Příklady zde uvedené jsou vybrány ať přímo, nebo nepřímo z knihy [1], [2] a z příkladů ze stránek VUT. Další příklady byly získány v nejrůznějších zdrojích a mnoho dalších příkladů je autorským dílem.

K uvedeným výsledkům mohou vést i jiné než zde uvedené postupy a doporučujeme řešení příkladů používat spíše ke kontrole postupu. Obecně platí, že nejlépe si lze osvojit probírané učivo aktivním počítáním a tato řešení tak slouží spíše ke kontrole.

Ve výpočtech se mohou nacházet chyby numerické chyby, postupy výpočtu by však měly být v pořádku. V případě nesrovnalostí se neváhejte ozvat.

Obsah

1 Dvojný integrál

Nechť $M = [a, b] \times [c, d]$ a funkce f je na množině M spojitá, potom platí

$$\iint_M f \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \int_c^d f \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_c^d \int_a^b f \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Převedeme tak dvojný integrál na dvojnásobný.

Pokud $F(x, y) = f(x)g(y)$, kde f, g jsou spojité funkce a $M = [a, b] \times [c, d]$, potom platí že

$$\iint_M F \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b f \mathrm{d}x \int_c^d g \mathrm{d}y.$$

Nechť funkce f je spojitá na množině

$$M = \{[x, y] | a \le x \le b, g(x) \le y \le h(x)\},$$

kde funkce g, h jsou spojité na intervalu $[a, b]$. Potom platí

$$\iint_M f \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Nebo pokud je funkce f je spojitá na množině

$$M = \{[x, y] | c \le y \le d, g(y) \le y \le h(y)\},$$

kde funkce g, h jsou spojité na intervalu $[c, d]$. Potom platí

$$\iint_M f \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \int_{g(y)}^{h(y)} f \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

I zde tímto postupem převedeme tak dvojný integrál dvojnásobný.

Je-li funkce f integrovatelná na množinách M a N, pak platí že

$$\iint_{M \cup N} f \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_M f \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_N f \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Jsou-li funkce f, g integrovatelné na množině M potom platí

$$\iint_M Af + Bg \mathrm{d}x\mathrm{d}y = A \iint_M f \mathrm{d}x\mathrm{d}y + B \iint_M g \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde A, B jsou konstanty.

Jsou-li funkce f, g integrovatelné na množině M a pokud platí na M že $f \le g$, pak také platí že

$$\iint_M f \mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \iint_M g \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Př. 1 *Vypočtěte dvojný integrál*

$$\iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde $M = [1,2] \times [3,6]$.

Jedná se o obdélník o obsahu $S = 3$. Navíc platí, že je-li $f(x,y) = 1$, poté je $\iint_M f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = S$. Množina M je tvořena obdélníkem, snadno tak převedeme integrál

$$\iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_3^6 \int_1^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2 \int_3^6 \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_1^2 [y]_3^6 \,\mathrm{d}x = \int_1^2 (6-3)\mathrm{d}x = 3\,[x]_1^2 = 3.$$

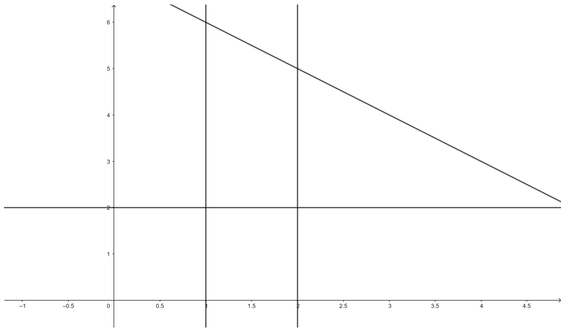
Vidíme tedy, že výsledek odpovídá.

Př. 2 *Vypočtěte dvojný integrál*

$$\iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde $M = [1,2] \times [2, -x+7]$.

Vidíme, že můžeme snadno integrál převést pomocí Fubiniho věty, neboť rozsahy máme dané. Vykreslíme-li si však množinu M, vidíme že lze M popsat ze druhé strany.



Vidíme, že z pohledu osy y je množina tvořena obdélníkem a trojúhelníkem. Obdélník je na ose y tvořen rozsahem $[2,5]$ a na intervalu $[5,6]$ se horní omezení změní a máme zde trojúhelník. Pomocí Fubiniho věty tedy převedeme integrál na dvojnásobný

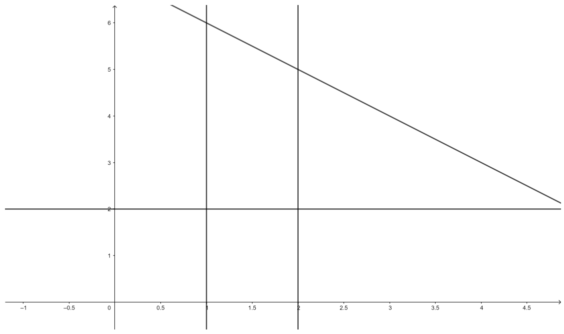
$$\iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_2^5 \int_1^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_5^6 \int_1^{-y+7} = \int_1^2 \int_2^{-x+7} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_1^2 (7-x-2)\mathrm{d}x =$$
$$= \left[5x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 10 - 2 + 5 - 1/2 = 13,5$$

Př. 3 *Vypočtěte dvojný integrál*

$$\iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je dána ohraničenými $x = 0$, $x = 1$, $y = x^2 + 1$, $y = x - 1$.

Snadno vidíme, že na intervalu $[0, 1]$ je $x^2 + 1 \geq x - 1$. Snadno tedy máme rozsah $0 \leq x \leq 1$, $x - 1 \leq y \leq x^2 + 1$. Hned můžeme přepsat integrál na dvojnásobný. Vykreslíme-li si množinu M



vidíme, že můžeme převést integrál také druhým způsobem. Z pohledu osy y se nám na intervalu $[-1, 0]$ jedná o trojúhelník, na intervalu $[0, 1]$ se jedná o čtverec a na intervalu $[1, 2]$ se změní dolní ohraničení na parabolu. Převedeme tedy počítaný integrál na dvojnásobný

$$\iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{0}\int_{0}^{y+1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{0}^{1}\int_{0}^{1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{1}^{2}\int_{\sqrt{y-1}}^{1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{0}^{1}\int_{x-1}^{x^2+1} \mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 (x^2 + 1 - x + 1)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^1 = \frac{2 - 3 + 12}{6} = \frac{11}{6}.$$

Př. 4 *Vypočtěte dvojný integrál*

$$\iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je dána ohraničenými $y^2 = x$, $1 \leq x \leq 3$.

Vidíme, že ohraničení $y^2 = x$ dává obvyklou parabolu pouze se zaměněnými proměnnými. Rozsah $1 \leq x \leq 3$ nám z této paraboly vysekne pás, který je zdola ohraničen dolním ramenem paraboly a shora horním ramenem paraboly. Převedeme tedy počítaný integrál na dvojnásobný

$$\iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^3 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_1^3 2\sqrt{x}\mathrm{d}x = \left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\right]_1^3 = \frac{2}{3}(\sqrt{27} - 1)$$

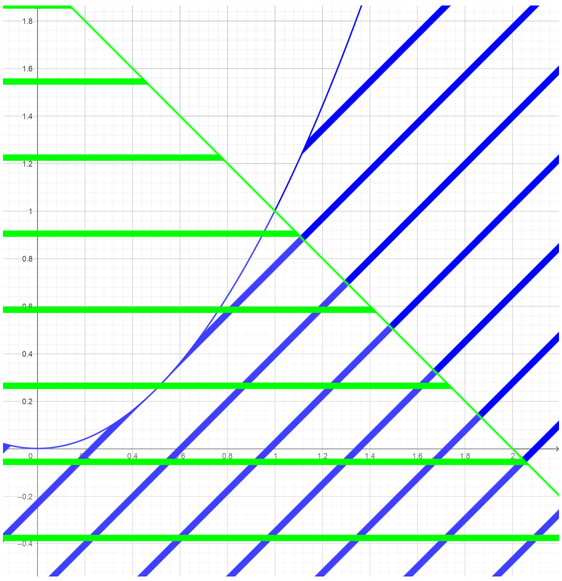
Př. 5 *Vypočtěte dvojný integrál*

$$\iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je dána ohraničenými $y \leq x^2$, $y \leq -x+2$, $y \geq 0$, $x \geq 0$.

Najdeme nejprve průsečík funkcí $y = x^2$ a $y = -x+2$. Dostáváme tak skrze rovnost $x^2 = y = -x+2$ polynom $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1) = 0$. Neboť se pohybujeme na kladné poloose, hledaným průsečíkem je bod $[1,1]$. Průsečíky křivek s osou x pak snadno nalezneme jako body $[0,0]$ a $[2,0]$. Na intervalu $[0,1]$ vidíme, že $x^2 \leq -x+2$. Na intervalu $[1,2]$ platí nerovnost naopak. Jinde nás situace nezajímá, neboť jinde není splněna podmínka $0 \leq y \leq -x+2$, nebo podmínka $x \geq 0$.

Křivky můžeme také vykreslit na obrázku spolu s uvažovanými množinami



Z těchto úvah vidíme, že množinu můžeme zapsat dvěma způsoby, kde jedním dostaneme dva integrály, neboť dojde ke změně horního ohraničení. Druhým způsobem pak vidíme, že dostaneme jen jeden integrál. Nyní převedeme počítaný integrál na dvojnásobný

$$\iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{x^2} \mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_1^2 \int_0^{-x+2} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{-y+2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^1 (-y+2-\sqrt{y})\mathrm{d}y = \left[-\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{2}{3}\sqrt{y^3}\right]_0^1 = \frac{-3+12-4}{6} = \frac{7}{6}.$$

Př. 6 *Vypočtěte dvojný integrál*

$$\iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je dána ohraničenými $y \geq x^2$, $y \leq -x+2$, $x \geq 0$.

Průsečík křivek $y = x^2$ a $y = -x+2$ jsme nalezli již v předchozím příkladě. Můžeme tedy převést počítaný integrál na dvojnásobný

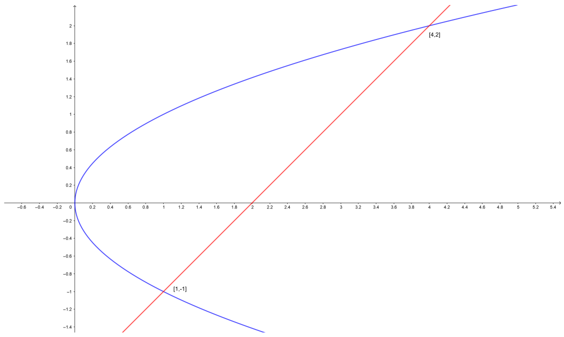
$$\iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_{x^2}^{-x+2} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 + x - 2\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_0^1 = \frac{2+3-12}{6} = \frac{-7}{6}$$

Př. 7 *Vypočtěte dvojný integrál*

$$\iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je dána ohraničenými $y^2 = x$, $y = x - 2$.

Nejdříve spočítáme průsečíky obou křivek, tj. $y^2 = x = y + 2$ a tedy hledáme kořeny $0 = y^2 - y - 2 = (y-2)(y+1)$. Průsečíky jsou tedy body $[1, -1]$ a $[4, 2]$. Vykreslením křivek vidíme situaci jako



Vidíme, že postupujeme-li po ose x, mění se horní ohraničení i dolní ohraničení. Postupujeme-li po ose y, zůstávají horní a dolní ohraničení stejné. Dostaneme tedy

$$\iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_1^4 \int_{x-2}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{-1}^2 \int_{y^2}^{y+2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^2 (y + 2 - y^2)\mathrm{d}y =$$

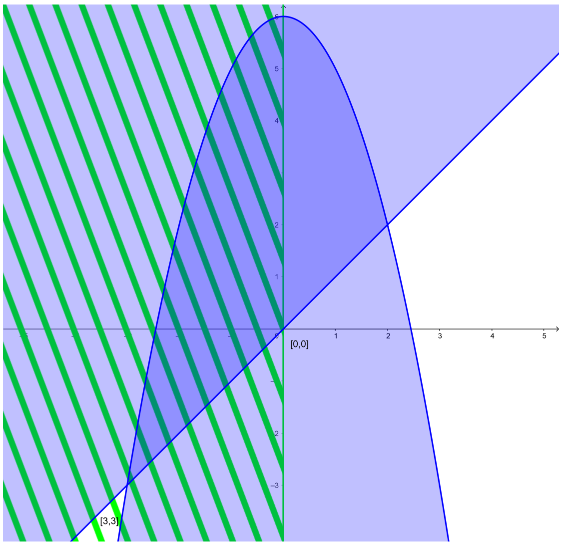
$$= \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^2 = \frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} = \frac{12 + 24 - 16 - 3 - 12 + 2}{6} = \frac{7}{6}.$$

Př. 8 *Vypočtěte dvojný integrál*

$$\iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je dána ohraničenými $y \geq x$, $y \leq 6 - x^2$, $x \leq 0$.

Nalezneme nejdříve průsečíky křivek $y = x$ a $y = 6 - x^2$. Hledáme kořeny $0 = x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$. Neboť však $x \leq 0$, podmínky splňuje pouze průsečík $[-3, -3]$. Spolu s ohraničením $x \leq 0$ je tedy $-3 \leq x \leq 0$. Vidíme, že horní ohraničení je tvořeno křivkou $y = 6 - x^2$ a dolní $y = x$, neboť pro $x \in [-3, 0]$ platí $x \leq 6 - x^2$. Situaci si můžeme také vykreslit



Můžeme tedy převést počítaný integrál na dvojnásobný

$$\iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-3}^{0}\int_{x}^{6-x^2} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{-3}^{0} 6 - x^2 - x\mathrm{d}x = \left[6x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{0} =$$

$$= -18 + \frac{27}{3} - \frac{9}{2} = -9 - \frac{9}{2}$$

Př. 9 *Vypočtěte dvojný integrál*

$$\iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je dána ohraničenými $y \leq \mathrm{e}^x + 1$, $-2 \leq x \leq 1$, $y \geq -2$.

Neboť na intervalu $[-2, 1]$ splňuje funkce $\mathrm{e}^x + 1 > 0 > -2$, máme na intervalu jasně dané horní i dolní ohraničení. Převedeme počítaný integrál na dvojnásobný

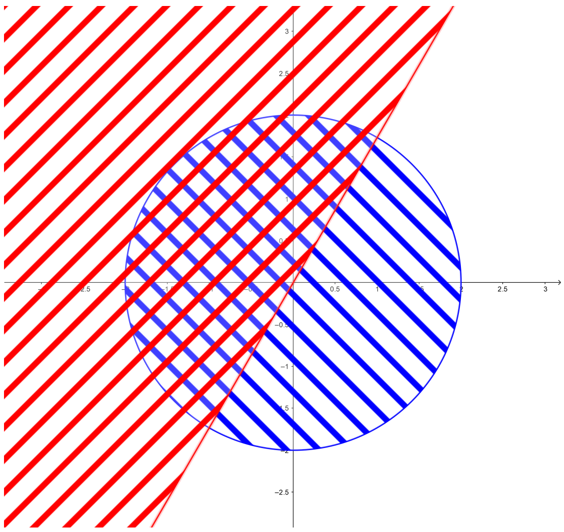
$$\iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-2}^{1} \int_{\mathrm{e}^x+1}^{-2} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{-2}^{1} \mathrm{e}^x + 3\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x + 3x]_{-2}^{1} =$$
$$= \mathrm{e}^1 + 3 - \mathrm{e}^{-2} + 6 = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{-2} + 9$$

Př. 10 *Převeďte dvojný integrál na dvojnásobný*

$$\iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je dána ohraničenými $x^2 + y^2 \leq 4$, $y \geq \sqrt{3}x$.

Nejprve nalezneme průsečíky křivek $y = \sqrt{3}x$ a $x^2 + y^2 = 4$ řešíme rovnici $x^2 + 3x^2 = 4$ což dává řešení $x = \pm 1$. Máme tak průsečíky $[-1, -\sqrt{3}]$ a $[1, \sqrt{3}]$. Z rovnice kružnice vyjádříme $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$. Vidíme, že intervalu $[-2, -1]$ je $-\sqrt{4 - x^2} \geq\geq \sqrt{3}x$ už jen z podstaty kružnice a přímky. Na intervalu $[-1, 1]$ se pak tato nerovnost obrací. Celou situaci můžeme vykreslit na obrázku



Dostáváme integrál

$$\iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-2}^{-1}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1}\int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{4-x^2}} =$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{y/\sqrt{3}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\sqrt{3}}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Př. 11 *Převeďte dvojný integrál na dvojnásobný*

$$\iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je dána ohraničenými $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq |x|$.

Nalezneme průsečíky křivek $x^2+y^2 = 1$ a $y = |x|$. Dosazením získáme, že hledáme řešení rovnice $2x^2 = 1$, což je $x = \pm 1/\sqrt{2}$ a tudíž $y = 1/\sqrt{2}$. Na intervalu daném rozsahem $x = \pm 1/\sqrt{2}$ vidíme, že absolutní hodnota má menší funkční hodnoty než je kružnice daná $x^2+y^2 \leq 1$. Stačí si dosadit $x = 0$. Dostaneme tak

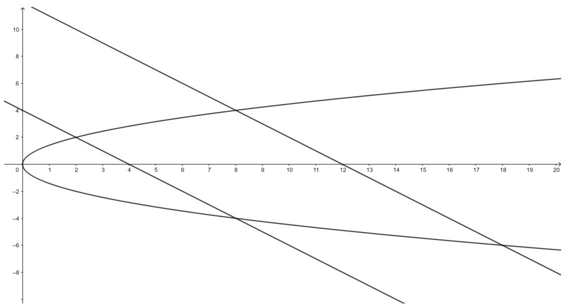
$$\iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \int_{|x|}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{-1/\sqrt{2}}^{0} \int_{-x}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_{0}^{1/\sqrt{2}} \int_{x}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Z pohledu osy y však vidíme, že se nám v bodě $y = 1/\sqrt{2}$ mění horní i dolní ohraničení. Na intervalu $[0, 1/\sqrt{2}]$ jsme vymezeni trojúhelníkem daným z absolutní hodnoty a na intervalu $[1/\sqrt{2}, 1]$ pak useknutou částí kružnice. Můžeme tedy vyjádřit z kružnice $x^2 + y^2 = 1$ proměnnou x vzhledem k y a dostaneme integrál také jako

$$\iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{0}^{1/\sqrt{2}} \int_{-y}^{y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{1/\sqrt{2}}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Př. 12 *Spočtěte* $\iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, *kde* M *je dána skrze* $x+y=4$, $x+y=12$ *a* $y^2=2x$.

