážme, že podľa klasickej definície z MA I tzv. *Dirichletov integrál*

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

konverguje, kým nevlastný integrál

$$J = \int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$$

diverguje. Z toho potom nepriamo dokážme, že v rámci novej definície v úvode dokumentu obidva nevlastné integrály I a J divergujú.

Riešenie:
Konvergencia Dirichletovho integrálu I vyplýva – ako inak :) – z Dirichletovho kritéria (pozri aj riešenie Príkladu 4). Podrobnosti nechávame na čitateľa ;). Ďalej ukážeme, že podľa klasickej definície z MA I nevlastný integrál J diverguje. Funkcia $f(x) := \left|\frac{\sin x}{x}\right| = \frac{|\sin x|}{x}$ je ohraničená na celom $\mathbb{R}$ a skoro všade spojitá s výnimkou bodu $x = 0$, v ktorom platí

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{|\sin x|}{x} = 1$$

(samy overte :)). Preto postupnosť určitých integrálov

$$J_n := \int_0^{n\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N},$$

je korektne definovaná. Keďže funkcia $f(x)$ je nezáporná na intervale $[0,\infty)$, číselná postupnosť $\{J_n\}$ je nezáporná a neklesajúca (samy overte :)). To znamená, že limita $\lim_{n\to\infty} J_n$ existuje a je buď konečná alebo ∞ (i toto si samy premyslite ;)). Divergencia nevlastného integrálu J je teda ekvivalentná s $\lim_{n\to\infty} J_n = \infty$. Za týmto účelom sa pokúsime vhodne zdola ohraničiť integrály J_n. Nechávame na čitateľa, aby pre každé $k \in \mathbb{N}_0$ overil relácie

$$\frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \cdot |\sin x|, \quad x \in [k\pi,\,(k+1)\pi],$$

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| \,\mathrm{d}x = 2.$$

Využitím týchto pozorovaní potom pre každý index n máme

$$J_n = \int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} \,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \underbrace{\frac{|\sin x|}{x}}_{\geq \frac{1}{(k+1)\pi} \cdot |\sin x|} \,\mathrm{d}x$$

$$\geq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left[\frac{1}{(k+1)\pi} \cdot |\sin x|\right] \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \cdot \underbrace{\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| \,\mathrm{d}x}_{2}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(k+1)\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

kde v poslednom kroku sme posunuli indexáciu $k \mapsto k+1$ (samy pozorne overte jednotlivé výpočty :)). Odvodili sme teda odhad

$$J_n \geq \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{2}{\pi} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \quad \text{pre každé } n \in \mathbb{N}.$$

A nakoľko harmonický rád $\sum \frac{1}{n}$ diverguje k ∞, môžeme usúdiť, že skutočne $\lim_{n\to\infty} J_n = \infty$ (samy si premyslite ;)). Preto nevlastný integrál J diverguje (k ∞). Dirichletov integrál I teda podľa klasickej definície z MA I konverguje neabsolútne. Na druhej strane nevlastný integrál J diverguje i podľa novej definície v úvode dokumentu. Vyplýva to jednak z nezápornosti funkcie $f(x)$ na množine $\Omega = [0, \infty)$, a jednak zo skutočnosti, že postupnosť merateľných množín $\{M_n\}$ definovaná

$$M_n := [0,\, n\pi], \quad n \in \mathbb{N},$$

vyčerpáva množinu Ω (samy overte :)) a spĺňa

$$\lim_{n\to\infty} \int_{M_n} f(x) \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_0^{n\pi} f(x) \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} J_n = \infty,$$

ako sme práve ukázali. Podľa poznámok v úvode dokumentu teda v rámci novej definície musí nutne divergovať i Dirichletov integrál I.

Príklad 10

Stanovme nevlastný dvojný integrál

$$I = \iint_{\Omega} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde množina Ω má vyjadrenie $x^2 + y^2 \leq 1$.

Riešenie:

Množina Ω je zrejme uzavretý kruh so stredom v bode $A = [0, 0]$ a s polomerom 1. Funkcia $f(x, y) = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ je definovaná a spojitá na $\Omega \setminus \{A\}$, pričom bod A je zrejme singulárnym bodom funkcie $f(x, y)$ (samy overte :)). Okrem toho je splnená podmienka (2) (i toto si samy premyslite ;)). A keďže $f(x, y)$ je nezáporná na $\Omega \setminus \{A\}$, stačí preveriť nejakú jednu postupnosť $\{M_n\}$ merateľných množín, ktorá sa zmršťuje do bodu A. Uvažujme napríklad

$$M_n := \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 < \frac{1}{(n+1)^2} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zostrojíme príslušnú postupnosť (vlastných) dvojných integrálov

$$I_n = \iint_{\Omega \setminus M_n} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Nakoľko množina $\Omega \setminus M_n$ je zrejme uzavreté medzikružie s vyjadrením

