INTEGRÁLNE KRITÉRIUM

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad ; \quad a_n \hookrightarrow \text{nerastúca}$$

20. $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n} \quad ; \quad a_n = \frac{1}{n \ln^2 n} \longrightarrow f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}, \; x \in [2, \infty)$$

$f(x)$ je nezáporná a nerastúca ;

$$f'(x) = -\frac{\ln^2 x + \ln x}{(x \ln^2 x)^2} < 0$$

$$\int_2^{\infty} f(x)\,dx = \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x}\,dx = \left| t = \ln x \right| \cdots = \left[-\frac{1}{t} \right]_{\ln 2}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow K \Rightarrow \text{rad } K$$

---

21. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$\alpha \leq 0 \Longrightarrow D$

$\alpha = 1 \Rightarrow \sum \frac{1}{n} \rightsquigarrow D$

$\alpha \in (0, \infty) \setminus \{1\} \rightsquigarrow f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ je nezáp. a nerastúca

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{x \to \infty} x^{1-\alpha} + \frac{1}{\alpha - 1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \infty, & \alpha \in (0, 1] \rightsquigarrow D \\ \frac{1}{\alpha - 1}, & \alpha \in (1, \infty) \rightsquigarrow K \end{cases}$$

LEIBNIZOVO KRITÉRIUM

alternujúci rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$; $a_n > 0$

ak $\{a_n\}$ je $\searrow$ $\Rightarrow \left[(K) \Leftarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \right]$

22.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{2^n} \quad ; \quad a_n = \frac{n^2}{2^n}$$

$\{a_n\}$ je nerastúca, lebo: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} < 1$

pre $n \geq 3$

platí: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0 \Rightarrow$ (K)

23.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n + \frac{1}{n}\right)\pi \quad ; \quad \sin\left(n+\frac{1}{n}\right)\pi = \sin\left[n\pi + \frac{\pi}{n}\right] =$$

$$= \sin n\pi \cos\frac{\pi}{n} + \cos n\pi \sin\frac{\pi}{n} = (-1)^n \sin\frac{\pi}{n}$$

$\sin\frac{\pi}{n} \geq 0$ pre $n \in \mathbb{N}$ $\longrightarrow$ alternujúci rad s $a_n = \sin\frac{\pi}{n}$

$\{a_n\}$ je klesajúca pre $n \geq 2$ a $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{n} = 0$

$\Rightarrow$ (K)

ABSOLÚTNA / NEABSOLÚTNA KONVERGENCIA

$\sum |a_n|$ je K $\Rightarrow$ $\sum a_n$ K $\rightsquigarrow$ AK

$\sum |a_n|$ je D $\wedge$ $\sum a_n$ K $\rightsquigarrow$ NK (RK)

---

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{6^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{6^n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{6^n}$

$\frac{|\sin n|}{6^n} \leq \frac{1}{6^n}$; $\sum \frac{1}{6^n}$ K

$\Rightarrow$ náš rad AK

---

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{\ln n}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

$a_n = \frac{\ln n}{n}$; $b_n := \frac{1}{n}$; rad $\sum b_n$ D

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln n}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \ln n = \infty \Rightarrow \sum a_n$ D

náš rad teda nekonverguje absolútne; konverguje rad. ???

$\rightsquigarrow$ alternujúci rad, $\left\{\frac{\ln n}{n}\right\}$ je nerastúca pre $n \geq 3$ a

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \Rightarrow$ NK

26.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n+1} \quad ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{n+2}{n+1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1} \rightsquigarrow D$$

(nutná podm.)

náš rad je alternujúci, $a_n = \frac{n+2}{n+1}$ je klesajúca, lebo

$$a_n = 1 + \frac{1}{n+1}$$

ale $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = 1 \neq 0 \Rightarrow D$

27.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \quad ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

rad s absolút. hodnot. porovnáme s radom $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^{3/2}}$

(tento rad K):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{n\sqrt{n}}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = 1 \Rightarrow \text{náš rad AK}$$

DIRICHLETOVO, ABELOVO KRITÉRIUM

$\sum a_n b_n$; b_n je monotónna postup.