Nejprve nalezneme průsečíky ohraničujících funkcí. Přímky $x+y=4$ a $x+y=12$ jsou rovnoběžné, nemají tedy žádný průsečík. Průsečík křivek $x+y=12$ a $y^2=2x$ dostaneme skrze kořeny polynomu $0=y^2+2y-24=(y+6)(y-4)$ což dává průsečíky $[18,-6]$ a $[8,4]$. Průsečík křivek $x+y=4$ a $y^2=2x$ je obdobně dán skrze kořeny polynomu $0=(y+4)(y-2)$. Průsečíky jsou $[8,-4]$ a $[2,2]$. Musíme si pouze rozmyslet která funkce má větší funkční hodnoty a která menší. To můžeme zjistit analyticky nebo také graficky z obrázku



Dostáváme tak integrál

$$\begin{aligned}
\iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_2^8 \int_{4-x}^{\sqrt{2x}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_8^{18} \int_{-\sqrt{2x}}^{12-x} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \\
&= \int_2^8 \sqrt{2x} + x - 4\mathrm{d}x + \int_8^{18} 12 - x + \sqrt{2x}\mathrm{d}x = \\
&= \left[\frac{2\sqrt{2x^3}}{3} + \frac{x^2}{2} - 4x\right]_2^8 + \left[12x - \frac{x^2}{2} + \frac{2\sqrt{2x^3}}{3}\right]_8^{18} = \\
&= \frac{2^6}{3} + 2^5 - 2^5 - \frac{2^3}{3} + 6 + 120 - 2\cdot 3^4 + 2^3 3^2 + 2^5 - \frac{2^6}{3} = \frac{106}{3}
\end{aligned}$$

Př. 13 *Spočtěte* $\iint_M y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* M *je dána skrze* $x^2 - y + 2 = 0$*,* $x + y - 4 = 0$*.*

Nejprve spočteme průsečík obou křivek. Dostáváme polynom $x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$. Průsečíky jsou tedy $[-2, 6]$ a $[1, 3]$. Všimneme si, že na intervalu $-2 \leq x \leq 1$ je $x^2 + 2 \leq 4 - x$. Stačí si dosadit nějaký bod, například $x = 0$ a uvážit, že vzhledem k průsečíkům musí být tato nerovnost splněna všude. Dostáváme takto integrál

$$\begin{aligned}\iint_M y\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-2}^{1}\int_{x^2+2}^{4-x} y\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{-2}^{1}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2+2}^{4-x}\mathrm{d}x = \int_{-2}^{1}\frac{(4-x)^2-(x^2+2)^2}{2}\mathrm{d}x = \\ &= \int_{-2}^{1}\frac{16-8x+x^2-(x^4+4x^2+4)}{2}\mathrm{d}x = \int_{-2}^{1}\frac{12-8x-3x^2-x^4}{2}\mathrm{d}x = \\ &= \left[6x-2x^2-\frac{x^3}{2}-\frac{x^5}{10}\right]_{-2}^{1} = 6-2-\frac{1}{2}-\frac{1}{10}+12+8-4-\frac{32}{10} = \frac{162}{10}\end{aligned}$$

Př. 14 *Spočtěte*

$$\iint_M \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je dána skrze $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$, $y^2 = x$.

Vidíme, že na intervalu $1 \leq y \leq 2$ je $0 \leq x \leq y^2$ již ze zápisu. Obdobně můžme převést integrál z pohledu osy y, pokud si všimneme, že vysekáváme pás pod parabolou a v jistém okamžiku musí dojít ke změně dolní hranice. Stačí si vše vykreslit. Počítáme integrál

$$\iint_M \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2 \int_0^{y^2} \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_1^2 \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} \,\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_1^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} \,\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Vybereme si vhodný integrál k dalšímu výpočtu a máme

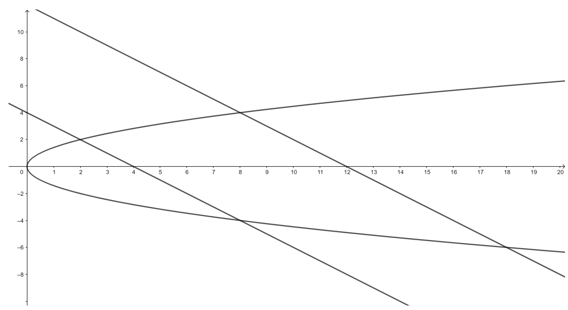
$$\begin{aligned}\iint_M \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_1^2 \int_0^{y^2} \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2 \left[y\,\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\right]_0^{y^2} \mathrm{d}y = \int_1^2 y\,\mathrm{e}^y \,\mathrm{d}y = \\ &= \left[y\,\mathrm{e}^y\right]_1^2 - \int_1^2 \mathrm{e}^y \,\mathrm{d}y = 2\,\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}^2\,.\end{aligned}$$

Př. 15 *Spočtěte*

$$\iint_M xy^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M *je dána skrze* $x^2 + y^2 \leq 1$, $x + y \geq 1$.

Vyšetřovanou množinu si můžeme vykreslit



Vidíme tedy že vyšetřovaná množina je stejné z pohledu osy x stejně jako z pohledu osy y neboť je množina symetrická přes osu $y = x$. Převedeme integrál

$$\iint_M xy^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} xy^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} xy^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Vybereme si vhodný integrál k dalšímu výpočtu a máme

$$\begin{aligned}\iint_M xy^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} xy^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 y^2 \left[\frac{x^2}{2}\right]_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}y = \\ &= \int_0^1 y^2 \frac{(1-y^2) - (1-y)^2}{2} \mathrm{d}y = \\ &= \int_0^1 y^3 - y^4 \mathrm{d}y = \left[\frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{20}\end{aligned}$$

Př. 16 *Spočtěte*

$$\iint_M x^2 y \mathrm{d}x \mathrm{d}y,$$

kde M je dána skrze $x = 1$, $x = 4$, $y = -2$, $y = 3$.

Vyšetřovaná množina je obdélník. Snadno tedy převedeme integrál. Počítáme

$$\begin{aligned}\iint_M x^2 y \mathrm{d}x \mathrm{d}y &= \int_1^4 \int_{-2}^3 x^2 y \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int_1^4 x^2 \mathrm{d}x \int_{-2}^3 y \mathrm{d}y = \\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^4 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{-2}^3 = \frac{64-1}{3} \cdot \frac{9-4}{2} = \frac{105}{2}.\end{aligned}$$

Př. 17 *Spočtěte*

$$\iint_M \frac{x^2}{1+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je dána skrze $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$.

Vyšetřovaná množina je obdélník. Snadno tedy převedeme integrál. Počítáme

$$\iint_M \frac{x^2}{1+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 x^2\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 [\operatorname{arctg} y]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

Př. 18 *Spočtěte*

$$\iint_M \sqrt{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je dána skrze $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 3$.

Vyšetřovaná množina je obdélník. Snadno tedy převedeme integrál. Počítáme

$$\iint_M \sqrt{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 \int_0^3 \sqrt{xy}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^2 \sqrt{x}\mathrm{d}x \int_0^3 \sqrt{y}\mathrm{d}y =$$

$$= \left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\right]_0^2 \left[\frac{2\sqrt{y^3}}{3}\right]_0^3 = \frac{4\sqrt{8 \cdot 27}}{9} = \frac{8\sqrt{6}}{3}$$

Př. 19 *Spočtěte*

$$\iint_M \sin(2x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je dána skrze $0 \le x \le \pi$, $\pi/4 \le y \le \pi$.

Vyšetřovaná množina je obdélník. Snadno tedy převedeme integrál. Počítáme

$$\begin{aligned}
\iint_M \sin(2x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^\pi \int_{\pi/4}^\pi \sin(2x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^\pi \left[-\cos(2x+y)\right]_{\pi/4}^\pi \mathrm{d}x = \\
&= \int_0^\pi -\cos(2x+\pi) + \cos(2x+\pi/4)\mathrm{d}x = \\
&= \left[\frac{-\sin(2x+\pi)+\sin(2x+\pi/4)}{2}\right]_0^\pi = \\
&= \frac{-\sin(3\pi)+\sin(2pi+\pi/4)+\sin(\pi)-\sin(\pi/4)}{2} = \\
&= \frac{-\sin(\pi)+\sin(\pi/4)+\sin(\pi)-\sin(\pi/4)}{2} = 0
\end{aligned}$$

Obdobně můžeme počítat

$$\begin{aligned}
\iint_M \sin(2x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{\pi/4}^\pi \int_0^\pi \sin(2x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^\pi \int_{\pi/4}^\pi \sin 2x \cos y + \cos 2x \sin y \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^\pi \sin 2x \mathrm{d}x \int_{\pi/4}^\pi \cos y \mathrm{d}y + \int_0^\pi \cos 2x \mathrm{d}x \int_{\pi/4}^\pi \sin y \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Př. 20 *Spočtěte*

$$\iint_M x \cos y \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je dána skrze $1 \leq x \leq 2$, $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$.

Vyšetřovaná množina je obdélník. Snadno tedy převedeme integrál. Počítáme

$$\begin{aligned}\iint_M x \cos y \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_1^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \cos y \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_1^2 x\mathrm{d}x \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos y \mathrm{d}y = \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 [\sin y]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{3}{2}\left(\sin \pi/2 - \sin(-\pi/2)\right) = 3\sin(\pi/2) = 3\end{aligned}$$

Př. 21 *Spočtěte*

$$\iint_M \mathrm{e}^y + 2x \mathrm{d}x \mathrm{d}y,$$

kde M *je dána skrze* $y \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

Omezení máme již zadané ve správném tvaru. Proto snadno převedeme dojný integrál na dvojnásobný a počítáme

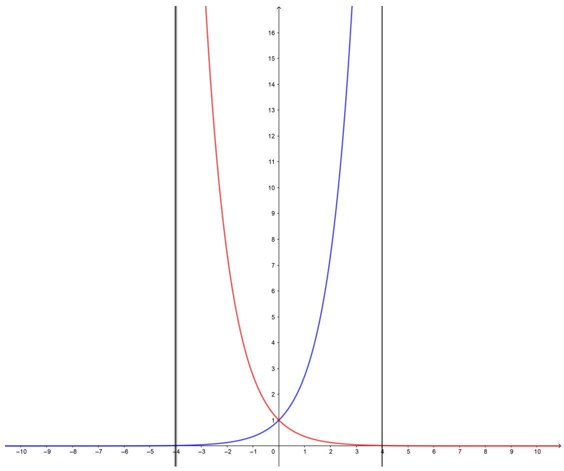
$$\begin{aligned}\iint_M \mathrm{e}^y + 2x \mathrm{d}x \mathrm{d}y &= \int_0^1 \int_y^1 \mathrm{e}^y + 2x \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_0^1 \left[x \mathrm{e}^y + x^2\right]_y^1 \mathrm{d}y = \\ &= \int_0^1 (1-y)\mathrm{e}^y + 1 - y^2 \mathrm{d}y = \left[(1-y)\mathrm{e}^y\right]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^y \mathrm{d}y + \left[y - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \\ &= -1 + \mathrm{e} - 1 + 1 - \frac{1}{3} = \mathrm{e} - \frac{4}{3}\end{aligned}$$

Př. 22 *Spočtěte plochu ohraničenou křivkami* $y = \mathrm{e}^x$, $y = \mathrm{e}^{-x}$, $x = -4$ *a* $x = 4$.

Plochu spočítáme jednoduše integrálem jedné proměnné, nebo pro procvičení skrze dvojný integrál. Počítáme Víme, že křivky $y = \mathrm{e}^x$, $y = \mathrm{e}^{-x}$ se protínají v bodě $[0,1]$ a na $x \geq 0$ je $\mathrm{e}^x \geq \mathrm{e}^{-x}$ a pro $x \leq 0$ je tomu přesně naopak. Počítáme

$$\begin{aligned} S &= \iint_M 1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-4}^{0} \int_{\mathrm{e}^x}^{\mathrm{e}^{-x}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_0^4 \int_{\mathrm{e}^{-x}}^{\mathrm{e}^x} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \\ &= 2 \int_0^4 \int_{\mathrm{e}^{-x}}^{\mathrm{e}^x} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = 2 \int_0^4 \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x = 2 \left[\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right]_0^4 = \\ &= 2 \left(\mathrm{e}^4 + \frac{1}{\mathrm{e}^4} - 2 \right) \end{aligned}$$

Křivky můžeme také vykreslit



Př. 23 *Spočtěte plochu ohraničenou křivkami $y = 0$, $y = \cos x$, $x = 0$ a $x = \pi/2$.*

Plochu spočítáme jednoduše integrálem jedné proměnné, nebo pro procvičení skrze dvojný integrál. Víme, že na intervalu $[0, \pi/2]$ je $0 \leq \cos x$. Snadno tak převedeme dvojný integrál na dvojnásobný a počítáme

$$S = \iint_M 1 \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos x} \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \cos x \mathrm{d}x = [\sin x]_0^{\pi/2} = 1$$

Př. 24 *Spočtěte*

$$\iint_M x - y \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je dána skrze $y = 1 - x^2$, $2y = x + 1$.

Nejdříve nalezneme průsečíky křivek skrze rovnici $2-2x^2 = x+1$, což vede na polynom $2x^2+x-1$ a hledané průsečíky jsou $[-1,0]$ a $[1/2,3/4]$. Pro $-1 \le x \le \frac{1}{2}$ je $\frac{x+1}{2} \le 1 - x^2$, stačí vše ověřit dosazením $x = 0$ a uvážením, že máme známé průsečíky a mezi nimi se nemůže nerovnost změnit vzhledem ke spojitosti. Počítáme

$$\begin{aligned}
\iint_M x - y \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-1}^{1/2} \int_{\frac{x+1}{2}}^{1-x^2} x - y \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1/2} \left[xy - \frac{y^2}{2}\right]_{\frac{x+1}{2}}^{1-x^2} \mathrm{d}x = \\
&= \int_{-1}^{1/2} x - x^3 - \frac{(1-x^2)^2}{2} - \frac{x^2+x}{2} + \frac{(x+1)^2}{8} \mathrm{d}x = \\
&= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1/2} + \int_{-1}^{1/2} \frac{-1+2x^2-x^4-x^2-x}{2} + \frac{x^2+2x+1}{8} \mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{8} - \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \left[-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{10} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^2+x}{8}\right]_{-1}^{1/2} = \\
&= \frac{8-1-32+16}{2^6} + \left[\frac{-9x-3x^2+5x^3}{24} - \frac{x^5}{10}\right]_{-1}^{1/2} = \frac{-187}{960}
\end{aligned}$$

Př. 25 *Spočtěte plochu ohraničenou křivkami $x + y = 1$, $x + y = 2$, $y = x/2$, $y = 2x$.*

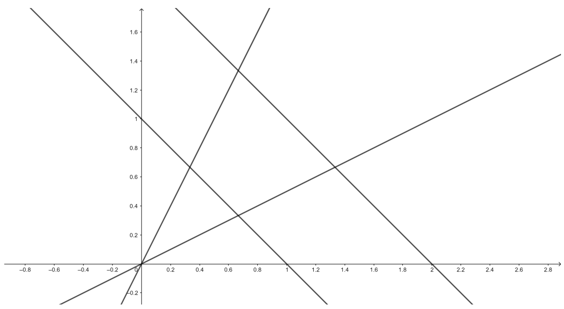
Ve všech případech se jedná o přímky, ty mají vždy jen jeden společný bod. Křivky $x + y = 1$, $x + y = 2$ jsou rovnoběžné, proto nemají žádný průnik. Přímky $y = x/2$, $y = 2x$ mají očividně průnik v bodě $[0, 0]$. Další průniky pak dopočítáme jako

$$
\begin{aligned}
x + y = 1 \cap y = \frac{x}{2} &\to \left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right], \\
x + y = 1 \cap y = 2x &\to \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \\
x + y = 2 \cap y = \frac{x}{2} &\to \left[\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right], \\
x + y = 2 \cap y = 2x &\to \left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right].
\end{aligned}
$$

Počítáme tedy integrál

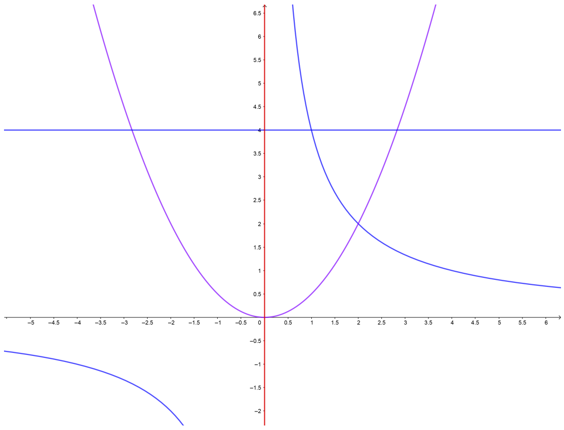
$$
\begin{aligned}
S &= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \int_{1-x}^{2x} \mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}} \int_{\frac{x}{2}}^{2-x} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \\
&= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} 3x - 1\mathrm{d}x + \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}} 2 - \frac{3x}{2}\mathrm{d}x = \\
&= \left[\frac{3x^2}{2} - x\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} + \left[2x - \frac{3x^2}{4}\right]_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}} = \\
&= \frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{4}{3} - \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Uvažovaná množina M vypadá jako



Př. 26 *Spočtěte plochu ohraničenou křivkami $xy = 4$, $y = 4$, $x^2 = 2y$, $x = 0$.*

Vzhledem ke komplikovanější souhře křivek plochu nejsnáze analyzujeme, pokud si ji vykreslíme.



Vidíme, že chceme nalézt několik průsečíků, jsou to průsečíky křivek $xy = 4$, $y = 4$, což nám dává bod $[1, 4]$ a průsečík křivek $xy = 4$, $x^2 = 2y$, což nám dosazením dává rovnost $x^3 = 8$ a tedy bod $[2, 2]$. Plochu tedy vyjádříme jako

$$S = \int_0^1 \int_{\frac{x^2}{2}}^4 \mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_1^2 \int_{\frac{x^2}{2}}^{\frac{4}{x}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2y}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_2^4 \int_0^{\frac{4}{x}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Počítáme jeden z integrálů a máme

$$S = \int_0^1 4 - \frac{x^2}{2}\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{4}{x} - \frac{x^2}{2}\mathrm{d}x = \left[4x - \frac{x^3}{6}\right]_0^1 + \left[4\ln x - \frac{x^3}{6}\right]_1^2 =$$
$$= 4 - \frac{1}{6} + 4\ln 2 - \frac{8}{6} + \frac{1}{6} = 4\ln 2 + \frac{16}{6}$$

Př. 27 *Spočtěte integrál $\iint_M xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde M je ohraničená křivkami $y = 4 - x$, $y^2 = 2x$.*

Nalezneme průnik křivek skrze $0 = y^2 + 2y - 8 = (y+4)(y-2)$ což dává body $[2,2]$ a $[8,-4]$. Na intervalu $-4 \leq y \leq 2$ platí $\frac{y^2}{2} \leq x \leq 4 - y$. Počítáme tedy integrál

$$\begin{aligned}
\iint_M xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-4}^{2}\int_{\frac{y^2}{2}}^{4-y} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-4}^{2} y\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{y^2}{2}}^{4-y}\mathrm{d}y = \\
&= \int_{-4}^{2} y\left(\frac{16-8y+y^2}{2} - \frac{y^4}{8}\right)\mathrm{d}y = \int_{-4}^{2} 8y - 4y^2 + \frac{y^3}{2} - \frac{y^5}{8}\mathrm{d}y = \\
&= \left[4y^2 - \frac{4y^3}{3} + \frac{y^4}{8} - \frac{y^6}{48}\right]_{-4}^{2} = 90
\end{aligned}$$

Př. 28 *Spočtěte integrál* $\iint_M xy^2 \,\mathrm{e}^{x+y} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* M *je* $[0,2] \times [0,1]$.