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq x^2 + y^2 \leq 1,$$

transformáciou do polárnych súradníc $x = \rho \cos \varphi$ a $y = \rho \sin \varphi$ dostávame

$$I_n = \left| \begin{array}{c} x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \\ x^2 + y^2 = \rho^2, \quad \text{jakobián } J = \rho, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad \frac{1}{n+1} \leq \rho \leq 1 \end{array} \right| \overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^{2\pi} \left[\int_{\frac{1}{n+1}}^{1} \ln \left(\frac{1}{\rho} \right) \rho \,\mathrm{d}\rho \right] \mathrm{d}\varphi.$$

Na vnútorný určitý integrál aplikujeme integráciu per-partes

$$\int_{\frac{1}{n+1}}^{1} \ln\left(\frac{1}{\rho}\right) \rho \,\mathrm{d}\rho = \left| \begin{array}{ll} u' = \rho, & u = \frac{\rho^2}{2}, \\ v = \ln\frac{1}{\rho}, & v' = -\frac{1}{\rho} \end{array} \right|$$

$$= \left[\frac{\rho^2}{2} \cdot \ln\frac{1}{\rho}\right]_{\frac{1}{n+1}}^{1} - \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} \frac{\rho^2}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\rho}\right) \mathrm{d}\rho = \frac{\ln(n+1)}{2\,(n+1)^2} + \frac{1}{2} \cdot \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} \rho \,\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{\ln(n+1)}{2\,(n+1)^2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4\,(n+1)^2} = \frac{1}{4} + \frac{2\ln(n+1) - 1}{2\,(n+1)^2}$$

(samy overte detaily výpočtov :)). Pre dvojný integrál I_n potom platí

$$I_n = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \frac{2\ln(n+1)-1}{2\,(n+1)^2}\right) \mathrm{d}\varphi = \pi \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{2\ln(n+1)-1}{(n+1)^2}\right).$$

Napokon limitovaním postupnosti $\{I_n\}$ máme

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \pi \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{2\ln(n+1)-1}{(n+1)^2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

(samy overte :)). Nevlastný dvojný integrál I v zadaní príkladu teda konverguje a má hodnotu

$$I = \iint_\Omega \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}.$$

Príklad 11
Vypočítajme nevlastný dvojný integrál

$$I = \iint_\Omega \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde Ω je podmnožina v $\mathbb{R}^2$ ohraničená krivkami $y = 1$, $y = \sqrt{x}$, $x = 0$.

Riešenie:
Funkciu $f(x, y) = \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$ je definovaná a spojitá na celej množine Ω okrem bodu

$A = [0, 0]$, ktorý je jej hraničným bodom. V tomto bode však funkcia $f(x, y)$ má konečnú limitu vzhľadom na množinu Ω. Platia totiž nerovnosti

$$\sqrt{x} \le y \le 1, \quad [x, y] \in \Omega$$

$$\Downarrow$$

$$x \le \frac{x}{y} \le \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}, \quad [x, y] \in \Omega \setminus \{\text{body } [x, y] \text{ s } x = 0\}$$

(samy overte :)). Posledná nerovnosť však platí pre všetky body z Ω okrem bodu A (i toto si samy premyslite ;)). Z monotónnosti exponenciálnej funkcie následne vyplývajú relácie

$$\mathrm{e}^{x} \le \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} \le \mathrm{e}^{\sqrt{x}}, \quad [x, y] \in \Omega \setminus \{A\}.$$

Limitovaním posledných nerovností pre $(x, y) \to (0, 0)$ vzhľadom na množinu Ω a využitím vety o dvoch policajtoch dostávame

$$\underbrace{\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ [x,y]\in\Omega}} \mathrm{e}^{x}}_{1} \le \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ [x,y]\in\Omega}} \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} \le \underbrace{\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ [x,y]\in\Omega}} \mathrm{e}^{\sqrt{x}}}_{1}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ [x,y]\in\Omega}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ [x,y]\in\Omega}} \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} = 1.$$

Funkciu $f(x, y)$ teda môžeme dodefinovať v bode A tak, aby bola spojitá na celom Ω vzhľadom na množinu Ω. Konkrétne, funkcia $g(x, y)$ definovaná

$$g(x, y) := \begin{cases} f(x, y), & [x, y] \in \Omega \setminus \{A\}, \\ 1, & [x, y] = A, \end{cases}$$

je spojitá na množine Ω. Množina Ω je zrejme elementárnou vzhľadom na os y s vyjadrením

$$\Omega \ : \ \left\{ \begin{array}{c} 0 \le y \le 1, \\ 0 \le x \le y^2 \end{array} \right\}$$

(samy sa presvedčte :)). To znamená, že Ω je merateľná množina. Preto funkcia $g(x, y)$ je integrovateľná na Ω, pričom dvojný integrál $\iint_\Omega g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ vypočítame klasickým spôsobom podľa Fubiniho vety. Naviac platí

$$I = \iint_\Omega f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Omega g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

pretože funkcie $f(x, y)$ a $g(x, y)$ sa na Ω líšia iba v jednom bode, teda na množine miery nula. Dvojný integrál v zadaní príkadu preto konverguje. Nechávame na čitateľa, aby ukázal, že $I = \frac{1}{2}$:).