DIRICHLET: $\sum a_n$ má ohraničené čiastočné súčty a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

$$\Rightarrow \sum a_n b_n \ K$$

ABEL: $\sum a_n$ K a $\{b_n\}$ je ohraničená

$$\Rightarrow \sum a_n b_n \ K$$

(28.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$; $a_n := \cos n$, $b_n := \frac{1}{n}$

$\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \cos n$ má ohraničené čiast. súčty ;

$\{b_n\}$ je klesajúca a $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\Rightarrow$ DIRICHLET $\Rightarrow$ náš rad (K)

(29.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$; $a_n := (-1)^{n-1}$; $b_n := \frac{1}{n}$

$\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ má ohraničené čiast. súčty :

$s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} = \begin{cases} 1, & n \text{ nep.} \\ 0, & n \text{ pár.} \end{cases}$;

$\{b_n\}$ je klesajúca a $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\Rightarrow$ DIRICHLET $\Rightarrow$ (K)

(30.) ak $\{a_n\}$ je monotónna a $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n$ (K)

DÔKAZ

vyplýva z DIRICHLETA, lebo $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$ má ohraničené čiast. súčty $/\!/$

---

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+2}}$; $\frac{(n+1)^n}{n^{n+2}} = \frac{(n+1)^n}{n^n} \cdot \frac{1}{n^2} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n^2}$

$a_n := \frac{1}{n^2}$; $b_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (K) ; $\{b_n\}$ je rastúca a ohraničená (lebo je konvergentná)

$\Rightarrow$ ABEL $\Rightarrow$ náš rad (K)

---

32. ak $\sum a_n$ konverguje $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sqrt[n]{n}$ (K)

DÔKAZ

vyplýva z ABELA, lebo $\{\sqrt[n]{n}\}$ je pre $n \geq 3$ klesajúca a ohraničená (má limitu 1)

platí $\sqrt[n+1]{n+1} \leq \sqrt[n]{n}$ pre $n \geq 3$

($\Leftrightarrow$ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq n$ pre $n \geq 3$)

SÚČINY RADOV

$\sum a_n$, $\sum b_n$

$a_1 b_1,\ a_1 b_2,\ a_1 b_3,\ a_1 b_4, \dots$

$a_2 b_1,\ a_2 b_2,\ a_2 b_3,\ a_2 b_4, \dots$

$a_3 b_1,\ a_3 b_2,\ a_3 b_3,\ a_3 b_4, \dots$

$a_4 b_1,\ a_4 b_2,\ a_4 b_3,\ a_4 b_4, \dots$

súčin $\sum a_n \cdot \sum b_n$ je každý rad s nejakým usporiadaním všetkých členov $a_i b_j$

DIRICHLETOV SÚČIN:

$$\begin{array}{lllll}
c_1 \leftarrow & a_1 b_1, & a_1 b_2, & a_1 b_3, & a_1 b_4, \ldots \\
c_2 \leftarrow & a_2 b_1, & a_2 b_2, & a_2 b_3, & a_2 b_4, \ldots \\
c_3 \leftarrow & a_3 b_1, & a_3 b_2, & a_3 b_3, & a_3 b_4, \ldots \\
c_4 \leftarrow & a_4 b_1, & a_4 b_2, & a_4 b_3, & a_4 b_4, \ldots
\end{array}$$

$\sum c_n = \sum a_n \sum b_n$; ak $\sum a_n = a$, $\sum b_n = b$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum c_n = a \cdot b$

CAUCHYHO SÚČIN:

$$\begin{array}{lllll}
c_1 \leftarrow & a_1 b_1, & a_1 b_2, & a_1 b_3, & a_1 b_4, \ldots \\
c_2 \leftarrow & a_2 b_1, & a_2 b_2, & a_2 b_3, & a_2 b_4, \ldots \\
c_3 \leftarrow & a_3 b_1, & a_3 b_2, & a_3 b_3, & a_3 b_4, \ldots \\
c_4 \leftarrow & a_4 b_1, & a_4 b_2, & a_4 b_3, & a_4 b_4, \ldots
\end{array}$$

$\sum c_n = \sum a_n \sum b_n$

ak $\sum a_n = a$, $\sum b_n = b$ a aspoň jeden z nich konverg. absolútne $\Rightarrow \sum c_n = a \cdot b$

---

33. $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n}\right)^2$ podľa DIRICHLETA ; $q>1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^n = \frac{1/q}{1-1/q} = \frac{1}{q-1} \quad ;$$

$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n}\right)^2 = \frac{1}{(q-1)^2}$, aké sú členy radu $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n}\right)^2$?