Vyšetřovaná množina je obdélník. Snadno tedy převedeme integrál. Počítáme

$$\begin{aligned}\iint_M xy^2 \,\mathrm{e}^{x+y} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^2 \int_0^1 xy^2 \,\mathrm{e}^{x+y} \,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^2 x \,\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \int_0^1 y^2 \,\mathrm{e}^y \,\mathrm{d}y = \\ &= [x \,\mathrm{e}^x]_0^2 - \int_0^2 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x + \left[y^2 \,\mathrm{e}^y\right]_0^1 - \int_0^1 2y \,\mathrm{e}^y \,\mathrm{d}y = \\ &= 2\,\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^2 + 1 + \mathrm{e} - [2y \,\mathrm{e}^y]_0^1 + \int_0^1 2\,\mathrm{e}^y \,\mathrm{d}y = \\ &= \mathrm{e}^2 + 1 + \mathrm{e} - 2\,\mathrm{e} + 2\,\mathrm{e} - 2 = \mathrm{e}^2 + \mathrm{e} - 1\end{aligned}$$

Př. 29 *Spočtěte integrál* $\iint_M xy^2\,\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* M *je* $[0,2]\times[0,1]$.

Vyšetřovaná množina je obdélník. Snadno tedy převedeme integrál. Počítáme

$$\begin{aligned}\iint_M xy^2\,\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^2 x\int_0^1 y^2\,\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \\ &= \int_0^2 x\left[\frac{y^2\,\mathrm{e}^{xy}}{x}-\frac{2y\,\mathrm{e}^{xy}}{x^2}+\frac{2\,\mathrm{e}^{xy}}{x^3}\right]_0^1\mathrm{d}x = \\ &= \int_0^2 \mathrm{e}^x - + \frac{2\,\mathrm{e}^x}{x^2}-\frac{2}{x^2}\end{aligned}$$

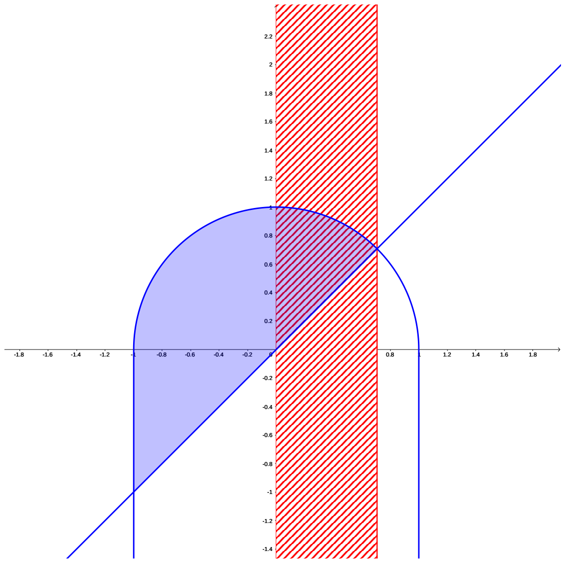
Avšak integrál $\int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\mathrm{d}x$ jednoduše spočítat neumíme. Zkusíme počítat integrál jiným způsobem.

$$\begin{aligned}\iint_M xy^2\,\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 y^2\left[\frac{x}{y}\,\mathrm{e}^{xy}\right]_0^2 - y^2\int_0^2 \frac{1}{y}\,\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\ &= \int_0^1 2y\,\mathrm{e}^{2y} - [\mathrm{e}^{xy}]_0^2\,\mathrm{d}y = \int_0^1 (2y-1)\,\mathrm{e}^{2y} + 1\mathrm{d}y = \\ &= \left[\frac{2y-1}{2}\,\mathrm{e}^{2y} + y\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^{2y}\,\mathrm{d}y = \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^2 + 1 + \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2y}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^2 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^2 + \frac{1}{2} = 2\end{aligned}$$

Př. 30 *Zaměňte integrační meze v integrálu*

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \int_x^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Vidíme, že M je ohraničena nerovnostmi $0 \leq x \leq 1/\sqrt{2}$ a křivkami $x \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$. Nejdříve se pokusíme namalovat množinu M, přes kterou je integrováno.



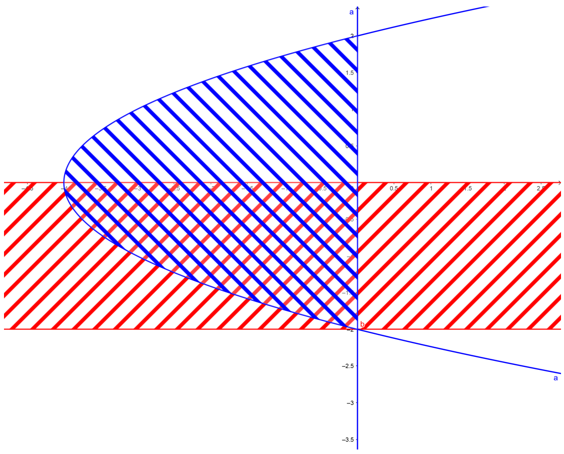
Z prvního ohraničení vidíme volbou $0 \leq y = x \leq 1/\sqrt{2}$. Ze druhého ohraničení $y = \sqrt{1-x^2}$ dostáváme $y = \sqrt{1-x^2} \leq \sqrt{1-0^2} = 1$ a $1/\sqrt{2} = \sqrt{1-\left(1/\sqrt{2}\right)^2} \leq \sqrt{1-x^2} = y$. Nakonec nezapomeneme na podmínku $0 \leq x \leq y$. Celkem tedy máme

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_0^{y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Př. 31 *Zaměňte integrační meze v integrálu*

$$\int_{-2}^{0}\int_{y^2-4}^{0} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Vidíme, že integrovaná množina je ohraničena křivkami $y^2 - 4 \leq x \leq 0$, pro $-2 \leq y \leq 0$. Vykreslíme si tuto množinu na obrázku



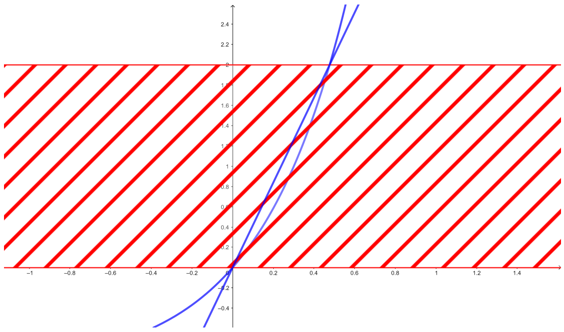
Vidíme, že se jedná o část paraboly, snadno zaměníme pořadí x a y odmocněním jako $y = \pm\sqrt{4+x}$. Navíc je-li $-2 \leq y \leq 0$ je $-4 \leq y^2 - 4 \leq 0$ čímž získáváme rozsah pro $x \in [-4, 0]$. Dostáváme

$$\int_{-4}^{0}\int_{-\sqrt{4+x}}^{0} \mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Př. 32 *Zaměňte integrační meze v integrálu*

$$\int_0^2 \int_{y \ln \sqrt{3}}^{\ln(y+1)} \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Vidíme, že integrovaná množina je ohraničena křivkami $x = y \ln \sqrt{3}$, $x = \ln(y+1)$, pro $0 \leq y \leq 2$. Navíc platí $y \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln(y+1)$. Vykreslíme si celou situaci pro jistotu s upravený měřítkem na osách x a y



Také vidíme, že křivky mají dva průsečíky, přesněji body $[0,0]$ a $[\ln 3, 2]$, které snadno získáme, neboť známe již ze zadání rozsah pro y.

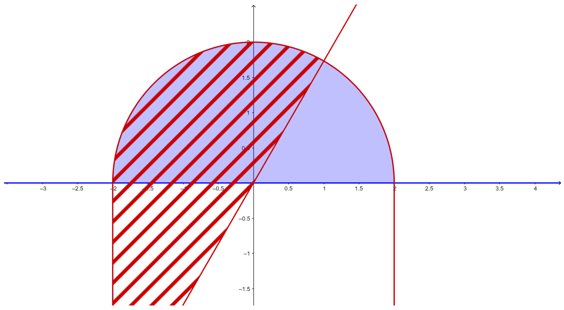
Převedeme nerovnosti $y \leq \frac{x}{\ln \sqrt{3}}$ a $y \geq \mathrm{e}^x - 1$. Navíc dosazením $x = y \ln \sqrt{3} \leq 2 \ln \sqrt{3} = \ln 3$ a $0 = 0 \ln \sqrt{3} \leq y \ln \sqrt{3} = x$ dostáváme ohraničení pro x. Stejné ohraničení dostaneme pokud uvážíme druhou hranici $x = \ln(y+1)$. Celkem tak máme

$$\int_0^{\ln 3} \int_{\mathrm{e}^x - 1}^{\frac{x}{\ln \sqrt{3}}} \mathrm{d}y \mathrm{d}x.$$

Př. 33 *Zaměňte integrační meze v integrálu*

$$\int_{-2}^{0}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}\int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{4-x^2}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Nejsnáze vyřešíme úkol, pokud si celou situaci namalujeme. Pro $-2 \le x \le 0$ je $0 \le y \le \sqrt{4-x^2}$ a $0 \le x \le 1$ je $\sqrt{3}x \le y \le \sqrt{1-x^2}$. Dostáváme situaci



Vidíme, že musíme určit průnik křivek $y = \sqrt{3}x$ a $x^2 + y^2 = 4$. Získáváme dosazením $4x^2 = 4$ a tedy $x = \pm 1$. Neboť je však $y \ge 0$, dostáváme průsečík $[1, \sqrt{3}]$. Dostáváme integrály

$$\int_{0}^{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{3}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\sqrt{3}}^{1}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Př. 34 *Vypočtěte integrál* $\iint_M xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, kde* M *je ohraničená*

- *rovnicemi* $x = 0$, $x = A$, $y = 0$, $y = B$.
- *omezením* $4x^2 + y^2 \leq 4$.

V prvním případě počítáme jednoduše

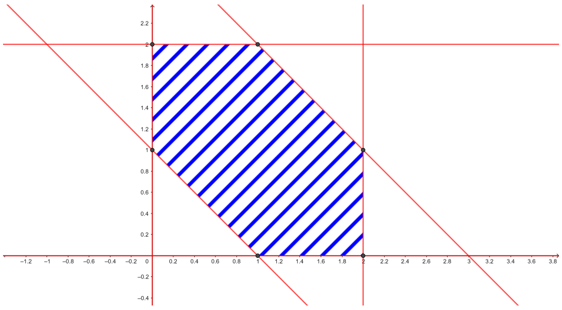
$$\iint_M xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^A \int_0^B xy\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^A x\mathrm{d}x \int_0^B y\mathrm{d}y = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^A \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^B = \frac{A^2B^2}{4}$$

Vidíme, že omezení $4x^2+y^2 \leq 4$ tvoří elipsu se středem v počátku a s poloosami rovnoběžnými s osami x a y. Fixujeme-li $y = 0$, dostáváme ohraničení $x^2 \leq 1$ a tedy $-1 \leq x \leq 1$. Dostáváme integrál

$$\iint_M xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{4-4x^2}}^{\sqrt{4-4x^2}} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 x \left[\frac{y^2}{2}\right]_{-\sqrt{4-4x^2}}^{\sqrt{4-4x^2}} \mathrm{d}x =$$
$$= \int_{-1}^1 x\frac{4-4x^2-(4-4x^2)}{2}\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 0\mathrm{d}x = 0$$

Př. 35 *Vypočtěte integrál* $\iint_M 2xy + 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, *kde* M *je ohraničená* $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 2$, $y = 1 - x$, $y = 3 - x$.

Vzhledem ke komplikované situaci začneme výpočet vykreslením omezení. Máme



Rohy čtverce do množiny nespadají, neboť chceme množinu, která je ohraničena všemi křivkami. Najdeme průsečíky, které leží na hranicích zkoumané množiny. Z obrázku nebo dopočtem získáme body $[0,1]$, $[0,2]$, $[0,1]$, $[2,1]$, $[0,2]$ a $[1,2]$. Vidíme, že dolní nebo horní ohraničení se mění v těchto bodech. Počítáme integrál

$$\begin{aligned}
\iint_M 2xy + 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \int_{1-x}^2 2xy + 1\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_1^2 \int_0^{3-x} 2xy + 1\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 \left[xy^2 + y\right]_{1-x}^2 \mathrm{d}x + \int_1^2 \left[xy^2 + y\right]_0^{3-x} \mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 4x + 2 - x(1 - 2x + x^2) - 1 + x\mathrm{d}x + \int_1^2 x(9 - 6x + x^2) + 3 - x\mathrm{d}x = \\
&= \left[2x^2 + 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{9x^2}{2} - 2x^3 + \frac{x^4}{4} + 3x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \\
&= 8 + \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Př. 36 *Zaměňte integrační meze v integrálu*

$$\int_a^b \int_a^x f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Z integrálu hned vidíme, že $a \leq x \leq b$, $a \leq y \leq x$. Neboť $x \leq b$, je také $y \leq x \leq b$ a tedy $a \leq y \leq b$. Navíc podmínka $y \leq x \leq b$ udává i ohraničení pro x. Dostáváme

$$\int_a^b \int_a^x f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_a^b \int_y^b f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Př. 37 *Zaměňte integrační meze v integrálu*

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x,y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x.$$

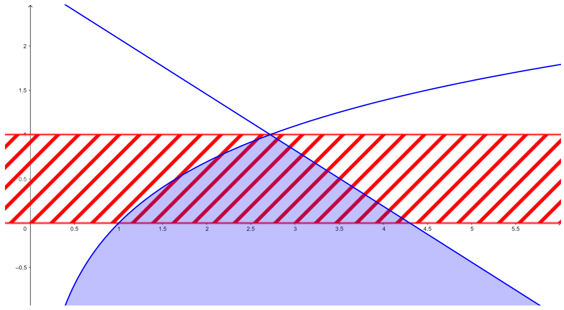
Z integrálu hned vidíme, že $0 \leq x \leq 1$ a $x^3 \leq y \leq x^2$. Převedeme-li nerovnosti v $x^3 \leq y \leq x^2$ máme $\sqrt{y} \leq x$ a $x \leq \sqrt[3]{y}$ což nám dává ohraničení pro x. Vidíme také, že pro $0 \leq x \leq 1$ je $0 \leq x^3 \leq y \leq x^2 \leq 1$. Odsud máme ohraničení pro y jako $0 \leq y \leq 1$.

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x,y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}} f(x,y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x.$$

Př. 38 *Zaměňte integrační meze v integrálu*

$$\int_0^1 \int_{e^y}^{-\frac{e}{e-1}y+\frac{e^2}{e-1}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Z integrálu hned vidíme, že $0 \le y \le 1$ a $e^y \le x \le -\frac{e}{e-1}y + \frac{e^2}{e-1}$. Nejsnáze situaci pochopíme, pokud si situaci vykreslíme.



Musíme nalézt průsečíky ležící na okrajích množiny. První dva získáme snadno z exponenciály a jsou to body $[1,0]$ a $[1,e]$. Poslední průsečík získáme jako bod $[\frac{e^2}{e-1},0]$. Vidíme, že v integrálu dojde ke změně horního ohraničení a to v bodě $[1,e]$. První křivku $x = e^y$ zaměníme snadno na $y = \ln x$. Druhou přímku pak převedeme na $y = e - \frac{e-1}{e}x$. Dostáváme integrály

$$\int_1^e \int_0^{\ln x} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_e^{\frac{e^2}{e-1}} \int_0^{e-\frac{e-1}{e}x} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Př. 39 *Zaměňte integrační meze v integrálu*

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Z integrálu hned vidíme, že $0 \leq x \leq 1$ a $x^2 \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}$. Funkce $f(x) = \sqrt{2x-x^2}$ nabývá hodnot $f(0) = 0$ a $f(1) = 1$. Vyjádříme z křivky $y = \sqrt{2x-x^2}$ a hned získáme $y^2 = 1-1+2x-x^2$. Úpravou na čtverec tedy máme $x = 1 - \sqrt{1-y^2}$. Dostáváme integrál

$$\int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Př. 40 *Zaměňte integrační meze v integrálu*

$$\int_0^1 \int_{\mathrm{e}^y}^{\mathrm{e}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

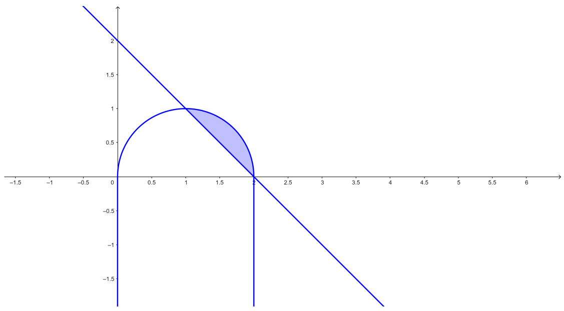
Z integrálu hned vidíme, že $0 \leq y \leq 1$ a $\mathrm{e}^y \leq x \leq \mathrm{e}$. První omezení pro x je dáno z vyjádření $1 = \mathrm{e}^0 \leq \mathrm{e}^y \leq x \leq \mathrm{e}$. Druhé omezení získáme z nerovnosti $\mathrm{e}^y \leq x$ což vede na $y \leq \ln x$. Spolu s podmínkou $0 \leq y$ převedeme integrál na

$$\int_1^{\mathrm{e}} \int_0^{\ln x} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Př. 41 *Zaměňte integrační meze v integrálu*

$$\int_1^2 \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Z integrálu hned vidíme, že $1 \leq x \leq 2$ a $2 - x \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}$. Křivka $y = \sqrt{2x - x^2}$ je tvořena částí kružnice se středem posunutým mimo počátek. Umocněním a úpravou na čtverec získáme její vyjádření jako $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Omezení pak tvoří horní půlkružnici. Přímka $y = 2 - x$ má s kružnicí dva průsečíky a dosazením získáme, že jsou to body $[1, 1]$ a $[2, 0]$. Vykreslíme situaci