Príklad 12

Dokážme platnosť formúl

$$\int_0^{\pi/2} \ln\sin t\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}\ln 2, \qquad \int_0^{\pi} \ln\sin t\,\mathrm{d}t = -\pi\ln 2.$$

Riešenie:

Funkcia $f(t) = \ln\sin t$ je zrejme spojitá a nekladná na otvorenom intervale $(0, \pi)$, pričom v jeho krajných bodoch $t = 0$ a $t = \pi$ má singularity, keďže

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{t\to 0^+} \ln\sin t = -\infty, \qquad \lim_{t\to \pi^-} f(t) = \lim_{t\to \pi^-} \ln\sin t = -\infty.$$

Obidva integrály v zadaní príkladu sú teda nevlastné. Dokážeme ich existenciu v rámci klasickej definície z MA I. Využijeme limitné porovnávacie kritérium. Všimnime si, že platia nerovnosti

$$0 < 1 < \frac{\pi}{2} < \pi - 1 < \pi.$$

Položme $g(t) := -\ln t$ a $h(t) := -\ln(\pi - t)$. Funkcia $g(t)$ je nezáporná na intervale $(0, 1]$, v bode $t = 0$ má singularitu a nevlastný integrál

$$\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t = 2$$

konverguje (samy overte integráciou per-partes :)). Okrem toho platí

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{|f(t)|}{g(t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{|\ln\sin t|}{-\ln t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{-\ln\sin t}{-\ln t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln\sin t}{\ln t}$$

$$\overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{(\ln \sin t)'}{(\ln t)'} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{\cos t}{\sin t}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to 0^+} \underbrace{\frac{t}{\sin t}}_{\to 1} \cdot \cos t = 1$$

(samy overte ;)). To znamená, že konverguje i nevlastný integrál $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$, a to absolútne (samy si premyslite :)). Následne je absolútne konvergentný i nevlastný integrál

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \underbrace{\int_1^{\pi/2} f(t)\,\mathrm{d}t}_{\text{vlastný integrál}} = \int_0^{\pi/2} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln \sin t\,\mathrm{d}t$$

(i toto si samy dobre premyslite :)). Podobne, funkcia $h(t)$ je nezáporná na intervale $[\pi-1,\,\pi)$, v bode $t=\pi$ má singularitu a nevlastný integrál

$$\int_{\pi-1}^{\pi} h(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{\pi-1}^{\pi} \ln(\pi - t)\,\mathrm{d}t = 2$$

konverguje. Zo skutočnosti, že

$$\lim_{t\to\pi^-} \frac{|f(t)|}{h(t)} = \lim_{t\to\pi^-} \frac{\ln \sin t}{\ln(\pi - t)} = 1,$$

vyplýva podľa limitného porovnávacieho kritéria absolútna konvergencia nevlastného integrálu $\int_{\pi-1}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$. V kombinácii s predchádzajúcim výsledkom teda existuje aj nevlastný integrál

$$\underbrace{\int_0^{\pi/2} f(t)\,\mathrm{d}t}_{\text{konverguje}} + \underbrace{\int_{\pi/2}^{\pi-1} f(t)\,\mathrm{d}t}_{\text{vlastný integrál}} + \int_{\pi-1}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \ln \sin t\,\mathrm{d}t$$

(samy si všetky tieto argumenty pozorne premyslite :)). Pristúpime teraz k samotnému výpočtu integrálov v zadaní príkladu. Označme

$$I := \int_0^{\pi/2} \ln \sin t\,\mathrm{d}t, \qquad J := \int_0^{\pi} \ln \sin t\,\mathrm{d}t.$$

Aplikáciou substitúcie $u = \frac{\pi}{2} - t$ sa prvý integrál transformuje

$$I = \left| \begin{array}{c} u = \frac{\pi}{2} - t,\ \mathrm{d}u = -\mathrm{d}t, \\ 0 \rightsquigarrow \pi/2,\ \pi/2 \rightsquigarrow 0 \end{array} \right| = -\int_{\pi/2}^{0} \ln \sin\Big(\frac{\pi}{2} - u\Big)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} \ln \cos u\,\mathrm{d}u$$