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_n + a_3 b_n + \dots + a_n b_n + a_n b_{n-1} + a_n b_{n-2} + \dots$$
$$\dots + a_n b_2 + a_n b_1$$

$$c_n = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{q^n} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^n} + \dots + \frac{1}{q^n} \cdot \frac{1}{q^n} + \frac{1}{q^n} \cdot \frac{1}{q^{n-1}} + \frac{1}{q^n} \cdot \frac{1}{q^{n-2}} + \dots$$
$$\dots + \frac{1}{q^n} \cdot \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^n} \cdot \frac{1}{q}$$

$$= \frac{1}{q^n} \cdot \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots + \frac{1}{q^n}\right) + \frac{1}{q^n}\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots + \frac{1}{q^{n-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{q^n} \cdot \frac{1}{q} \cdot \frac{1 - 1/q^n}{1-1/q} + \frac{1}{q^n} \cdot \frac{1}{q} \cdot \frac{1 - 1/q^{n-1}}{1-1/q}$$

$$= \dots\dots = \frac{2q^n - q - 1}{q^{2n}(q-1)}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2q^n - q - 1}{q^{2n}(q-1)} = \frac{1}{(q-1)^2}}$$

34. $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n}\right)^2$ podle CAUHYHO , $q > 1$

opäť $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n}\right)^2 = \frac{1}{(q-1)^2}$ (rady AK)

$$c_n = \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{q^l} \cdot \frac{1}{q^{n+1-l}} = \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{q^{n+1}} = \frac{n}{q^{n+1}}$$

platí teda $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{q^{n+1}} = \frac{1}{(q-1)^2}}$

---

35. súčin $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{q^n}\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n}\right)$ podľa CACHYHO, $q > 1$

platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{q^n} = 2q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{q^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n} = \frac{2q}{(q-1)^2} - \frac{1}{q-1} =$$

$$= \frac{q+1}{(q-1)^2} \rightsquigarrow \text{AK}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n} = \frac{1}{q-1} \rightsquigarrow \text{AK}$$

potom: $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{q^n}\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n}\right) = \frac{q+1}{(q-1)^2} \cdot \frac{1}{(q-1)} = \frac{q+1}{(q-1)^3}$

aké sú členy tohto súčinu?

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{q^k} \cdot \frac{1}{q^{n+1-k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{q^{n+1}} = \frac{1}{q^{n+1}} \cdot \sum_{k=1}^{n} (2k-1)$$

$$= \frac{1}{q^{n+1}} \left(1+3+5+7+\dots+2n-1\right) = \frac{1}{q^{n+1}} n^2$$

preto:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{q^{n+1}} = \frac{q+1}{(q-1)^3}}$$

NUMERICKÁ SUMÁCIA

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad , \quad R_n := s - s_n$$

$|R_n|$ je absolútna chyba aproximácie, $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n| = 0$

36.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n}{n!}$$ alternujúci rad (K)

$\left(a_n := \frac{2^n}{n!} \text{ je nerastúca}, \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0 \right)$

odhad súčtu s chybou $\leq 10^{-3}$

$$|R_n| < a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \Rightarrow \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \leq 10^{-3}$$

$$\frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \geq 1000 \rightsquigarrow \underline{n \geq 9}$$

$$s \approx \sum_{n=1}^{9} (-1)^{n-1} \frac{2^n}{n!}$$

---

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, rad (K) (integrálne krit.)

$a_n = \frac{1}{n^3}$ je nezáporná a klesajúca, $f(x) = \frac{1}{x^3}$

$$|R_n| \leq \int_n^{\infty} f(x)\,dx = \int_n^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2n^2}$$

odhad s chybou $\leq 10^{-2}$

$$|R_n| \leq \frac{1}{2n^2} \leq 10^{-2} \rightsquigarrow 2n^2 \geq 100 \rightsquigarrow n \geq 7$$

$$s \approx \sum_{n=1}^{7} \frac{1}{n^3}$$

---

38. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} < \frac{1}{n^3} \Rightarrow$ je (K)

$|R_n| \leq \frac{1}{2n^2}$; odhad s chybou $\leq 10^{-4}$

$$|R_n| \leq \frac{1}{2n^2} \leq 10^{-4} \rightsquigarrow 2n^2 \geq 10\,000 \rightsquigarrow n \geq 71$$

$$s \approx \sum_{n=1}^{71} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

39.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$$; je $\boxed{K}$ podle podílového krit.:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n3^n}{(n+1)3^{n+1}} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{3} < \frac{1}{3} < 1$$

$$|R_n| \leq a_n \cdot \frac{1/3}{1-1/3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n3^n}$$

odhad s chybou $\leq 10^{-2}$:

$$|R_n| \leq \frac{1}{2n3^n} \leq 10^{-2} \rightsquigarrow 2n3^n \geq 100 \rightsquigarrow \underline{n \geq 3}$$

$$s \approx \sum_{n=1}^{3} \frac{1}{n3^n}$$ //