Toto vede na integrál

$$\int_0^1 \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Př. 42 *Zaměňte integrační meze v integrálu*

$$\int_0^4 \int_x^{2\sqrt{x}} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Z integrálu hned vidíme, že $0 \leq x \leq 4$ a $x \leq y \leq 2\sqrt{x}$. Přímo odsud plyne horní ohraničení pro x z nerovnosti $x \leq y$. Z druhé podmínky $y \leq 2\sqrt{x}$ máme $\frac{y^2}{4} \leq x$ a tedy získáme dolní ohraničení. Z omezení $0 \leq x \leq 4$ máme rovněž $0 \leq x \leq y \leq 2\sqrt{x} \leq 4$. Můžeme převést integrál

$$\int_0^4 \int_{\frac{y^2}{4}}^{y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Př. 43 *Zaměňte integrační meze v integrálu*

$$\int_0^2 \int_x^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

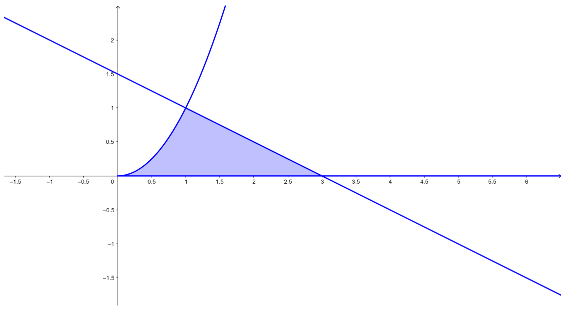
Z integrálu hned vidíme, že $0 \leq x \leq 2$ a $x \leq y \leq \sqrt{4x - x^2}$. Křivka $y = \sqrt{4x - x^2}$ je částí kružnice. Můžeme tedy převést $x = 2 \pm \sqrt{4 - y^2}$. Navíc platí $0 \leq x \leq y \leq \sqrt{4x - x^2} \leq 2$. Máme tedy integrál

$$\int_0^2 \int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Př. 44 *Zaměňte integrační meze v integrálu*

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Z integrálu hned vidíme, že $0 \leq y \leq 1$ a $\sqrt{y} \leq x \leq 3-2y$. Máme hned $0 \leq \sqrt{y} \leq x \leq 3-2y \leq 3$. Křivky $x = \sqrt{y}$, $x = 3-2y$ nezačínají ve stejném bodě, jsou monotónní a mají svůj průnik v bodě $[1,1]$. Situaci si můžeme pro jistotu vykreslit



Dostáváme integrál

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_1^3 \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

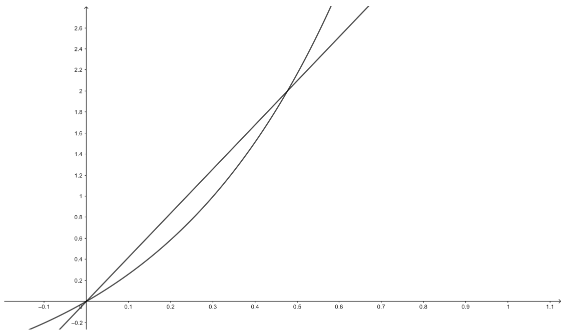
Př. 45 *Zaměňte integrační meze v integrálu*

$$\int_0^2 \int_{y\ln\sqrt{3}}^{\ln(y+1)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Z integrálu hned vidíme, že $0 \le y \le 2$ a $y\ln\sqrt{3} \le x \le \ln(y+1)$. Křivky $x = y\ln\sqrt{3}$ a $x = \ln(y+1)$ mají průnik v bodech $[0,0]$ a $[\ln 3, 2]$, což odpovídá rozsahu na ose y. Z těchto průsečíků vidíme, že $0 \le x \le \ln 3$. Křivku $x = \ln(y+1)$ přepíšeme jako $y = \mathrm{e}^x - 1$. Máme tedy integrál

$$\int_0^{\ln 3} \int_{\mathrm{e}^x - 1}^{\frac{x}{\ln\sqrt{3}}} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

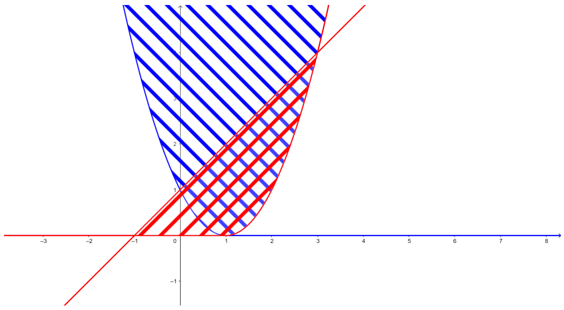
Vyšetřovaná množina má tvar



Př. 46 *Zaměňte integrační meze v integrálu*

$$\int_0^1 \int_{1-\sqrt{y}}^{1+\sqrt{y}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_1^4 \int_{y-1}^{1+\sqrt{y}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

V prvním integrálu máme omezení $0 \le y \le 1$ a $1-\sqrt{y} \le x \le 1+\sqrt{y}$. Ve druhém integrálu platí $1 \le y \le 4$ a $y-1 \le x \le 1+\sqrt{y}$. Celou situaci nejsnáze pojmeme, pokud si vše vykreslíme. Křivka $x = 1 \pm \sqrt{y}$ je posunutá parabola daná vyjádřením $y = (x-1)^2$. Druhá křivka je pak přímka $y = x+1$.



Dopočteme průsečíky křivky $x = 1-\sqrt{y}$ a $x = y-1$ což je bod $[0,1]$. Druhý průsečík křivek $x = 1+\sqrt{y}$ a $x = y-1$ je bod $[3,4]$. Máme integrál

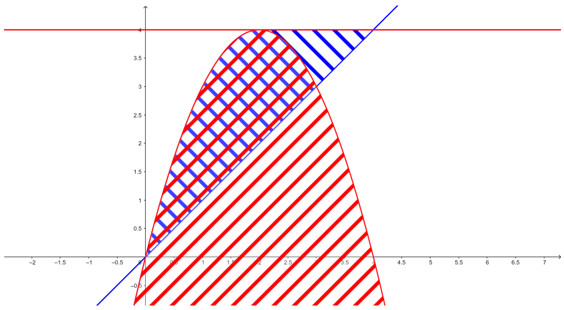
$$\int_0^3 \int_{(x-1)^2}^{x+1} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Tohoto lze dosáhnout i opatrnou dedukcí z nerovností. Z nerovnosti $1-\sqrt{y} \le x \le 1+\sqrt{y}$ získáme, že $y \ge (x-1)^2$ a z nerovnosti $y-1 \le x$ máme $y \le x+1$.

Př. 47 *Zaměňte integrační meze v integrálu*

$$\int_0^3 \int_{2-\sqrt{4-y}}^{y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_3^4 \int_{2-\sqrt{4-y}}^{2+\sqrt{4-y}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

V prvním integrálu máme omezení $0 \leq y \leq 3$ a $2-\sqrt{4-y} \leq x \leq y$. Ve druhém integrálu platí $3 \leq y \leq 4$ a $2-\sqrt{4-y} \leq x \leq 2+\sqrt{4-y}$. Podmínku $x = 2 \pm \sqrt{4-y}$ přepíšeme jako $y = 4-(x-2)^2$ pro lepší porozumění a snazší vykreslení. Průsečíky křivek $y = 4-(x-2)^2$ a $y = x$ jsou body $[0,0]$ a $[3,3]$. Situaci si nyní vykreslíme



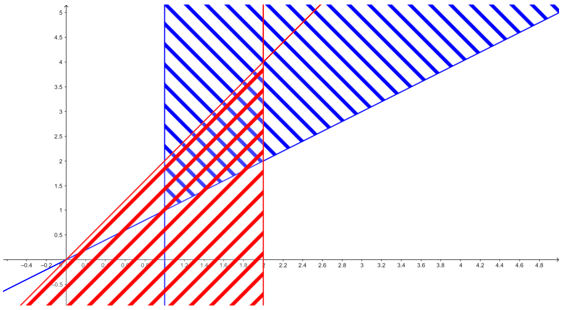
Dostáváme hned integrál

$$\int_0^3 \int_x^{4-(x-2)^2} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Př. 48 *Zaměňte integrační meze v integrálu*

$$\int_1^2 \int_1^y f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_2^4 \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

V prvním integrálu máme omezení $1 \leq y \leq 2$ a $1 \leq x \leq y$. Ve druhém integrálu platí $2 \leq y \leq 4$ a $\frac{y}{2} \leq x \leq 2$. Již z nerovností lze usuzovat, že se patrně jedná o čtyřúhelník. Snadno vykreslíme přímky vymezují množinu a získáme graf s upravenými osami



Průsečíky přímek získáme z obrázku nebo dopočtem jako $[1,1]$, $[2,4]$, $[1,2]$ a $[2,2]$. Tímto převedeme

$$\int_1^2 \int_x^{2x} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Př. 49 *Odhadněte hodnotu integrálu*

$$\iint_M \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M *je* $[0,\pi]\times[-\pi,\pi]$.

Vzhledem k vlastnostem funkce e^x můžeme převést integrál do tvaru

$$\int_0^\pi \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}y.$$

Neboť nevíme jak se vypořádat s integrovanou funkcí, nahradíme podle vzorce

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$$

čímž dostaneme

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^{2n}\mathrm{d}x \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}y^{2n}\mathrm{d}y = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\pi \frac{1}{n!}x^{2n}\mathrm{d}x \sum_{n=0}^{\infty} 2\int_0^\pi \frac{1}{n!}y^{2n}\mathrm{d}y = \\
&= 2\left(\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\pi \frac{1}{n!}x^{2n}\mathrm{d}x\right)^2 = 2\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^\pi\right)^2 = \\
&= 2\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{\pi^{2n+1}}{2n+1}\right)^2
\end{aligned}$$

Nyní bychom potřebovali spočítat tuto řadu. Nejdřív bychom chtěli ověřit, zda tato řada vůbec konverguje, využijeme podílové kritérium.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi^{2n+3}}{(n+1)!(2n+3)}\frac{(2n+1)n!}{\pi^{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi^2(2n+1)}{(n+1)(2n+3)} = 0$$

Neboť je limita menší než jedna, řada diverguje. Pokud bychom tedy chtěli odhadnout její součet, můžeme spočítat dostatečný počet členů k jeho aproximaci. Také můžeme řadu odhadnout jako

$$2\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{\pi^{2n+1}}{2n+1}\right)^2 \le 2\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{2n+1}}{n!}\right)^2 = 2\left(\pi\,\mathrm{e}^{\pi^2}\right)^2 = 2\pi^2\,\mathrm{e}^{2\pi^2}$$

Př. 50 *Spočtěte integrál*

$$\iint_M \frac{\sin(x+y)}{(x+y)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde $M = [-1,1]^2$.

Budeme-li chtít spočítat tento integrál, všimneme si nejdříve, že funkce

$$\frac{\sin t}{t^2}$$

je lichá. Proto platí

$$\int_{-1}^{0}\int_{-1}^{0} \frac{\sin(x+y)}{(x+y)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left| \begin{array}{c} t=-x \\ s=-y \end{array} \right| =$$
$$= \int_{1}^{0}\int_{1}^{0} \frac{\sin(-t-s)}{(-t-s)^2}(-1)\mathrm{d}t(-1)\mathrm{d}s = \int_{0}^{1}\int_{0}^{1} \frac{-\sin(t+s)}{(t+s)^2}\mathrm{d}t\mathrm{d}s = -\int_{0}^{1}\int_{0}^{1} \frac{\sin(t+s)}{(t+s)^2}\mathrm{d}t\mathrm{d}s =$$

Obdobnou situaci získáme pro

$$\int_{-1}^{0}\int_{0}^{1} \frac{\sin(x+y)}{(x+y)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_{0}^{1}\int_{-1}^{0} \frac{\sin(t+s)}{(t+s)^2}\mathrm{d}t\mathrm{d}s$$

Dohromady tak máme, že

$$\iint_M \frac{\sin(x+y)}{(x+y)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

I pro dvojné integrály vidíme, že je-li funkce správně „lichá“, integrál přes symetrickou množinu je nulový.

Př. 51 *Odhadněte integrál*

$$\iint_M \frac{\sin(x+y+1)}{x+y+1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde $M = [0,1]^2$.

Budeme se chtít vypořádat s komplikovanou integrovanou funkcí, zavedeme tedy

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

kterou lze použít na celém $\mathbb{R}$. Dostáváme integrál

$$\iint_M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{(x+y+1)^{2n+1}}{x+y+1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (x+y+1)^{2n} \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$
$$= \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (x+y+1)^{2n} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Samozřejmě se musíme zamyslet, zda můžeme nahradit integrování a sumaci. K tomu stačí, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x+y+1)^{2n}$ konverguje stejnoměrně. Můžeme však ohraničit na množině M

$$\left| \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (x+y+1)^{2n} \right| \leq \frac{1}{(2n+1)!} 3^{2n}$$

Použijeme podílové kritérium, kterým získáme, že řada $\sum \frac{3^{2n}}{(2n+1)!}$ je konvergentní. Dle Weierstrassova kritéria tedy řada konverguje stejnoměrně. Máme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^1 \int_0^1 (x+y+1)^{2n} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^1 \left[\frac{(x+y+1)^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1 \mathrm{d}y =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!} \int_0^1 (y+2)^{2n+1} - (y+1)^{2n+1} \mathrm{d}y =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!} \left[\frac{(y+2)^{2n+2}}{2n+2} - \frac{(y+1)^{2n+2}}{2n+2} \right]_0^1 =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+2)(2n+1)(2n+1)!} \left(3^{2n+2} - 2^{2n+2} - 2^{2n+2} + 1^{2n+2} \right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)!} \left(3^{2n+2} - 2^{2n+3} + 1 \right)$$

Nyní bychom ověřili, že řada konverguje. Toho bychom opět dosáhli pomocí podílového kritéria a absolutní konvergence. Sečteme-li dostatečný počet členů, získáme odhad našeho součtu. Neboť je řada alternující, stačí poté najít člen menší, než je naše přesnost abychom získali odhad součtu. Také můžeme zkusit sečíst celou řadu pomocí rozvoje funkce $\sin x$.

Př. 52 *Z definice ukažte, že integrál*

$$\iint_M x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (d-c)\int_a^b x\mathrm{d}x,$$

kde $M = [a,b] \times [c,d]$.

Množina M je tvořena obdélníkem. Zvolíme tedy ekvidistantní dělení x_i intervalu $[a,b]$ a ekvidistantní dělení y_i intervalu $[c,d]$, kde $i = 0 \dots n$ a $x_0 = a$, $x_n = b$, $y_0 = c$, $y_n = d$. Následně zavedeme

$$\begin{aligned} M_{i,j} &= \sup\{f(x,y) | x \in [x_{i-1}, x_i], y \in [y_{j-1}, y_j]\} = \sup\{x | x \in [x_{i-1}, x_i]\} = M_i, \\ m_{i,j} &= \inf\{f(x,y) | x \in [x_{i-1}, x_i], y \in [y_{j-1}, y_j]\} = \inf\{x | x \in [x_{i-1}, x_i]\} = m_i. \end{aligned}$$

Potom dostaneme

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n} M_{i,j}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}), \\ s(n) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n} m_{i,j}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}). \end{aligned}$$

Avšak všimneme si, že můžeme vytknout

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{i=1}^{n}\left(M_i(x_i - x_{i-1}) \sum_{j=1}^{n}(y_j - y_{j-1}) \right) = |\text{teleskopický princip}| = \\ &= \sum_{i=1}^{n} (M_i(x_i - x_{i-1})(d-c)) = (d-c)\sum_{i=0}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

Obdobné vyjádření získáme také pro $s(n)$. Neboť je funkce $f(x,y) = x$ spojitá na M je zde také integrovatelná a

$$\iint_M x\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} S(n) = \lim_{n\to\infty} s(n) = (d-c)\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = (d-c)\int_a^b x\mathrm{d}x$$

Př. 53 *Z definice ukažte, že integrál*

$$\iint_M x \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2},$$

kde $M = [0,1]^2$.

Množina M je tvořena obdélníkem. Zvolíme tedy ekvidistantní dělení x_i intervalu $[a,b]$ a ekvidistantní dělení y_i intervalu $[c,d]$, kde $i = 0 \dots n$ a $x_0 = a$, $x_n = b$, $y_0 = c$, $y_n = d$. Následně zavedeme

$$M_{i,j} = \sup\{f(x,y)|x \in [x_{i-1}, x_i], y \in [y_{j-1}, y_j]\} = \sup\{x|x \in [x_{i-1}, x_i]\} = M_i,$$
$$m_{i,j} = \inf\{f(x,y)|x \in [x_{i-1}, x_i], y \in [y_{j-1}, y_j]\} = \inf\{x|x \in [x_{i-1}, x_i]\} = m_i.$$

Potom dostaneme

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}),$$
$$s(n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

Avšak také si všimneme, že funkce $g(x) = x$ je rostoucí a tedy platí můžeme vyjádřit také

$$M_i = \sup\{x|x \in [x_{i-1}, x_i]\} = x_i,$$
$$m_i = \inf\{x|x \in [x_{i-1}, x_i]\} = x_{i-1}.$$

A tudíž

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i - x_{i-1}) \sum_{j=0}^{n}(y_j - y_{j-1}) =$$
$$= |\text{ teleskopický princip }| \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i - x_{i-1})(1-0)s(n) \qquad = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}(x_i - x_{i-1})$$

Dále platí, že

$$S(n) + s(n) = \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i - x_{i-1}) + x_{i-1}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - x_{i-1}^2 =$$
$$= |\text{ teleskopický princip }| = x_n^2 - x_0^2 = 1^2 - 0^2 = 1$$

Pokud tedy integrál existuje, platí

$$\iint_M x \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty} S(n) = \lim_{n\to\infty} s(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{S(n) + s(n)}{2} = \frac{1}{2}$$

To že integrál existuje víme naopak z vyjádření

$$S(n) - s(n) = \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i - x_{i-1}) - x_{i-1}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})^2$$

Jsou- li však vzdálenosti ekvidistantní je toto

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n},$$

pro každé i. Potom je

$$S(n) - s(n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{1}{n^2} \cdot n = \frac{1}{n}$$

Proto platí, že

$$\lim_{n\to\infty} S(n) - s(n) = 0.$$

Integrál tedy vskutku existuje a náš výpočet byl správný.

2 Trojný integrál

Nechť $M = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ a funkce f je na množině M spojitá, potom platí

$$\iiint_M f \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Integrál se však rovná i ostatním permutacím v pořadí integrálů.