(samy si premyslite; zároveň overte existenciu integrálu $\int_0^{\pi/2} \ln\cos u \,\mathrm{d}u$;)). Odvodili sme teda zaujímavú identitu

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln\sin t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln\cos t \,\mathrm{d}t \qquad :).$$

Jej využitím následne dostávame

$$2I = \int_0^{\pi/2} \ln\sin t \,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/2} \ln\cos t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \big(\ln\sin t + \ln\cos t\big) \,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t \cdot \cos t) \,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1}{2} \cdot \sin 2t\right) \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\ln\frac{1}{2} + \ln\sin 2t\right) \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) \mathrm{d}t + \int_0^{\pi/2} \ln\sin 2t \,\mathrm{d}t$$

(samy overte výpočty :)). Rozdelenie na dva integrály v poslednom kroku je korektné, nakoľko integrály I a $\int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) \mathrm{d}t$ sú konvergentné; konvergovať teda musí i nevlastný integrál $\int_0^{\pi/2} \ln\sin 2t \,\mathrm{d}t$:). Avšak pomocou substitúcie $u = 2t$ sa tento integrál transformuje

$$\int_0^{\pi/2} \ln\sin 2t \,\mathrm{d}t = \left| \begin{matrix} u = 2t, & \mathrm{d}u = 2\mathrm{d}t, \\ 0 \rightsquigarrow 0, & \pi/2 \rightsquigarrow \pi \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi} \ln\sin u \,\mathrm{d}u = \frac{J}{2} \qquad :).$$

Platí teda formula

$$2I = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) \mathrm{d}t + \frac{J}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2I = -\frac{\pi}{2} \cdot \ln 2 + \frac{J}{2}.$$

Na druhej strane, rozpísaním integrálu J dostávame

$$J = \int_0^{\pi} \ln\sin t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln\sin t \,\mathrm{d}t + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln\sin t \,\mathrm{d}t = I + \underbrace{\int_{\pi/2}^{\pi} \ln\sin t \,\mathrm{d}t}_{\text{konverguje}}.$$

Pomocou substitúcie $u = t - \frac{\pi}{2}$ sa integrál $\int_{\pi/2}^{\pi} \ln\sin t \,\mathrm{d}t$ transfromuje

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \ln\sin t \,\mathrm{d}t = \left| \begin{matrix} u = t - \frac{\pi}{2}, & \mathrm{d}u = \mathrm{d}t, \\ \pi/2 \rightsquigarrow 0, & \pi \rightsquigarrow \pi/2 \end{matrix} \right| = \int_0^{\pi/2} \ln\sin\left(u + \frac{\pi}{2}\right) \mathrm{d}u$$

$$= \int_0^{\pi/2} \ln \cos u \, \mathrm{d}u = I,$$

podľa vyššie odvodenej identity (samy overte :)). Platí teda i rovnosť

$$J = I + I = 2I.$$

Kombináciou s predchádzajúcou formulou napokon dostávame

$$2I = -\frac{\pi}{2} \cdot \ln 2 + \frac{2I}{2} \quad \Longrightarrow \quad I = -\frac{\pi}{2} \ln 2,$$

a následne $J = 2I = -\pi \ln 2$:).

Príklad 13

Určme hodnotu nevlastného dvojného integrálu

$$I = \iint_\Omega \ln \sin(x-y) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde množina Ω má vyjadrenie $0 \le y \le x \le \pi$.

Riešenie:

Množina Ω je zrejme oblasť pod grafom funkcie $y = x$ na intervale $x \in [0, \pi]$. Je to teda elementárna oblasť vzhľadom na obe súradnicové osi (samy overte nakreslením obrázku :)). Množina Ω je teda merateľná. Integrovaná funkcia $f(x, y) = \ln \sin(x - y)$ je definovaná a spojitá na celom Ω okrem bodu $[\pi, \pi]$ a bodov na priamke $y = x$ patriacich do Ω. Vo všetkých týchto bodoch je $f(x, y)$ neohraničená – uteká do $-\infty$. Čelíme teda prípadu s nekonečným počtom singulárnych bodov :-/. Významným pozorovaním je skutočnosť, že funkcia $f(x, y)$ *nemení znamienko* na množine Ω, konkrétne je nekladná na Ω (v bodoch, v ktorých nie je definovaná, uniká do $-\infty$:)). Skúsme *formálne* vykonať zámenu premenných

$$x = u, \quad y = u - v,$$

kde u, v sú nové integračné premenné. Množina Ω sa transformuje na množinu Ω^*, ktorá má v rovine uv rovnakú reprezentáciu ako Ω v rovine xy, t.j.,

$$\Omega^* \; : \; \left\{ \begin{array}{c} 0 \le u \le \pi \\ 0 \le v \le u \end{array} \right\}$$