Nechť funkce f je spojitá na množině

$$M = \{[x, y, z] | a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x), G(x, y) \leq z \leq H(x, y, z)\},$$

kde funkce g, h jsou spojité na intervalu $[a, b]$ a funkce G, H jsou spojité na množině

$$\{[x, y] | a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}.$$

Potom platí že

$$\iiint_M f \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \int_{G(x,y)}^{H(x,y)} f \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Obdobnou situaci dostaneme uvážíme-li libovolnou permutaci proměnných ve vyjádření.

Př. 54 *Spočtěte integrál*

$$\iiint_V xy^2 z \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde $V = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

Jedná se o jednotkovou krychli. Počítáme tedy

$$\iiint_V xy^2 z \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 xy^2 z \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 x\mathrm{d}x \int_0^1 y^2\mathrm{d}y \int_0^1 z\mathrm{d}z =$$
$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

Př. 55 *Spočtěte integrál*

$$\iiint_V 6\,\mathrm{e}^{3x+2y+z}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde $V = [0,2] \times [1,3] \times [1,2]$.

Převedeme integrál pomocí fubiniho věty na trojnásobný

$$\begin{aligned}\iiint_V 6\,\mathrm{e}^{3x+2y+z}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= 6\int_0^2\int_1^3\int_1^2 \mathrm{e}^{3x+2y+z}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \\ &= 6\int_0^2 \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x\int_1^3 \mathrm{e}\,2y\mathrm{d}y\int_1^2 \mathrm{e}\,z\mathrm{d}z = 6\left[\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}\right]_0^2\left[\frac{\mathrm{e}^{2y}}{2}\right]_1^3[\mathrm{e}^z]_1^2 = \\ &= \left(\mathrm{e}^6 - 1\right)\left(\mathrm{e}^6 - \mathrm{e}^2\right)\left(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}\right).\end{aligned}$$

Př. 56 *Spočtěte integrál*

$$\iiint_V x^2 + y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde $V = [-A, A] \times [-B, B] \times [-C, C]$.

Převedeme integrál pomocí fubiniho věty na trojnásobný

$$\begin{aligned}\iiint_V x^2 + y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_{-A}^{A}\int_{-B}^{B}\int_{-C}^{C} x^2 + y^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 2C\int_{-A}^{A}\left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{-B}^{B}\mathrm{d}x = \\ &= 2C\int_{-A}^{A} 2Bx^2 + \frac{2B^3}{3}\mathrm{d}x = 2C\left[2B\frac{x^3}{3} + \frac{2B^3}{3}x\right]_{-A}^{A} = \\ &= 2C\left(\frac{4A^3B}{3} + \frac{4AB^3}{3}\right)\end{aligned}$$

Př. 57 *Spočtěte integrál*

$$\iiint_V \frac{1}{1-x-y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde $V = [0,1] \times [2,5] \times [2,4]$.

Převedeme integrál pomocí fubiniho věty na trojnásobný

$$\begin{aligned}
\iiint_V \frac{1}{1-x-y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_2^5 \int_0^1 \int_2^4 \frac{1}{1-x-y} \mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^1 \int_2^5 \frac{1}{1-x-y} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \\
&= 2\int_2^5 \left[-\ln|1-x-y|\right]_0^1 \mathrm{d}y = 2\int_2^5 \ln(y-1) - \ln y \mathrm{d}y = \\
&= 2\left[(y-1)\ln(y-1) - y - y\ln y + y\right]_2^5 = \\
&= 2\left[(y-1)\ln(y-1) - y\ln y\right]_2^5 = 2\left(4\ln 4 - 5\ln 5 - 2\ln 1 + 2\ln 2\right) = \\
&= 2\left(10\ln 2 - 5\ln 5\right) = 10\ln\frac{4}{5}
\end{aligned}$$

Př. 58 *Spočtěte integrál*

$$\iiint_V \frac{z\cos y}{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde $V = [1,2] \times [-\pi/2, \pi/2] \times [2,4]$.

Převedeme integrál pomocí fubiniho věty na trojnásobný

$$\iiint_V \frac{z\cos y}{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_1^2 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos y\mathrm{d}y \int_2^4 z\mathrm{d}z = \left[\frac{-1}{x}\right]_1^2 [\sin y]_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{z^2}{2}\right]_2^4 =$$
$$= \frac{1}{2}(1+1)(8-2) = 6$$

Př. 59 *Spočtěte integrál*

$$\iiint_V xy \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z,$$

kde V je dána $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 4 - 2x - 2y.$

Převedeme integrál pomocí fubiniho věty na trojnásobný

$$\begin{aligned}
\iiint_V xy \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z &= \int_0^1 x \int_0^1 y \int_0^{4-2x-2y} \mathrm{d}z \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 x \int_0^1 4y - 2xy - 2y^2 \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 x \left[2y^2 - xy^2 - \frac{2y^3}{3}\right]_0^1 \mathrm{d}x = \int_0^1 2x - x^2 - \frac{2}{3}x \mathrm{d}x = \\
&= \left[x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}x^2\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Př. 60 *Spočtěte integrál*

$$\iiint_V \frac{1}{(x+y+z+1)^3} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána* $x = y$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

Vyšetřovaná množina V je jednotkový simplex. Můžeme tedy hned psát

$$\iiint_V \frac{1}{(x+y+z+1)^3} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(x+y+z+1)^3} \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\frac{-1}{2(x+y+z+1)^2} \right]_0^{1-x-y} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{-1}{8} + \frac{1}{2(x+y+1)^2} \mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{-1}{2(x+y+1)} - \frac{y}{8} \right]_0^{1-x} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{4} + \frac{x-1}{8} \mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{x}{4} + \frac{x^2-2x}{16} \right]_0^1 \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}$$

Př. 61 *Spočtěte integrál*

$$\iiint_V (x+y)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána* $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x^2+y^2+z^2 \leq 1.$

Neboť $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ je vnitřek koule a ostatní podmínky nám vymezují 1. oktant. V půdorysně xy je V určena $x \geq 0$, $y \geq 0$ a $x^2+y^2 \leq 1$. Máme hned zápis

$$\iiint_V (x+y)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x+y) \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x+y) \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x+y-x^3-y^3-x^2y-xy^2}{2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{12xy+6y^2-12x^3y-3y^4-6x^2y^2-4xy^3}{24}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \frac{12x(1-x)+6(1-x)^2-12x^3(1-x)-3(1-x)^4-6x^2(1-x)^2-4x(1-x)^3}{24}\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \frac{12(x-x^2)+6(1-2x+x^2)-12(x^3-x^4)-3(1-4x+6x^2-4x^3+x^4)}{24}+$$

$$+\frac{-6(x^2-2x^3+x^4)-4(x-3x^2+3x^3-x^4)^3}{24}\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \frac{12x-12x^2+6-12x+6x^2-12x^3+12x^4-3+12x-18x^2+12x^3-3x^4}{24}+$$

$$+\frac{-6x^2+12x^3-6x^4-4x+12x^2-12x^3+4x^4}{24}\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \frac{3+7x^4+8x-6x^2}{24}\mathrm{d}x = \frac{1}{24}\left[3x+\frac{7x^5}{5}+4x^2-2x^3\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{24}\cdot\frac{32}{5} = \frac{4}{15}$$

Př. 62 *Spočtěte integrál*

$$\iiint_V y^2 z \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

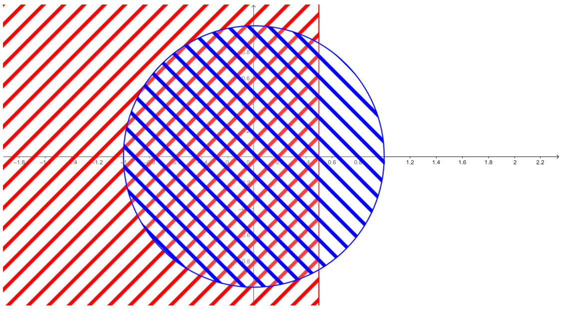
kde V *je dána* $0 \leq x \leq \pi/2$, $0 \leq y \leq 2\cos x$, $0 \leq z \leq 1$.

Snadno máme

$$\begin{aligned}
&\iiint_V y^2 z \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos x} \int_0^1 y^2 z \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos x} y^2 \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1 \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{2\cos x} \mathrm{d}x = \\
&= \frac{8}{6} \int_0^{\pi/2} \cos^3 x \mathrm{d}x = \frac{8}{6} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x) \cos x \mathrm{d}x = \\
&= \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x) \cos x \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ \mathrm{d}t = \cos x \mathrm{d}x \end{array} \right| = \\
&= \frac{4}{3} \int_0^1 1 - t^2 \mathrm{d}t = \frac{4}{3} \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{8}{9}
\end{aligned}$$

Př. 63 *Převeďte trojný integrál* $\iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, *na trojnásobný, kde* V *je dána* $z \geq 0$, $x \leq 1/2$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Podmínka $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ udává vnitřek koule. V rovině $z = 0$ je pak podmínka omezena na $x^2 + y^2 \leq 1$, kde musíme navíc uvážit podmínku $x \leq 1/2$. Dohromady vypadají podmínky v půdorysně xy takto

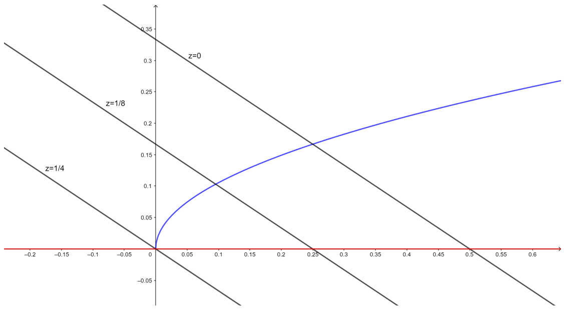


Vykreslíme-li si vrstevnice koule, vidíme, že největšího rozsahu dosahuje množina V vzhledem k proměnným x a y právě v půdorysně. Proto je největší možný rozsah pro x dán jako $x \in [-1, 1/2]$. V závislosti na x je pak největší možný rozsah pro y dán jako $y \in [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]$. Ohraničení pro z plyne také přímo z rovnice koule. Integrál je tvaru

$$\int_{-1}^{1/2} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Př. 64 *Převeďte trojný integrál* $\iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, *na trojnásobný, kde* V *je dána* $2x+3y+4z=1$, $y=0$, $y=\sqrt{x}/3$, $z=0$.

Podmínka $2x+3y+4z=1$ udává rovinu. V rovině $z=0$ je pak podmínka omezena na $y=\frac{1-2x}{3}$, kde musíme navíc uvážit podmínky $y=0$, $y=\sqrt{x}/3$. Nalezneme průsečík křivek $2x+3y=1$ a $y=\sqrt{x}/3$ což dává bod $[1/4,1/6]$. Z vrstevnic nebo dopočtem vidíme, že plocha $2x+3y+4z=1$ je nad vyšetřovanou částí půdorysny kladná.



Vzhledem k vrstevnicím je zřejmé, že množina V má vzhledem k proměnným xy největší rozsah v půdorysně $z=0$. Vidíme tedy, že integrál je tvaru

$$\int_0^{1/4}\int_0^{\sqrt{x}/3}\int_0^{\frac{1-2x-3y}{4}} \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\int_{1/4}^{1/2}\int_0^{\frac{1-2x}{3}}\int_0^{\frac{1-2x-3y}{4}} \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_0^{1/6}\int_{9y^2}^{\frac{1-3y}{2}}\int_0^{\frac{1-2x-3y}{4}} \mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Př. 65 *Spočtěte integrál*

$$\iiint_V y \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z,$$

kde V je dána $y = 1$, $y = \sqrt{x^2 + z^2}$.

Plocha $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ je dána po řezech pro fixované y jako kružnice. S největším poloměrem v rovině $y = 1$. Jedná se tedy o otočený jehlan. Máme tedy integrál

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+z^2}}^{1} y \mathrm{d}y \mathrm{d}z \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_{\sqrt{x^2+z^2}}^{1} y \mathrm{d}y \mathrm{d}x \mathrm{d}z.$$

Můžeme tedy pro jednu volbu počítat

$$\iiint_V y \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left[\frac{y^2}{2}\right]_{\sqrt{x^2+z^2}}^{1} \mathrm{d}z \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 - x^2 - z^2 \mathrm{d}z \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left[(1-x^2)z - \frac{z^3}{3}\right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} 2(1-x^2)\sqrt{1-x^2} - \frac{2\sqrt{(1-x^2)^3}}{3} \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{2\sqrt{(1-x^2)^3}}{3} \mathrm{d}x$$

$$= \left| \begin{array}{c} \sin t = x \\ \cos t \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{array} \right| = \frac{2}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos^6 t} \cos t \mathrm{d}t = \frac{2}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 t \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{2}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{6} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{6} \left[t + \sin 2t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{6} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 4t}{2} \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{1}{12} \left[t + \frac{\sin 4t}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$$

Př. 66 *Spočtěte integrál*

$$\iiint_V z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána* $y = 0$, $z = 0$, $x = 2$, $y = 5$, $x + z = 6$.

V půdorysně $z = 0$ je množina ohraničena rovnostmi $y = 0$, $x = 2$, $y = 5$, a z plochy $x + z = 6$ máme omezení $x = 6$. V půdorysně je tedy vyšetřovaná množina obdélník. Plocha $z = 6-x$ je nad tímto obdélníkem kladná. Víme, že množina V má vzhledem k xy největší rozsah v rovině $z = 0$. To vidíme díky k vrstevnicím nebo díky faktu, že $f(x) = 6 - x$ je klesající funkce. Dostaneme integrál

$$\begin{aligned}
\iiint_V z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_2^6 \int_0^5 \int_0^{6-x} z^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^5 \mathrm{d}y \int_2^6 \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{6-x} \mathrm{d}x = \frac{5}{3}\int_2^6 6^3 - 3 \cdot 36x + 18x^2 - x^3 \mathrm{d}x = \\
&= \frac{5}{3}\left[6^3 x - 3 \cdot 18x^2 + 6x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_2^6 = \\
&= \frac{5}{3}\left(4 \cdot 6^3 - 3 \cdot 18 \cdot 36 + 6^4 - \frac{6^4}{4} + 12 \cdot 18 - 48 + 4\right) = \\
&= 5\,(36 - 16) + 20/3 = \frac{320}{3}
\end{aligned}$$

Př. 67 *Spočtěte integrál*

$$\iiint_V z^4 \cos^2 y \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána* $0 \le x \le \pi/2$, $0 \le y \le \pi/2$, $0 \le z \le \sin x \cos y$.

Z popisu množiny V můžeme hned převést integrál na trojnásobný.

$$\iiint_V z^4 \cos^2 y \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 y \int_0^{\sin x \cos y} z^4 \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 y \left[\frac{z^5}{5}\right]_0^{\sin x \cos y} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \mathrm{d}x \int_0^{\pi/2} \cos^7 y \mathrm{d}y =$$
$$= -\frac{1}{5}\int_0^1 (1-t^2)^2 \mathrm{d}t \int_1^0 (1-s^2)^3 \mathrm{d}s = \frac{1}{5}\int_0^1 1 - 2t^2 + t^4 \mathrm{d}t \int_0^1 1 - 3s^2 + 3s^4 - s^6 \mathrm{d}s =$$
$$= \frac{1}{5}\left[t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5}\right]_0^1 \left[s - \frac{3s^3}{3} + \frac{3s^5}{5} - \frac{s^6}{6}\right]_0^1 =$$
$$= \frac{1}{5}\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right)\left(1 - 1 + \frac{3}{5} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{15 - 10 + 3}{15} \cdot \frac{18 - 5}{30} = \frac{104}{225}$$

Př. 68 *Spočtěte integrál*

$$\iiint_V xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána* $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$, $0 \leq z \leq x^2 + y^2 + 1$.

Snadno vidíme, že podmínku $x + y \leq 1$ můžeme přepsat jako $y \leq 1 - x$ ale také z ní získáme pro $y = 0$ odhad $x \leq 1$.

$$\iiint_V xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1+x^2+y^2} xy\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} xy(1 + x^2 + y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 x \int_0^{1-x} y + x^2y + y^3)\mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4}\right]_0^{1-x} \mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 x \left(\frac{1 - 2x + x^2}{2} + \frac{x^2 - 2x^3 + x^4}{2} + \frac{1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4}{4}\right) \mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 \frac{3x - 8x^2 + 10x^3 - 8x^4 + 3x^5}{4}\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{3x^2}{2} - \frac{8x^3}{3} + \frac{10x^4}{4} - \frac{8x^5}{5} + \frac{x^6}{2}\right]_0^1 =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3} + \frac{10}{4} - \frac{8}{5} + \frac{1}{2}\right) = \frac{10}{16} - \frac{68}{120} = \frac{7}{120}$$

Př. 69 *Spočtěte integrál*

$$\iiint_V x^2yz^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V je dána $z \le xy,\ y \ge x \ge 0,\ y \le 1,\ z \ge 0.$

Spojíme-li nerovnosti dohromady, dostaneme $0 \le z \le xy$, $0 \le x \le y \le 1$. Počítáme tedy integrál

$$\begin{aligned}
\iiint_V x^2yz^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^1\int_x^1\int_0^{xy} x^2yz^3\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1\int_x^1 x^2y\left[\frac{z^4}{4}\right]_0^{xy}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^1 x^6\int_x^1 y^5\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 x^6\left[\frac{y^6}{6}\right]_x^1\mathrm{d}x = \frac{1}{24}\int_0^1 x^6 - x^12\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{24}\left[\frac{x^7}{7} - \frac{x^{13}}{13}\right]_0^1 = \frac{1}{24}\cdot\frac{13-7}{91} = \\
&= \frac{1}{364}
\end{aligned}$$

Př. 70 *Vypočtěte n−rozměrný integrál*

$$\int \cdots \int_V \left(x_1^2 + \ldots x_n^2\right) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n,$$

a $V = [0,1]^n$.

Neboť je množina V tvořena $n-$rozměrnou krychlí, máme

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \left(x_1^2 + \ldots x_n^2\right) \mathrm{d}x_n \ldots \mathrm{d}x_1 =$$
$$= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \cdots \int_0^1 x_i^2 \mathrm{d}x_n \ldots \mathrm{d}x_1 =$$
$$= \sum_{i=1}^n \int_0^1 x_i^2 \mathrm{d}x_i = \sum_{i=1}^n \left[\frac{x_i^3}{3}\right]_0^1 =$$
$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{3} = \frac{n}{3}$$

Př. 71 *Vypočtěte $n-$rozměrný integrál*

$$\int \cdots \int_V \left(x_1 + x_2^2 \ldots x_n^n\right) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n,$$

a V je omezena $0 \leq x_k \leq k$, pro $k = 1, \ldots, n$.

Vzhledem k tvaru V můžeme hned počítat

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^2 \cdots \int_0^n \left(x_1 + x_2^2 \ldots x_n^n\right) \mathrm{d}x_n \ldots \mathrm{d}x_1 = \\
&= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \int_0^2 \cdots \int_0^n x_i^i \mathrm{d}x_n \ldots \mathrm{d}x_1 = \\
&= \sum_{i=1}^n 1 \cdot 2 \ldots (i-1)(i+1) \ldots n \int_0^{x_n} x_i^i \mathrm{d}x_i = \\
&= \sum_{i=1}^n 1 \cdot 2 \ldots (i-1)(i+1) \ldots n \left[\frac{x_i^{i+1}}{i+1}\right]_0^i = \\
&= \sum_{i=1}^n 1 \cdot 2 \ldots (i-1)(i+1) \ldots n \frac{i^{i+1}}{i+1} = n! \sum_{i=1}^n \frac{i^i}{i+1}
\end{aligned}$$

Př. 72 *Vypočtěte n−rozměrný integrál*

$$\int \cdots \int_V x_1 \dots x_n \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n,$$

a V je omezena $0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le x_1,\ \dots,\ 0 \le x_n \le x_{n-1}$.

Vzhledem k tvaru V můžeme hned počítat

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_{n-1}} x_1 \dots x_n \mathrm{d}x_n \dots \mathrm{d}x_1 = \\
&= \int_0^1 x_1 \int_0^{x_1} x_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} x_n \mathrm{d}x_n \dots \mathrm{d}x_1 = \\
&= \int_0^1 x_1 \int_0^{x_1} x_2 \cdots \int_0^{x_{n-2}} x_{n-1} \left[\frac{x_n^2}{2}\right]_0^{x_{n-1}} \mathrm{d}x_{n-1} \dots \mathrm{d}x_1 = \\
&= \int_0^1 x_1 \int_0^{x_1} x_2 \cdots \int_0^{x_{n-2}} \frac{x_{n-1}^3}{2} \mathrm{d}x_{n-1} \dots \mathrm{d}x_1 = \\
&= \int_0^1 x_1 \int_0^{x_1} x_2 \cdots \int_0^{x_{n-3}} x_{n-2} \left[\frac{x_{n-1}^4}{2 \cdot 4}\right]_0^{x_{n-2}} \mathrm{d}x_{n-2} \dots \mathrm{d}x_1 = \\
&= \int_0^1 x_1 \int_0^{x_1} x_2 \cdots \int_0^{x_{n-3}} \frac{x_{n-2}^5}{2 \cdot 4} \mathrm{d}x_{n-2} \dots \mathrm{d}x_1 = \\
&= \int_0^1 x_1 \int_0^{x_1} x_2 \cdots \int_0^{x_{n-4}} x_{n-3} \left[\frac{x_{n-2}^6}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right]_0^{x_{n-3}} \mathrm{d}x_{n-3} \dots \mathrm{d}x_1 = \\
&= \cdots = \frac{1}{2 \dots (2n)} = \frac{1}{2^n n!}
\end{aligned}$$

Př. 73 *Vypočtěte $n-$rozměrný integrál*

$$\int \cdots \int_V (x_1 + x_2 \ldots x_n)^2 \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n,$$

a V je omezena $0 \leq x_k \leq 1$, pro $k = 1, \ldots, n$.

Neboť je množina V tvořena $n-$rozměrnou krychlí, máme

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \cdots \int_0^1 (x_1 + \ldots x_n)^2 \, \mathrm{d}x_n \ldots \mathrm{d}x_1 = \\
&= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j\neq i}^n x_i x_j \mathrm{d}x_n \ldots \mathrm{d}x_1 = \\
&= \sum_{i=1}^n \int_0^1 x_i^2 \mathrm{d}x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j\neq i}^n \int_0^1 \int_0^1 x_i x_j \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j = \\
&= \sum_{i=1}^n \left[\frac{x_i^3}{3}\right]_0^1 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j\neq i}^n \int_0^1 x_i \mathrm{d}x_i \int_0^1 x_j \mathrm{d}x_j = \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{1}{3} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j\neq i}^n \frac{1}{4} = \\
&= \frac{n}{3} + \sum_{i=1}^n \frac{n-1}{4} = \frac{n}{3} + \frac{n(n-1)}{4} = \frac{3n^2 + n}{12}
\end{aligned}$$

Př. 74 *Spočtěte integrál*

$$\iiint_V 7x + 2z \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána* $0 \leq x \leq 1$, $x^2 \leq y \leq x$, $0 \leq z \leq xy$.

Množina V je dána postupnými ohraničeními, můžeme tedy rovnou převést

$$\begin{aligned}
\iiint_V 7x + 2z \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^1 \int_{x^2}^x \int_0^{xy} 7x + 2z \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_{x^2}^x \left[7xz + z^2\right]_0^{xy} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 \int_{x^2}^x 7x^2y + x^2y^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[7x^2\frac{y^2}{2} + x^3\frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^x \mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 \frac{7x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{7x^6}{2} - \frac{x^9}{3} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{7x^4}{2} - \frac{19x^6}{6} - \frac{x^9}{3} \mathrm{d}x = \\
&= \left[\frac{7x^5}{10} - \frac{19x^7}{42} - \frac{x^10}{30}\right]_0^1 = \frac{7}{10} - \frac{19}{42} - \frac{1}{30}
\end{aligned}$$

Př. 75 *Spočtěte integrál*

$$\iiint_V x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V je ohraničena plochami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ a $x + y + z = 1$.

Množina V je tvořena jednotkovým simplexem. Proto víme, že můžeme integrál zapsat jako

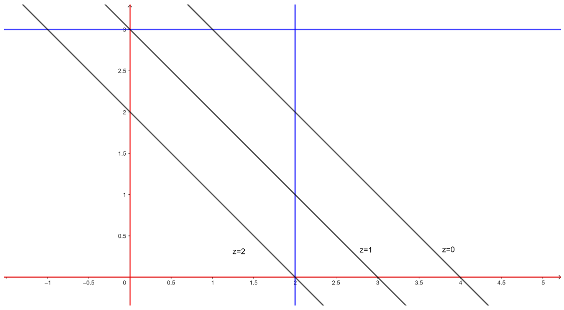
$$\iiint_V x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{1-x-y} x^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$
$$= \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-x-z} x^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

Vybereme si jeden z možných zápisů a počítáme

$$\iiint_V x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 x^2 \int_0^{1-x} 1 - x - y\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 \left[(1-x)y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} \mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 x^2 \left((1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2}\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^2 - 2x^3 - x^4}{2} \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} - \frac{1}{5}\right)$$

Př. 76 *Spočtěte objem množiny V, která je dána $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x = 2$, $y = 3$, $x+y+z = 4$.*

Nejdříve musíme určit tvar množiny V. Vidíme, že plochy $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$, $y = 3$ udávají obdélník. Vzhledem k vrstevnicím vidíme, že množina V má největší rozsah vzhledem k proměnným x a y v půdorysně xy.



Objem tedy dostáváme jako integrál

$$
\begin{aligned}
O &= \iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^3 \int_0^{4-x-y} \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_1^2 \int_0^{4-x} \int_0^{4-x-y} \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 \int_0^3 4 - x - y\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_1^2 \int_0^{4-x} 4 - x - y\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 \left[(4-x)y - \frac{y^2}{2}\right]_0^3 \mathrm{d}x + \int_1^2 \left[(4-x)y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{4-x} \mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 3(4-x) - \frac{9}{2}\mathrm{d}x + \int_1^2 (4-x)^2 - \frac{(4-x)^2}{2}\mathrm{d}x = \left[12x - \frac{3x^2}{2} - \frac{9x}{2}\right]_0^1 + \int_1^2 \frac{16 - 8x + x^2}{2}\mathrm{d}x = \\
&= 12 - \frac{3}{2} - \frac{9}{2} + \frac{1}{2}\left[16x - 4x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = 6 + \frac{1}{2}\left(32 - 16 + \frac{8}{3} - 16 + 4 - \frac{1}{3}\right) = \\
&= 12 + \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Př. 77 *Spočtěte integrál*

$$\iiint_V x + y \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde $V = [0,1] \times [1,2] \times [0,1]$.

Jedná se o krychli. Počítáme tedy

$$\iiint_V x + y \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_1^2 \int_0^1 x + y \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_1^2 (x+y)\,[z]_0^1\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_1^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 2x + 2 - x - \frac{1}{2}\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x\right]_0^1 =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$

Př. 78 *Převeďte trojný integrál*

$$\iiint_V 2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána* $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, $x + y = 1$ *na trojnásobný integrál.*

Máme podmínky $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y = 1$ nezávislé na proměnné z. Vidíme, že $0 \leq y = 1 - x$ dává snadno $x \leq 1$. Z omezení $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ vyjádříme $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 + 1}$. Neboť však chceme $z \geq 0$, volíme pouze ohraničení $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$. Převedeme

$$\iiint_V 2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{\sqrt{x^2+y^2+1}} 2z\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Př. 79 *Převeďte trojný integrál*

$$\iiint_V \sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V je dána $x=2$, $y=0$, $z=0$, $x=2y$, $z=x^2$ na trojnásobný integrál.

Podmínky $x=2$, $y=0$, $x=2y$ nezávisí na proměnné z. Vidíme, že v rovině xy je tedy $0 \le y \le \frac{x}{2}$ a také $0 \le x \le 2$. Dále plocha $z=x^2$ tvoří válec nezávislý na proměnné y. Dostáváme ohraničení $0 \le z \le x^2$.

Celkem máme

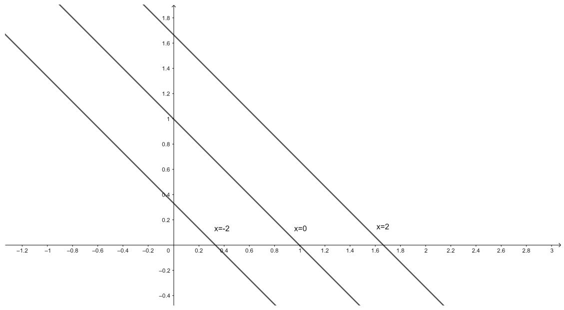
$$\iiint_V \sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^2 \int_0^{\frac{x}{2}} \int_0^{x^2} \sin(x+y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Př. 80 *Převeďte trojný integrál*

$$\iiint_V \ln z^2 + y^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V je dána $y = 0$, $z = 0$, $-x + 3y + 3z = 3$, $x \leq 2$ na trojnásobný integrál.

Vidíme, že plocha $-x + 3y + 3z = 3$ je rovina. Vzhledem k podmínkám $y = 0$, $z = 0$ vykreslíme vrstevnice vzhledem k bokorysně yz



Zřejmě je v rovině $x = 2$ rozsah množiny V největší vzhledem k proměnným yz. Máme $0 \leq z \leq \frac{5-3y}{3}$ pro $0 \leq y \leq \frac{5}{3}$ nebo obdobně $0 \leq y \leq \frac{5-3z}{3}$ pro $0 \leq z \leq \frac{5}{3}$. Převedeme tedy i vzhledem k vrstevnicím roviny $-x + 3y + 3z = 3$ integrál jako

$$\iiint_V \ln z^2 + y^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{5}{3}} \int_0^{\frac{5-3y}{3}} \int_{3y+3x-3}^{2} \ln z^2 + y^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}y.$$

Obdobně můžeme uvažovat situaci v rovině $z = 0$ a dostáváme pro $-3 \leq x \leq 2$, že $0 \leq y \leq 1 + \frac{x}{3}$. Poté je integrál dán jako

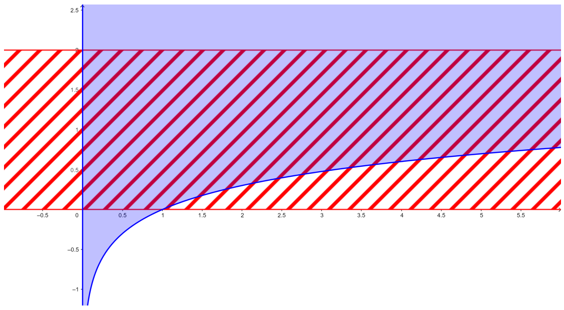
$$\iiint_V \ln z^2 + y^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{-3}^{2} \int_0^{1+\frac{x}{3}} \int_0^{1-y+\frac{x}{3}} \ln z^2 + y^3 \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Př. 81 *Převeďte trojný integrál*

$$\iiint_V \frac{\mathrm{Bam}(x) - y}{z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána* $x = 0$, $z \geq 0$, $z = 4 - y^2$, $y \geq 0$, $y \geq \ln x$ *na trojnásobný integrál.*

Všimneme si, že podmínky $x = 0$, $y \geq 0$, $y \geq \ln x$ nezávisí na proměnné z a vykreslíme si tedy tuto situaci v rovině $z = 0$. Také plocha $z = 4 - y^2$ je nezávislá na proměnné x. Platí, že $z \geq 0$ a tedy z omezení $4 - y^2 \geq 0$ dostáváme také, že $y \leq 2$. Druhá podmínka $-2 \leq y$ nás nezajímá, neboť $y \geq 0$. Dostáváme tedy v půdorysně



Podmínky $y \geq 0$, $y \geq \ln x$ vždy na jistém intervalu převáží jedna druhou, budeme tedy mít nově dva trojnásobné integrály a průsečík $\ln x = 2$ z něhož plyne $x = \mathrm{e}^2$ nám dává podmínku pro x jako $0 \leq x \leq \mathrm{e}^2$. Dostáváme tedy snadno integrál

$$\iiint_V \frac{\mathrm{Bam}(x) - y}{z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^{4-y^2} \frac{\mathrm{Bam}(x) - y}{z} \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x +$$
$$+ \int_1^{\mathrm{e}^2} \int_{\ln x}^2 \int_0^{4-y^2} \frac{\mathrm{Bam}(x) - y}{z} \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Obdobně můžeme zaměnit pořadí integrace jako

$$\iiint_V \frac{\mathrm{Bam}(x) - y}{z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^2 \int_0^{\mathrm{e}^y} \int_0^{4-y^2} \frac{\mathrm{Bam}(x) - y}{z} \mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$
$$= \int_0^2 \int_0^{4-y^2} \int_0^{\mathrm{e}^y} \frac{\mathrm{Bam}(x) - y}{z} \mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}y.$$

Př. 82 *Zaměňte pořadí integrace*

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z^2 \mathrm{Buch}(x,y) \mathrm{d}z \mathrm{d}y \mathrm{d}x.$$

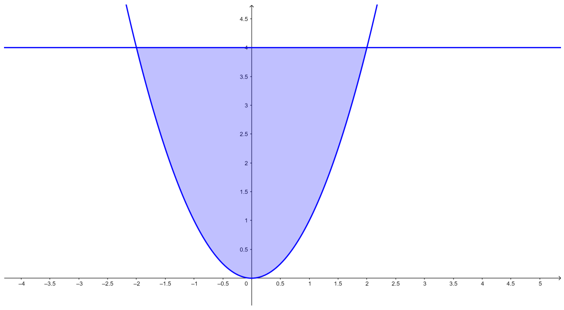
Z integrálu vidíme, že $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1-x$, $0 \leq z \leq 1-x-y$, což jak již víme je jednotkový simplex. Proto můžeme hned psát integrál jako

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{1-x-y} z^2 \mathrm{Buch}(x,y) \mathrm{d}z \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-z-x} z^2 \mathrm{Buch}(x,y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x \mathrm{d}z.$$

Př. 83 *Zaměňte pořadí integrace*

$$\int_{-2}^{2}\int_{y^2}^{4}\int_{0}^{4-z} \mathrm{Dingdong}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}y.$$

Hned z integrálu vidíme podmínky $-2 \leq y \leq 2$, $y^2 \leq z \leq 4$, $0 \leq x \leq 4 - z$. Snadnou záměnu provedeme pokud zaměníme pořadí integrálů $\int_{-2}^{2}\int_{y^2}^{4}$. V rovině yz jsou podmínky $-2 \leq y \leq 2$, $y^2 \leq z \leq 4$ vykresleny



Snadno tak zaměníme pořadí integrálů

$$\int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}}\int_{0}^{4-z} \mathrm{Dingdong}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{0}^{4}\int_{0}^{4-z}\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \mathrm{Dingdong}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z.$$

Př. 84 *Spočtěte integrál*

$$\iiint_V xy + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V je dána $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1-x$, $0 \le z \le 2-x-2y$.

Neboť máme podmínky zadané v dostatečné podobě, můžeme hned počítat

$$\begin{aligned}
&\iiint_V xy + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-x-2y} xy + z\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[xyz + \frac{z^2}{2} \right]_0^{2-x-2y} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[xy(2-x-2y) + \frac{(2-x-2y)^2}{2} \right]_0^{2-x-2y} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} 4xy - x^2y - 2xy^2 + 2 - 2x - 4y + \frac{x^2}{2} + 2y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 \left[2xy^2 - \frac{x^2y^2}{2} - \frac{2xy^3}{3} + 2y - 2xy - 2y^2 + \frac{x^2y}{2} + \frac{2y^3}{3} \right]_0^{1-x} \mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 2x(1-x)^2 - \frac{x^2(1-x)^2}{2} - \frac{2x(1-x)^3}{3} + 2 - 2x - 2x(1-x) - \\
&- 2(1-x)^2 + \frac{x^2(1-x)}{2} + \frac{2(1-x)^3}{3}\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 2x - 4x^2 + 2x^3 - \frac{x^2 - 2x^3 + x^4}{2} - \frac{2x - 6x^2 + 6x^3 - 2x^4}{3} + \\
&+ \frac{x^2 - x^3}{2} + \frac{2 - 6x + 6x^2 - 2x^3}{3}\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 2x - 2x^2 + x^3 + \frac{-x^3 - x^4}{2} + \frac{2 - 8x + 6x^2 - 2x^3 + 2x^4}{3}\mathrm{d}x = \\
&= \left[x^2 - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{10} + \frac{2x - 4x^2 + 2x^3}{3} \frac{-2x^4}{12} + \frac{2x^5}{15} \right]_0^1 = \\
&= 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{2}{12} + \frac{2}{15} = \frac{24 - 16 + 3 - 4}{24} + \frac{4-3}{30} = \frac{7}{24} + \frac{1}{30}
\end{aligned}$$

Př. 85 *Spočtěte integrál*

$$\iiint_V y\cos(x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána* $y=0,\ z=0,\ x+z=\frac{\pi}{2},\ y=\sqrt{x}$.

v rovině $z=0$ máme ohraničení $y=0$, $y=\sqrt{x}$ a $x=\frac{\pi}{2}$. Dostáváme tedy jednoduše integrál

$$\begin{aligned}
\iiint_V y\cos(x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{x}}\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} y\cos(x+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{x}} \left[y\sin(x+z)\right]_0^{\frac{\pi}{2}-x}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{x}} y\left(\sin(\frac{\pi}{2})-\sin x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{2}(1-\sin x)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{x}{2}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x = \\
&= \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

3 Transformace dvojného integrálu

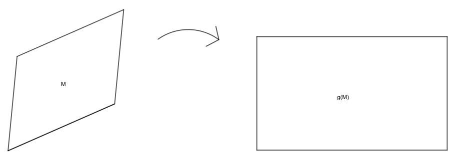
Nechť $M \subset E^2$ je otevřená množina v rovině u, v, g je prosté zobrazení množiny M do roviny xy dané funkcemi $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, které mají na M spojité parciální derivace prvního řádu. Nechť funkce

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

je nenulová a ohraničená na množině M. Nechť M a $g(M)$ jsou měřitelné množiny a funkce f je spojitá a ohraničená na $g(M)$. Potom platí

$$\iint_{g(M)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_M f(x(u,v), y(u,v)) \cdot |J(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

V podstatě chceme převést množinu do tvaru, ve kterém se nám snáze integruje. Dostáváme situaci



Příkladem transformace v E^2 máme

$$x = au + c,$$
$$y = bv + d,$$

kde $a > 0$, $b > 0$. Její Jakobián je

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = ab$$

Dalším příkladem je transformace do polárních souřadnic

$$x = \rho \cos\varphi,$$
$$y = \rho \sin\varphi,$$

kde $\rho \in [0, \infty)$ je vzdálenost bodu od počátku a $\varphi \in [0, 2\pi]$ je odchylka úhlu od kladné poloosy x v kladném smyslu. Transformace má

$$J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \rho$$

Dalším příkladem je transformace do eliptických souřadnic

$$x = a\rho \cos\varphi,$$
$$y = b\rho \sin\varphi,$$

kde $\varphi \in [0, 2\pi]$ je stále odchylka úhlu od kladné poloosy x v kladném smyslu. Avšak $\rho \in [0, \infty)$ je nyní pozměněná vzdálenost bodu od počátku v upravené metrice. Jakobián tohoto zobrazení je

$$J(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = ab\rho$$

Př. 86 *Transformujte integrál vhodnou transformací*

$$\iint_M f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $x^2+y^2 \leq 2$, $y \geq x$.