(samy si pozorne premyslite a nakreslite obrázky oboch množín Ω a Ω^* ;)). Jakobián uvedenej tranformácie je

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

takže uvedená transformácia je *prostá a regulárna* na celom $\mathbb{R}^2$, a teda pre nás vhodná. Pre dvojný integrál I v zadaní príkladu potom *formálne* platí

$$I = \iint_{\Omega^*} \ln\sin[u-(u-v)]\,|J(u,v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint_{\Omega^*} \ln\sin v\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Všimnime si, že podobne ako $f(x,y)$, i funkcia $g(u,v) = \ln\sin v$ je nekladná na množine Ω^*. Tieto fakty spolu s regulárnosťou danej transformácie potom implikujú, že nevlastné dvojné integrály

$$\iint_{\Omega} \ln\sin(x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad \iint_{\Omega^*} \ln\sin v\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

buď obidva konvergujú alebo obidva určito divergujú k $-\infty$. Ak napríklad $\iint_{\Omega^*} \ln\sin v\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ konverguje, musí nutne konvergovať i transformovaný integrál $\iint_{\Omega^*} \ln\sin v\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ a naopak (samy si premyslite :)). To potom znamená, že rovnosť $I = \iint_{\Omega^*} \ln\sin v\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ platí „skutočne“, nielen iba formálne :). A keďže premenovaním integračných premenných sa hodnota integrálu nemení, dostávame identitu

$$I = \iint_{\Omega} \ln\sin(x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Omega} \ln\sin y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4}$$

(samy overte; premenné u,v premenujeme na x,y, množina Ω^* je potom totožná s množinou Ω :)). Pre posledný dvojný integrál teraz uvažujme takúto transformáciu

$$x = \pi - u, \quad y = \pi - v.$$

V tomto prípade sa množina Ω transformuje na množinu Ω^{**}, ktorá má v rovine uv vyjadrenie

$$\Omega^{**} \ : \ \left\{ \begin{array}{c} 0 \le v \le \pi \\ 0 \le u \le v \end{array} \right\}.$$

Nechávame na čitateľa, aby overil, že množina Ω^{**} má v rovine uv rovnakú reprezentáciu ako obraz množiny Ω v stredovej súmernosti podľa bodu $[\pi,\pi]$

(opať samy zakreslite obidve množiny Ω a Ω^{**} :)). Pre jakobián tejto transformácie platí

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Jedná sa teda opäť o prosté a regulárne zobrazenie, pričom dvojný integrál $\iint_\Omega \ln \sin y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ nadobudne formálne tvar

$$I = \iint_{\Omega^{**}} \ln \sin(\pi - v) \, |J(u,v)| \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint_{\Omega^{**}} \ln \sin v \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

(samy overte ;)). Táto rovnosť z podobných dôvodov ako vyššie platí „naozaj“, nielen formálne (funkcia $g(u,v) = \ln \sin v$ je nekladná na množine Ω^{**}, a teda nevlastné dvojné integrály I a $\iint_{\Omega^{**}} \ln \sin v \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v$ buď oba konvergujú alebo oba určito divergujú k $-\infty$:)). Premenovaním integračných premenných u, v na x, y získame formulu

$$I = \iint_\Lambda \ln \sin y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{5}$$

kde množina Λ, ako premenovanie množiny Ω^{**}, je obraz množiny Ω v stredovej súmernosti podľa bodu $[\pi, \pi]$ (samy overte ;)). Platí teda $\Omega \cup \Lambda = S$, kde S je štvorec $[0,\, \pi] \times [0,\, \pi]$, a miera množiny $\Omega \cap \Lambda$ je nulová (samy si premyslite :)). Kombináciou identít (4) a (5) potom máme

$$2I = \iint_\Omega \ln \sin y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_\Lambda \ln \sin y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_S \ln \sin y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\Downarrow$$

$$I = \frac{1}{2} \cdot \iint_S \ln \sin y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad :). \tag{6}$$

Náš úvodný problém sme teda previedli na stanovenie nevlastného integrálu $\iint_S \ln \sin y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Uvažujme štvorec

$$M_\varepsilon := [\varepsilon,\, \pi - \varepsilon] \times [\varepsilon,\, \pi - \varepsilon],$$

kde pre nejaké dané $\varepsilon \in (0,\, \pi)$. Zrejme $M_\varepsilon \subseteq S$ a funkcia $h(x,y) = \ln \sin y$ je spojitá, a teda i štandardne integrovateľná na M_ε (samy overte :)). A nakoľko $h(x,y)$ nemení znamienko na S (je nekladná), platí

$$\iint_S \ln \sin y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \iint_{M_\varepsilon} \ln \sin y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(i toto si samy premyslite ;)). Pomocou Fubiniho vety postupne máme

$$\iint_S \ln \sin y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} \left[\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} \ln \sin y \,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} \mathrm{d}x\right) \cdot \left(\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} \ln \sin y \,\mathrm{d}y\right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} (\pi - 2\varepsilon) \cdot \left(\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} \ln \sin y \,\mathrm{d}y\right)$$

Avšak z Príkladu 12 vieme, že platí identita

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} \ln \sin y \,\mathrm{d}y\right) = \int_0^\pi \ln \sin y \,\mathrm{d}y = -\pi \cdot \ln 2.$$

Preto napokon dostávame rovnosť

$$\iint_S \ln \sin y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{\varepsilon\to 0^+} (\pi - 2\varepsilon) \cdot \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} \ln \sin y \,\mathrm{d}y\right) = -\pi^2 \ln 2,$$

z ktorej ihneď pomocou (6) vyplýva finálny výsledok

$$I = \iint_\Omega \ln \sin(x - y) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{\pi^2}{2} \ln 2 \quad :).$$

Príklad 14

Vyšetrime konvergenciu nevlastného trojného integrálu

$$I = \iiint_\Omega \frac{1}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^\alpha} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

v závislosti na reálnom parametri α. Množina Ω predstavuje uzavretú jednotkovú sféru so stredom v bode $[0, 0, 0]$.

Riešenie:

Tento príklad možno chápať ako doplnok či pokračovanie Príkladu 6. Postupujeme preto v podobnom duchu. Pre $R \in (0, 1)$ uvažujme uzavreté „medzigulie“ Ω_R so stredom v bode $[0, 0, 0]$ a s polomermi R a 1 a trojný integrál

$$I_R := \iiint_{\Omega_R} \frac{1}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^\alpha} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Výpočet integrálu I_R je takmer navlas rovnaký ako v Príklade 6. Nechávame na čiateľa, aby overil, že pomocou transformácie do sférických súradníc dostaneme vyjadrenie

$$I_R = 4\pi \cdot \int_R^1 \rho^{2-2\alpha} \mathrm{d}\rho \quad :).$$

Ďalej platí

$$\int_R^1 \rho^{2-2\alpha} \mathrm{d}\rho = \begin{cases} \left[\frac{\rho^{3-2\alpha}}{3-2\alpha}\right]_R^1 = \frac{1-R^{3-2\alpha}}{3-2\alpha}, & \alpha \neq \frac{3}{2}, \\ \\ [\ln \rho]_R^1 = -\ln R, & \alpha = \frac{3}{2} \end{cases}$$

(samy overte :)). Pre trojný integrál I_R potom máme

$$I_R = \begin{cases} \frac{4\pi}{3-2\alpha}\left(1 - R^{3-2\alpha}\right), & \alpha \neq \frac{3}{2}, \\ \\ -4\pi \ln R, & \alpha = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Funkcia $f(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}$ je nezáporná na množine $\Omega \setminus \{[0,0,0]\}$, pričom bod $[0,0,0]$ je zrejme jej singularitou. Preto stačí vyšetriť limitu $\lim_{R\to 0^+} I_R$ v závislosti na mocnine α. Keďže platí

$$\lim_{R\to 0^+} I_R = \begin{cases} \frac{4\pi}{3-2\alpha}, & \alpha < \frac{3}{2}, \\ \\ \infty, & \alpha \geq \frac{3}{2}, \end{cases}$$

nevlastný trojný integrál I v zadaní príkladu konverguje práve vtedy, keď $\alpha < \frac{3}{2}$, pričom v tomto prípade $I = \frac{4\pi}{3-2\alpha}$.

Príklad 15

Dokážme platnosť formúl

$$\int_0^\pi \left(\sin^2 t\right) \cdot (\ln \sin t)\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}(1 - \ln 4),$$

$$\int_0^\pi \left(\cos^2 t\right) \cdot (\ln \sin t)\, \mathrm{d}t = -\frac{\pi}{4}(1 + \ln 4).$$

Riešenie:
Obidva integrály v zadaní príkladu konvergujú absolútne. Ukážeme to pomocou limitného porovnávacieho kritéria. Položme

$$f(t) := \big(\sin^2 t\big) \cdot (\ln \sin t), \quad g(t) := \big(\cos^2 t\big) \cdot (\ln \sin t), \quad h(t) := -\ln \sin t$$

$$I := \int_0^\pi \big(\sin^2 t\big) \cdot (\ln \sin t)\,\mathrm{d}t, \qquad J := \int_0^\pi \big(\cos^2 t\big) \cdot (\ln \sin t)\,\mathrm{d}t.$$

Funkcie $f(t)$ a $g(t)$ sú spojité a nekladné na otvorenom intervale $(0, \pi)$, pričom v krajných bodoch $t = 0$ a $t = \pi$ platí

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = 0 = \lim_{t\to\pi^-} f(t), \qquad \lim_{t\to 0^+} g(t) = -\infty = \lim_{t\to\pi^-} g(t)$$