Neboť podmínka $x^2+y^2 \leq 2$ udává kružnici, volíme transformaci do polárních souřadnic $x = \rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, kde $\varphi \in [0,2\pi]$, $\rho \geq 0$. Dosazením do nerovnic dostaneme

$$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = \rho^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = \rho^2 \leq 2.$$

Proto máme $\rho \in [0,\sqrt{2}]$. Dosazením do druhé nerovnosti dostaneme

$$\begin{gathered}\rho\sin\varphi \geq \rho\cos\varphi \\ \sin\varphi \geq \cos\varphi\end{gathered}$$

Vykreslíme-li si grafy funkcí $\sin x$, $\cos x$, dostaneme ze znalosti jejich průsečíků, že $\varphi \in [\pi/4, 5\pi/4]$. Jakobián $|J| = \rho$. Počítaný integrál je tedy tvaru

$$\int_0^{\sqrt{2}}\int_{\pi/4}^{5\pi/4} \rho f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$$

Př. 87 *Transformujte integrál vhodnou transformací*

$$\iint_M f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $x^2+y^2 \leq 1$, $x+y \geq 1$.

Neboť podmínka $x^2+y^2 \leq 1$ udává kružnici, volíme transformaci do polárních souřadnic $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, kde $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\rho \geq 0$. Dosazením do nerovnice

$$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = \rho^2 \leq 1.$$

Proto máme $\rho \in [0, 1]$. Dosazením do druhé nerovnosti dostaneme

$$\begin{aligned} \rho\sin\varphi + \rho\cos\varphi \geq 1 \\ \rho \geq \frac{1}{\sin\varphi + \cos\varphi} \end{aligned}$$

Dále chceme určit rozsah pro proměnnou φ. Vykreslením získáme snadno, že $\varphi \in [0, \pi/2]$. Stejný rozsah získáme, pokud uvážíme, že

$$\sin\varphi + \cos\varphi \geq \frac{1}{\rho} \geq 1.$$

Jakobián $|J| = \rho$. Dostáváme tedy integrál

$$\int_0^{\pi/2}\int_{\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}}^{1} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$$

Př. 88 *Transformujte integrál vhodnou transformací*

$$\iint_M f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $x^2+y^2 \le y$, $y \ge x$, $x \ge 0$.

Všimneme si, že nerovnost $x^2+y^2 \le y$ udává posunutou kružnici. Můžeme se tedy rozhodnout pro transformace 1)$x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ nebo 2)$x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi+\frac{1}{2}$. Vyzkoušíme-li první možnost, dostáváme dosazením

$$\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=\rho^2 \le \rho\sin\varphi$$

což nás vede k omezení $\rho \le \sin\varphi$. Další nerovnosti vedou k

$$\begin{aligned}\rho\sin\varphi &\ge \rho\cos\varphi\\ \sin\varphi &\ge \cos\varphi\end{aligned}$$

Toto je splněno pro $\varphi \in I_1=[\pi/4, 5\pi/4]$. Další omezení

$$\begin{aligned}\rho\cos\varphi &\ge 0\\ \cos\varphi &\ge 0\end{aligned}$$

vede na interval $I_2=[0,\pi/2]$. Průnikem těchto intervalů $I_1 \cap I_2$ vede na integrál

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{\sin\varphi}\rho\rho f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi.$$

Druhá varianta transformace vede na omezení

$$\rho\cos\varphi \le \rho\sin\varphi+\frac{1}{2}$$

Tato nerovnost není snadno řešitelná.

Př. 89 *Transformujte integrál vhodnou transformací*

$$\iint_M f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $y=x$, $y=2x$, $x^2+y^2=4x$, $x^2+y^2=8x$.

Transformujeme rovnost $x^2+y^2=4x$ úpravou na čtverec na rovnost $(x-2)^2+y^2=4$ a rovnost $x^2+y^2=8x$ na $(x-4)^2+y^2=16$. Vzhledem k tomu, že jedna kružnice je očividně obsažena ve druhé, dostaneme nerovnosti $(x-2)^2+y^2\geq 4$ a $(x-4)^2+y^2\leq 16$. Vzhledem ke kružnicím také vidíme, že $x\geq 0$. Přímky $y=x$, $y=2x$ se protínají v počátku a vzhledem k podmínce $x\geq 0$ vidíme ohraničení $x\leq y\leq 2x$. Mohli bychom uvažovat o posunutých polárních souřadnic, neboť však uvažujeme dvě kružnice s různým posunutín, vyzkoušíme nejprve obyčejné polární souřadnice. Dosazením polárních souřadnic do nerovností dostaneme

$$\begin{aligned}4\rho\cos\varphi \leq&\rho^2\leq 8\rho\cos\varphi\\ 4\cos\varphi\leq&\rho\leq 8\cos\varphi\end{aligned}$$

Z druhé nerovnosti pak máme

$$\begin{aligned}\rho\cos\varphi\leq\rho\sin\varphi\leq 2\rho\cos\varphi\\ \cos\varphi\leq\sin\varphi\leq 2\cos\varphi\end{aligned}$$

Z první nerovnosti $\cos\varphi\leq\sin\varphi$ dostaneme interval $\varphi\in I_1=[\pi/4,5\pi/4]$. Ze druhé nerovnosti uvážíme dva případy. 1) $\cos\varphi>0$, což vede na ohraničení

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\operatorname{tg}\varphi\leq 2,$$

což vede na ohraničení $\varphi\leq\operatorname{arctg}2$. Druhá varianta 2) $\cos\varphi<0$ vede na nerovnost

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\operatorname{tg}\varphi\geq 2$$

Avšak na intervalu $(\pi/2,5\pi/4]$, kde $\cos\varphi<0$ je $\operatorname{tg}\varphi\leq 1$. Celkově tedy máme interval

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi}\rho f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi.$$

Př. 90 *Transformujte integrál vhodnou transformací*

$$\iint_M f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $x^2+y^2 \le Ax$, $A>0$.

Ohraničení $x^2+y^2 \le Ax$ převedeme úpravou na čtverec na $\left(x-\frac{A}{2}\right)^2+y^2 \le \frac{A}{4}$. Vidíme, že se jedná o kružnici s posunutým středem mimo počátek, zavedeme tedy polární souřadnice $x=\rho\cos\varphi+\frac{A}{2}$, $y=\rho\sin\varphi$. Dosazením do omezení dostáváme

$$\rho^2 \le \frac{A}{4}$$

A tedy $\rho \in [0, A/2]$. Neboť další podmínku nemáme, je $\varphi \in [0, 2\pi]$. Jakobián zůstává posunutím stejný, a proto $|J| = \rho$.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{A/2} \rho f(\rho\cos\varphi + A/2, \rho\sin\varphi)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi.$$

Pokud využijeme standardní polární souřadnice $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, dostaneme dosazením do nerovnosti

$$\begin{aligned} \rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi = \rho^2 &\le A\rho\cos\varphi \\ \rho &\le A\cos\varphi \end{aligned}$$

Neboť je $\rho \ge 0$, je také $\cos\varphi \ge 0$ a proto $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$. Tímto získáme integrál

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{A\cos\varphi} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$$

Př. 91 *Transformujte integrál vhodnou transformací*

$$\iint_M f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M *je ohraničená* $x^2+y^2 \geq A^2$, $x^2+y^2 \leq B^2$, $y \geq 0$, $y \leq x$, $0 < A < B$.

Neboť máme množinu M omezenou kružnicemi se středem v počátku, zavedeme obvyklé polární souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Tímto získáme

$$\begin{aligned} A^2 \leq& \rho^2 \leq B^2 \\ A \leq& \rho \leq B \end{aligned}$$

Dosazením do dalších omezení dostáváme $\rho\sin\varphi \geq 0$ což vede na interval $\varphi \in I_1 = [0,\pi]$. Další omezení

$$\begin{aligned} \rho\sin\varphi &\leq \rho\cos\varphi \\ \sin\varphi &\leq \cos\varphi \end{aligned}$$

Tato nerovnost je splněna na intervalu $I_2 \in [0,\pi/4] \cup [5\pi/4, 2\pi]$. Celkem tedy dostáváme $\varphi \in I_1 \cap I_2 = [0,\pi/4]$. Proto

$$\int_0^{\pi/4}\int_A^B \rho f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi.$$

Př. 92 *Transformujte integrál vhodnou transformací*

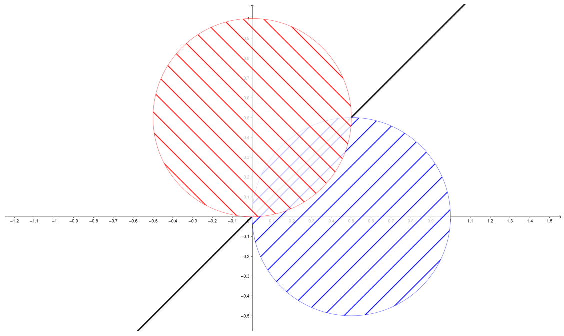
$$\iint_M f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $x^2+y^2 \le Ax$, $x^2+y^2 \le By$, $A>0$, $B>0$.

Nejprve nalezneme průsečík kružnic $x^2+y^2 \le Ax$ a $x^2+y^2 \le By$. Což vede na rovnost $Ax = By$ a tedy průsečík leží na přímce $y = \frac{Ax}{B}$. Navíc z nerovnic dostaneme zavedením polárních souřadnic

$$0 \le \rho \le \le A\cos\varphi$$
$$0 \le \rho \le \le B\sin\varphi$$

Z tohoto důvodu máme navíc $\cos\varphi \ge 0$ a $\sin\varphi \ge 0$. Tyto nerovnosti jsou splněny pouze na intervalu $[0,\pi/2]$. Úhel přímky $y = \frac{Ax}{B}$ dostaneme jako derivaci $\operatorname{tg}\varphi = \left(\frac{Ax}{B}\right)' = \frac{A}{B}$. Vykreslíme-li si situaci na obrázku množiny M spolu s úhlem φ.



Vidíme, že úhel $\operatorname{tg}\varphi = \frac{A}{B}$ dělí interval $[0,\pi/2]$ na dvě části. Máme tedy

$$\int_0^{\operatorname{arctg}\frac{A}{B}} \int_0^{A\cos\varphi} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi + \int_{\operatorname{arctg}\frac{A}{B}}^{\pi/2} \int_0^{B\sin\varphi} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$$

Př. 93 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M \sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $x^2+y^2 \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Neboť množina M je tvořena čtvrtinou kružnice, zavedeme tedy polární souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Dosazením do omezení dostaneme

$$\begin{aligned}\rho &\le 1\\ \rho\cos\varphi &\ge 0\\ \rho\sin\varphi &\ge 0\end{aligned}$$

Z těchto nerovností získáme $\varphi \in [0, \pi/2]$, $\rho \in [0, 1]$. Proto počítáme integrál

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}\rho =$$
$$\frac{\pi}{2}\int_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}\rho = \left|\begin{array}{c} t=\rho^2 \\ \mathrm{d}t = 2\rho\mathrm{d}\rho \end{array}\right| = \frac{\pi}{4}\int_0^1 \sqrt{1-t}\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{\pi}{4}\left[-\frac{2\sqrt{1-t}}{3}\right]_0^1 = 0\frac{\pi}{6}.$$

Př. 94 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M x + y \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Neboť množina M je tvořena čtvrtinou kružnice, zavedeme tedy polární souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Dosazením do omezení dostaneme

$$\begin{aligned} \rho &\leq 1 \\ \rho\cos\varphi &\geq 0 \\ \rho\sin\varphi &\geq 0 \end{aligned}$$

Z těchto nerovností získáme $\varphi \in [0, \pi/2]$, $\rho \in [0, 1]$. Proto počítáme integrál

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho\left(\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi\right) \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi/2} \cos\varphi + \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \rho^2 \mathrm{d}\rho = \\ &= \left[\sin\varphi - \cos\varphi\right]_0^{\pi/2} \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left(1 - 0 - 0 + 1\right) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Př. 95 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $x^2+y^2 \le 1$, $x \ge 0$.

Neboť množina M je tvořena polovinou kružnice, zavedeme tedy polární souřadnice $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Dosazením do omezení dostaneme

$$\begin{aligned} \rho &\le 1 \\ \rho\cos\varphi &\ge 0 \end{aligned}$$

Z těchto nerovností získáme $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\rho \in [0,1]$. Proto počítáme integrál

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^1 \rho\,\mathrm{e}^{-\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^1 \rho\,\mathrm{e}^{-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \\ &= \left| \begin{array}{c} t=\rho^2 \\ \mathrm{d}t = 2\rho\mathrm{d}\rho \end{array} \right| = \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}+1\right) \end{aligned}$$

Př. 96 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M y \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $x^2 + y^2 \leq Ax$, $y \geq 0$, $A > 0$.

Nerovnost $x^2+y^2 \leq Ax$ upravíme na čtverec do tvaru $\left(x - \frac{A}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{A^2}{4}$. Vzhledem k tomu, že se jedná o posunutou kružnici, zavedeme posunuté polární souřadnice $x = \rho\cos\varphi + \frac{A}{2}$, $y = \rho\sin\varphi$. Dosazením do první nerovnice dostaneme $\rho \leq \frac{A}{2}$. Ze druhé nerovnice poté máme $\rho\sin\varphi \geq 0$, což vede na omezení $\varphi \in [0,\pi]$. Posunutím se jakobián transformace nezmění, máme tedy

$$\int_0^\pi \int_0^{A/2} \rho^2 \sin\varphi \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \int_0^\pi \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \int_0^{A/2} \rho^2 \mathrm{d}\rho =$$
$$= [-\cos\varphi]_0^\pi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{A/2} \mathrm{d}\rho = 2 \cdot \frac{A^3}{24} = \frac{A^3}{12}$$

Př. 97 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M x\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $x^2+y^2 \leq 4$, $y \geq 0$.

Neboť množina M je tvořena polovinou kružnice, zavedeme tedy polární souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Dosazením do omezení dostaneme

$$\begin{aligned} \rho^2 &\leq 4 \\ \rho\sin\varphi &\geq 0 \end{aligned}$$

Z těchto nerovností získáme $\varphi \in [0,\pi]$, $\rho \in [0,2]$. Proto počítáme integrál

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \int_0^1 \rho^2\cos\varphi\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \\ &= \int_0^\pi \int_0^1 \rho^3\cos\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \int_0^\pi \cos\varphi\mathrm{d}\varphi \int_0^1 \rho^3\mathrm{d}\rho = \\ &= [\sin\varphi]_0^\pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = 0 \end{aligned}$$

Př. 98 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M x^2 + y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $(x-A)^2 + y^2 \leq A^2$, $A > 0$.

V tomto případě se musíme rozhodnout mezi transformacemi 1)$x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, která je vhodná vzhledem k tvaru integrované funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$. Druhou možností je 2)$x = \rho\cos\varphi + A$, $y = \rho\sin\varphi$, která je vhodná vzhledem k tvaru integrované množiny M. Vyzkoušíme-li variantu 2), dostáváme

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_0^A \rho\left((\rho\cos\varphi + A)^2 + \rho^2\sin^2\varphi\right)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^A \rho\left(\rho^2 + 2A\rho\cos\varphi + A^2\right)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^A \rho^3 + 2A\rho^2\cos\varphi + A^2\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^4}{4} + \frac{2A\rho^3}{3}\cos\varphi + \frac{A^2\rho^2}{2}\right]_0^A \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{A^4}{4} + \frac{2A^4}{3}\cos\varphi + \frac{A^4}{2}\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{3A^4}{2}\pi + \frac{2A^4}{3}\left[\sin\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{3A^4}{2}\pi
\end{aligned}$$

Varianta 1) vede na omezení

$$\begin{aligned}
\rho^2 &\leq 2A\rho\cos\varphi \\
\rho &\leq 2A\cos\varphi
\end{aligned}$$

Z omezení $\rho \geq 0$ dostaneme také $\cos\varphi \geq 0$. Integrovaná množina je poté $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\rho \in [0, 2A\cos\varphi]$.

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2A\cos\varphi} \rho^3\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{2A\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi = \\
&= 4A^4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\varphi\mathrm{d}\varphi = 4A^4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2\mathrm{d}\varphi = \\
&= A^4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi\mathrm{d}\varphi = \\
&= A^4\left[\varphi + \sin 2\varphi\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + A^4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos 4\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi = \\
&= A^4\pi + A^4\left[\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 4\varphi}{8}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = A^4\pi + A^4\frac{\pi}{2} = \frac{3A^4}{2}\pi
\end{aligned}$$

Př. 99 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $x^2+y^2\geq 1$, $x^2+y^2\leq 3$, $\frac{x}{\sqrt{3}}\leq y\leq\sqrt{3}x$.