(samy overte :)). Z toho ihneď vyplýva, že integrál I konverguje (správa sa ako klasický určitý integrál). Ďalej funkcia $h(t)$ je nezáporná na $(0, \pi)$ a

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{|g(t)|}{h(t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{-\big(\cos^2 t\big) \cdot (\ln \sin t)}{-\ln \sin t} = \lim_{t\to 0^+} \cos^2 t = 1,$$

$$\lim_{t\to \pi^-} \frac{|g(t)|}{h(t)} = \lim_{t\to \pi^-} \frac{-\big(\cos^2 t\big) \cdot (\ln \sin t)}{-\ln \sin t} = \lim_{t\to \pi^-} \cos^2 t = 1.$$

A keďže v súlade s Príkladom 12 nevlastný integrál $\int_0^\pi h(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \ln \sin t\,\mathrm{d}t$ konverguje, podľa limitného porovnávacieho kritéria musí absolútne konvergovať i nevlastný integrál $\int_0^\pi g(t)\,\mathrm{d}t = J$ (samy si pozorne premyslite ;)). Stanovíme teraz hodnoty integrálov I a J. Z výsledkov Príkladu 12 máme

$$I + J = \int_0^\pi \big(\sin^2 t\big) \cdot (\ln \sin t)\,\mathrm{d}t + \int_0^\pi \big(\cos^2 t\big) \cdot (\ln \sin t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^\pi \underbrace{\big(\sin^2 t + \cos^2 t\big)}_{1} \cdot (\ln \sin t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \ln \sin t\,\mathrm{d}t \overset{\text{Príklad 12}}{=} -\pi \ln 2.$$

Na druhej strane, platí

$$J - I = \int_0^\pi \big(\sin^2 t\big) \cdot (\ln \sin t)\,\mathrm{d}t - \int_0^\pi \big(\cos^2 t\big) \cdot (\ln \sin t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^\pi \underbrace{\left(\cos^2 t - \sin^2 t\right)}_{\cos 2t} \cdot (\ln \sin t)\, \mathrm{d}t = \int_0^\pi (\cos 2t) \cdot (\ln \sin t)\, \mathrm{d}t.$$

Obzvlášť, posledný integrál konverguje. Pomocou integrácie per-partes postupne dostaneme

$$\int_0^\pi (\cos 2t) \cdot (\ln \sin t)\, \mathrm{d}t = \left| \begin{array}{ll} u' = \cos 2t, & u = \frac{\sin 2t}{2} = \sin t \cos t, \\ v = \ln \sin t, & v' = \operatorname{cotg} t \end{array} \right|$$

$$= [(\sin t \cos t) \cdot (\ln \sin t)]_0^\pi - \int_0^\pi (\sin t \cos t) \cdot (\operatorname{cotg} t)\, \mathrm{d}t$$

$$= [(\sin t \cos t) \cdot (\ln \sin t)]_0^\pi - \int_0^\pi \cos^2 t\, \mathrm{d}t$$

(samy overte :)). Nakoľko máme

$$[\sin t \cos t \ln \sin t]_0^\pi = \lim_{t \to \pi^-} \sin t \cos t \ln \sin t - \lim_{t \to 0^+} \sin t \cos t \ln \sin t = 0,$$

$$\int_0^\pi \cos^2 t\, \mathrm{d}t = \int_0^\pi \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right) \mathrm{d}t = \left[\frac{2t + \sin 2t}{4} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

(i toto samy overte ;)), získame rovnosť

$$J - I = \int_0^\pi (\cos 2t) \cdot (\ln \sin t)\, \mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}.$$

Pre integrály I a J sme teda odvodili formuly

$$I + J = -\pi \ln 2, \qquad J - I = -\frac{\pi}{2}.$$

Z toho už hravo zistíme, že

$$I = \frac{\pi}{4}(1 - \ln 4), \qquad J = -\frac{\pi}{4}(1 + \ln 4) \quad :).$$

Príklad 16
Nájdime hodnotu nevlastného dvojného integrálu

$$I = \iint_\Omega \ln\left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde integračný obor Ω má tvar $x^2 + y^2 \leq 2xR$ pre $0 < R \leq \frac{1}{2}$.

Riešenie:
Všimnime si, že množina Ω je vďaka podmienke $0 < R \leq \frac{1}{2}$ podmnožinou uzavretého jednotkového kruhu so stredom v bode $[0,0]$ (samy overte nakreslením vhodného obrázku :)). Funkcia $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ je preto nekladná a spojitá na $\Omega \setminus \{[0,0]\}$, pričom $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = -\infty$, t.j., v bode $[0,0]$ má singularitu. Na vyšetrenie nevlastného integrálu stačí teda uvažovať ľubovoľnú postupnosť merateľných množín $\{M_n\}$, ktora sa zmršťuje do bodu $[0,0]$. Takouto postupnosťou je napríklad

$$M_n \;:\; x^2 + y^2 < \frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > \frac{1}{2R}$$

(samy sa presvedčte :)). V tomto prípade je výhodné pracovať s polárnymi súradnicami $x = \rho\cos\varphi$ a $y = \rho\sin\varphi$. Množina $\Omega \setminus M_n$ má potom tvar

$$\Omega \setminus M_n \;:\; \left\{ \begin{array}{c} -\operatorname{arctg}\sqrt{4R^2n^2-1} \leq \varphi \leq \operatorname{arctg}\sqrt{4R^2n^2-1} \\[2ex] \frac{1}{n} \leq \rho \leq 2R\cos\varphi \end{array} \right\}$$

(samy sa pokúste overiť pomocou vhodného nákresu :)). Pre zjednodušenie zápisu položme $\varphi_n := \operatorname{arctg}\sqrt{4R^2n^2-1}$. Následne máme

$$I_n := \iint_{\Omega\setminus M_n} \ln\left(x^2+y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{-\varphi_n}^{\varphi_n} \left[\int_{1/n}^{2R\cos\varphi} \rho\ln\rho^2 \,\mathrm{d}\rho \right] \mathrm{d}\varphi.$$

Pre vnútorný určitý integrál pomocou integrácie per-partes postupne platí

$$\int_{1/n}^{2R\cos\varphi} \rho\ln\rho^2 \,\mathrm{d}\rho = 2 \cdot \int_{1/n}^{2R\cos\varphi} \rho\ln\rho \,\mathrm{d}\rho$$

$$= 2 \cdot \left[\frac{\rho^2\left(2\ln\rho - 1\right)}{4} \right]_{1/n}^{2R\cos\varphi} = 2R^2\cos^2\varphi \cdot \left(2\ln 2R\cos\varphi - 1\right) + \frac{2\ln n - 1}{2n^2}$$

$$= 4R^2\cos^2\varphi\cdot\ln\cos\varphi + 2R^2(2\ln 2R - 1)\cos^2\varphi + \frac{2\ln n - 1}{2n^2}$$

(samy overte jednotlivé výpočty :)). Dvojný integrál I_n má potom tvar

$$I_n = \int_{-\varphi_n}^{\varphi_n}\left(4R^2\cos^2\varphi\cdot\ln\cos\varphi + 2R^2(2\ln 2R - 1)\cos^2\varphi + \frac{2\ln n - 1}{2n^2}\right)\mathrm{d}\varphi$$

$$= 4R^2\int_{-\varphi_n}^{\varphi_n}\cos^2\varphi\cdot\ln\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi + 2R^2(\ln 4R^2 - 1)\int_{-\varphi_n}^{\varphi_n}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi + \frac{(\ln n^2 - 1)\,\varphi_n}{n^2}$$

$$= 4R^2\int_{-\varphi_n}^{\varphi_n}\cos^2\varphi\cdot\ln\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi + R^2\ln\left(\frac{4R^2}{\mathrm{e}}\right)\cdot(2\varphi_n + \sin 2\varphi_n) + \frac{\varphi_n\ln\left(\frac{n^2}{\mathrm{e}}\right)}{n^2}$$

Vypočítame teraz limitu $\lim_{n\to\infty} I_n$. Nechávame na čitateľa, aby overil, že

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n = \lim_{n\to\infty}\operatorname{arctg}\sqrt{4R^2n^2 - 1} = \frac{\pi}{2},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{n^2}{\mathrm{e}}\right)}{n^2} = 0\quad :).$$

Potom dostávame

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 4R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\cdot\ln\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi + R^2\ln\left(\frac{4R^2}{\mathrm{e}}\right)\cdot\left(2\cdot\frac{\pi}{2} + \sin 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 4R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\cdot\ln\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi + \pi R^2\ln\left(\frac{4R^2}{\mathrm{e}}\right).$$

Posledný dvojný integrál prejde substitúciou $t = \varphi + \frac{\pi}{2}$ na tvar

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\cdot\ln\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi}\cos^2\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\cdot\ln\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\pi}\sin^2 t\cdot\ln\sin t\,\mathrm{d}t \overset{\text{Príklad 15}}{=} \frac{\pi}{4}(1 - \ln 4)$$

(samy overte :)). Teda nevlastný dvojný integrál I v zadaní príkladu konverguje s finálnou hodnotou

$$I = 4R^2\cdot\frac{\pi}{4}(1 - \ln 4) + \pi R^2\ln\left(\frac{4R^2}{\mathrm{e}}\right) = 2\pi R^2\ln R\quad :)$$

(samy overte záverečný výpočet ;)).