Neboť množina M je tvořena částí mezikruží, zavedeme tedy polární souřadnice $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Dosazením do omezení dostaneme

$$\begin{aligned}1\leq&\rho^2\leq 3\\ \frac{\cos\varphi}{\sqrt{3}}\leq&\sin\varphi\leq\sqrt{3}\cos\varphi\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\leq&\operatorname{tg}\varphi\leq\sqrt{3}\end{aligned}$$

Pokud je $\cos\varphi>0$. Uvážili bychom situaci, kde je $\cos\varphi<0$, dostaneme nerovnost $\frac{1}{\sqrt{3}}\geq\sqrt{3}$, což nemůže být splněno. Máme tedy interval $\varphi\in[\pi/6,\pi/3]$ a $\rho\in[1,\sqrt{3}]$. Počítáme

$$\begin{aligned}&\int_{\pi/6}^{\pi/3}\int_1^{\sqrt{3}}\rho\operatorname{arctg}\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi=\\ &=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\varphi\mathrm{d}\varphi\int_1^{\sqrt{3}}\rho\mathrm{d}\rho=\left[\frac{\varphi^2}{2}\right]_{\pi/6}^{\pi/3}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_1^{\sqrt{3}}=\\ &=\left(\frac{\pi^2}{18}-\frac{\pi^2}{72}\right)\cdot\frac{3-1}{2}=\frac{4\pi^2-\pi^2}{72}=\frac{\pi^2}{24}\end{aligned}$$

Př. 100 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $x^2 + y^2 \leq A^2$, $y \geq 0$, $x > 0$, $A > 0$.

Neboť množina M je tvořena čtvrtinou kružnice, zavedeme tedy polární souřadnice $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Dosazením do omezení dostaneme

$$\begin{aligned} \rho^2 &\leq A^2 \\ \rho \sin \varphi &\geq 0 \\ \rho \cos \varphi &> 0 \end{aligned}$$

Z těchto nerovností získáme $\varphi \in [0, \pi/2)$, $\rho \in [0, A]$. Proto počítáme integrál

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi/2} \int_0^A \rho \operatorname{arctg} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi = \\ &= \int_0^{\pi/2} \varphi \mathrm{d}\varphi \int_0^A \rho \mathrm{d}\rho = \left[\frac{\varphi^2}{2}\right]_0^{\pi/2} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^A = \frac{A^2 \pi^2}{16} \end{aligned}$$

Př. 101 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $x^2+y^2 \leq 1$, $y \geq 0$, $x \geq 0$.

Neboť množina M je tvořena čtvrtinou kružnice, zavedeme tedy polární souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Dosazením do omezení dostaneme

$$\begin{aligned} \rho^2 &\leq 1 \\ \rho\sin\varphi &\geq 0 \\ \rho\cos\varphi &\geq 0 \end{aligned}$$

Z těchto nerovností získáme $\varphi \in [0, \pi/2]$, $\rho \in [0, 1]$. Proto počítáme integrál

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \rho\sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \rho\sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\mathrm{d}\rho = \\ &= \left| \begin{array}{c} t = \sqrt{1+\rho^2} \\ \mathrm{d}t = \frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}}\mathrm{d}\rho \end{array} \right| = \frac{\pi}{2}\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2-t^2}\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} t = \sqrt{2}\sin s \\ \mathrm{d}t = \sqrt{2}\cos s\mathrm{d}s \end{array} \right| = \\ &= \frac{\pi}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{2}\cos s\sqrt{2-2\sin^2 s}\mathrm{d}s = \pi\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{2}\cos^2 s\mathrm{d}s = \\ &= \pi\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{2}\frac{1+\cos 2s}{2}\mathrm{d}s = \frac{\pi}{2}\left[s + \frac{\sin 2s}{2}\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Př. 102 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M x^2 + y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $x^2 + y^2 \leq A^2$, $y \geq 0$, $x \geq 0$, $A > 0$.

Neboť množina M je tvořena čtvrtinou kružnice, zavedeme polární souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Dosazením do omezení dostaneme

$$\begin{aligned} \rho^2 &\leq A^2 \\ \rho\sin\varphi &\geq 0 \\ \rho\cos\varphi &\geq 0 \end{aligned}$$

Z těchto nerovností získáme $\varphi \in [0, \pi/2]$, $\rho \in [0, A]$. Proto počítáme integrál

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^A \rho^3 \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^A = \frac{A^4}{8}\pi$$

Př. 103 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $x^2+y^2 \leq A^2$, $A>0$.

Neboť množina M je tvořena kružnicí, zavedeme polární souřadnice $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Dosazením do omezení dostaneme $\rho \leq A$. Neboť nemáme další podmínky, po transformaci je množina $\varphi \in [0,2\pi]$, $\rho \in [0,A]$. Počítáme

$$\int_0^{2\pi}\int_0^A \rho\sqrt{\rho^2}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = 2\pi\int_0^A \rho^2\mathrm{d}\rho =$$

$$= 2\pi\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^A = \frac{2A^3}{3}\pi$$

Př. 104 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M \frac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $\pi^2/36 \le x^2+y^2 \le \pi^2/4$, $y \ge 0$.

Neboť množina M je tvořena polovinou mezikruží, zavedeme polární souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Dosazením do omezení dostaneme

$$\begin{aligned} \pi^2/36 \le& \rho^2 \le \pi^2/4 \\ \rho\sin\varphi& \ge 0 \end{aligned}$$

Po transformaci je množina $\varphi \in [0,\pi]$, $\rho \in [\pi/6, \pi/2]$. Počítáme

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \int_{\pi/6}^{\pi/2} \rho\frac{\cos\sqrt{\rho^2}}{\sqrt{\rho^2}}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \\ &= \int_0^\pi \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \pi\left[\sin\rho\right]_{\pi/6}^{\pi/2} = \pi\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Př. 105 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $0 \le y \le x$, $x^2 + y^2 \le 9$.

Neboť množina M je tvořena částí kružnice, zavedeme polární souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Dosazením do omezení dostaneme

$$\begin{aligned}\rho^2 &\le 9\\ 0 \le \sin\varphi &\le \cos\varphi\\ 0 \le \operatorname{tg}\varphi &\le 1\end{aligned}$$

Vidíme, že $\rho \in [0, 3]$ a $\varphi \in [0, \pi/4]$. Počítáme

$$\int_0^{\pi/4}\int_0^3 2\rho^3\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = 2\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^3\int_0^{\sqrt{2}/2} t\mathrm{d}t = \frac{3^4}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{3^4}{4}\cdot\frac{2}{4} = \frac{3^4}{8}$$

Př. 106 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M 15x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $x^2 + y^2 \leq 4$, $y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}$, $x \geq 0$.

Množina M je částí kružnice, proto zavedeme polární souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Dosazením do omezení dostaneme

$$\begin{aligned} \rho^2 &\leq 4 \\ 0 &\leq \cos\varphi \\ \sin\varphi &\geq \frac{\cos\varphi}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Poslední nerovnost vede na $\operatorname{tg}\varphi \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$. Proto $\rho \in [0, 2]$ a $\varphi \in [\pi/6, \pi/2]$. Počítáme

$$\begin{aligned} &15\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_0^2 \rho^4\cos^2\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = 15\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^2\int_0^{\sqrt{3}/2} t^2\mathrm{d}t = \\ &= 32^5\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}/2} = 2^5\frac{3\sqrt{3}}{2^3} = 12\sqrt{3} \end{aligned}$$

Př. 107 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M x^2 - y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $0 \leq y \leq x$, $x^2 + y^2 \leq 5$, $x^2 + y^2 \geq 3$.

Vyšetřovaná množina tvoří část mezikruží, proto zavedeme polární souřadnice $x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$. Dosazením do omezení dostaneme

$$\begin{aligned} 3 \leq &\rho^2 \leq 5 \\ 0 \leq &\sin\varphi \leq \cos\varphi \\ 0 \leq &\operatorname{tg}\varphi \leq 1 \end{aligned}$$

Proto $\rho \in [\sqrt{3}, \sqrt{5}]$ a $\varphi \in [0, \pi/4]$. Počítáme

$$\int_0^{\pi/4} \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} \rho \left(\rho^2 \cos^2\varphi - \rho^2 \sin^2\varphi\right) \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi/4} \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} \rho^3 \left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} \int_0^{\pi/4} \cos 2\varphi \mathrm{d}\varphi = \frac{25 - 9}{4} \left[\frac{\sin 2\varphi \mathrm{d}\varphi}{2}\right]_0^{\pi/4} = 2$$

Př. 108 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{2-x^2-y^2}},$$

kde M je ohraničená $0 \le y \le \frac{x}{\sqrt{3}}$, $x^2+y^2 \le 1$.

Vyšetřovaná množina tvoří část kružnice, proto zavedeme polární souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Dosazením do omezení dostaneme

$$\begin{aligned} \rho^2 &\le 1 \\ 0 \le \sin\varphi &\le \frac{\cos\varphi}{\sqrt{3}} \\ 0 \le \operatorname{tg}\varphi &\le \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Proto je $\rho \in [0,1]$ a $\varphi \in [0,\pi/6]$. Počítáme

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi/6}\int_0^1 \frac{\rho}{\sqrt{2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \left| \begin{array}{c} t=\rho^2 \\ \mathrm{d}t = 2\rho\mathrm{d}\rho \end{array} \right| \\ &= \frac{\pi}{12}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-t}}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{12}\left[-2\sqrt{2-t}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{2}-1\right) \end{aligned}$$

Př. 109 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M \sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $\pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2$.

Vyšetřovaná množina tvoří mezikruží, proto zavedeme polární souřadnice $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Dosazením do omezení dostaneme $\pi \leq \rho \leq 2\pi$. Vzhledem k tomu, že další omezení nemáme, je $\varphi \in [0, 2\pi]$. Počítáme

$$\int_0^{2\pi}\int_\pi^{2\pi} \rho\sin\sqrt{\rho^2}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\int_\pi^{2\pi} \rho\sin\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \left| \begin{array}{cc} \rho & 1 \\ \sin\rho & -\cos\rho \end{array} \right| = 2\pi\left[-\rho\cos\rho\right]_\pi^{2\pi} + 2\pi\int_\pi^{2\pi}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi =$$
$$= 2\pi(-2\pi-\pi) + 2\pi\left[\sin\varphi\right]_\pi^{2\pi} = -6\pi^2$$

Př. 110 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}\le 1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $A>0, B>0$.

Vyšetřovaná množina je čtvrtinou elipsy, proto volíme eliptické souřadnice $x = A\rho\cos\varphi$, $y = B\rho\sin\varphi$. Dosazením do nerovnic máme

$$\begin{aligned}\frac{A^2\rho^2\cos^2\varphi}{A^2}+\frac{B^2\rho^2\sin^2\varphi}{B^2} =&\rho^2\le 1\\ A\rho\cos\varphi&\ge 0\\ B\rho\sin\varphi&\ge 0\end{aligned}$$

Vyšetřovaná množina se transformuje na $\rho\in[0,1]$ a $\varphi\in[0,\pi/2]$. Jakobián zobrazení je $|J| = AB\rho$. Počítáme

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^1 A^2B^2\rho^3\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = A^2B^2\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1\int_0^1 t\mathrm{d}t = \frac{A^2B^2}{4}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 =$$
$$= \frac{A^2B^2}{8}$$

Př. 111 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M \sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}-\frac{y^2}{B^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}\leq 1$*,* $A>0, B>0$.

Vyšetřovaná množina je elipsa, proto volíme eliptické souřadnice $x = A\rho\cos\varphi$, $y = B\rho\sin\varphi$. Dosazením do nerovnice máme $\rho^2 \leq 1$. Jakobián zobrazení je $|J| = AB\rho$. Počítáme

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 AB\rho\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \pi AB\int_0^1 \sqrt{1-t}\mathrm{d}t = \pi AB\left[-\frac{2\sqrt{1-t}}{3}\right]_0^1 = \frac{2AB}{3}\pi$$

Př. 112 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} \geq 1$, $\frac{x^2}{4A^2} + \frac{y^2}{4B^2} \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Vyšetřovaná množina je tvořena elipsovým mezikružím, proto volíme eliptické souřadnice $x = A\rho\cos\varphi$, $y = B\rho\sin\varphi$. Dosazením do nerovnic máme

$$\begin{aligned} 1 \leq & \rho^2 \leq 4 \\ A\rho\cos\varphi & \geq 0 \\ B\rho\sin\varphi & \geq 0 \end{aligned}$$

Z těchto podmínek vidíme, že $\rho \in [1, 2]$, $\varphi \in [0, \pi/2]$. Jakobián zobrazení je $|J| = AB\rho$.

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi/2} \int_1^2 A^2B^2\rho^3 \cos\varphi \sin\varphi \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi = A^2B^2 \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_1^2 \int_0^1 t\mathrm{d}t = \\ &= A^2B^2 \frac{16-1}{4} \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = A^2B^2 \frac{15}{8} \end{aligned}$$

Př. 113 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M 2x + y\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $x^2 + 4y^2 \leq 4$.

Upravíme podmínku do tvaru $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$, což je elipsa. Volíme eliptické souřadnice $x = 2\rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Dosazením do nerovnic máme $\rho^2 \leq 1$. Další podmínku nemáme, je tedy $\rho \in [0, 1]$ a $\varphi \in [0, 2\pi]$. Jakobián zobrazení je $|J| = AB\rho$. Počítáme

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_0^1 AB\rho\,(4\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi)\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \\
&= AB\int_0^{2\pi} 4\cos\varphi + \sin\varphi\mathrm{d}\varphi \int_0^1 \rho^2\mathrm{d}\rho = \\
&= AB\,[4\sin\varphi - \cos\varphi]_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 = \\
&= AB\,(0-0)\,\frac{1}{3} = 0
\end{aligned}$$

Př. 114 *Transformujte integrál*

$$\iint_M \sqrt{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad M: y^2 = x, y^2 = 2x, xy = 1, xy = 2$$

za pomoci transformace $u = xy$, $v = \frac{y^2}{x}$.

Transformujeme podmínky pomocí zadané transformace čímž dostaneme $v = 1$, $v = 2$, $u = 1$, $u = 2$. Po transformaci je množina M čtverec. Potřebujeme navíc vyjádřit jakobián jako

$$\det J^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix} = \frac{2y^2}{x} + \frac{y^2}{x} = \frac{3y^2}{x} = 3v$$

Neboť se jedná o jakobián inverzního zobrazení, dostaneme ze znalosti determinantů determinant jako $\frac{1}{3v}$ Pro dosazení do integrálu potřebujeme ještě vyjádřit x, y pomocí nových proměnných u, v. Vyjádříme $x = \frac{u}{y}$ a dosazením získáme $v = \frac{y^2}{u/y} = \frac{y^3}{u}$. Což vede na $y = \sqrt[3]{vu}$, $x = \frac{\sqrt[3]{u^2}}{\sqrt[3]{v}}$. Celkově tak získáme integrál

$$\int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{3v} \sqrt{\frac{\sqrt[3]{u^2}}{\sqrt[3]{v}} \cdot \sqrt[3]{vu}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{3v} \sqrt{u}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Př. 115 *Transformujte integrál*

$$\iint_M xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad M : xy = 1, x + y = 5/2$$

za pomoci transformace $u = xy$*,* $v = x$*.*

Transformujeme podmínky pomocí zadané transformace čímž dostaneme $u = 1$, $v + \frac{u}{v} = 5/2$. Křivka $v + \frac{u}{v} = 5/2$ vede na parabolu $u = \frac{5v}{2} - v^2 = \frac{25}{16} - \left(\frac{5}{4} - v\right)^2$. Chceme určit tvar transformované množiny M, musíme tedy nalézt průsečíky těchto dvou křivek. Dostáváme $\frac{9}{16} = \left(v - \frac{5}{4}\right)^2$ což nám dává dopočtem body $[1/2, 1]$ a $[2, 1]$. Proto vidíme, že $v \in [1/2, 1]$ a $u \in [1, \frac{5v}{2} - v^2]$. Jakobián dostaneme skrze

$$\det J^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -x = -v$$

Tudíž máme $|J| = 1/v$. také snadno vyjádříme $x = v$ a $y = u/v$. Dosadíme

$$\int_{1/2}^{2} \int_{1}^{\frac{5v}{2} - v^2} \frac{1}{v} \cdot \frac{u}{v} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_{1/2}^{2} \int_{1}^{\frac{5v}{2} - v^2} \frac{u}{v^2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Př. 116 *Transformujte integrál*

$$\iint_M x^2 - y + 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad M : xy = 1, xy = 4, y = 4x, y = x/4$$

za pomoci transformace $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$.

Transformujeme podmínky pomocí zadané transformace čímž dostaneme $u = 1$, $u = 2$, $v = 4$ a $v = 1/4$. Transformovaná množina je tedy nyní obdélník. Jakobián dostaneme skrze

$$\det J^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 2\frac{y}{x} = 2v$$

Snadno vyjádříme $x = u/y$, což dosazením vede na $y^2 = vu$ a proto máme celkově $x = \sqrt{u/v}$ a $y = \sqrt{uv}$. Transformujeme

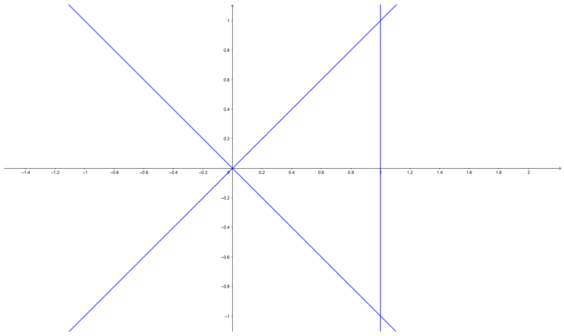
$$\int_1^2 \int_{1/4}^4 \frac{1}{2v} \left(\frac{u}{v} - uv \right) \mathrm{d}v\mathrm{d}u = \frac{1}{2} \int_1^2 \int_{1/4}^4 \frac{u}{v^2} - u\mathrm{d}v\mathrm{d}u$$

Př. 117 *Transformujte integrál*

$$\iint_M \mathrm{e}^{-\frac{x-y}{x+y}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad M : x = 0, y = 0, x + y = 1$$

za pomoci transformace $u = x + y$, $v = x - y$.

Vidíme, že integrovaná funkce je komplikovaná, zavedeme tedy zadanou transformaci, abychom tento výpočet zjednodušili i když se tím může integrovaná množina M zkomplikovat. Abychom transformovali omezení $x = 0$, $y = 0$, vyjádříme nejprve x, y pomocí proměnných u, v. Snadno dostaneme sečtením $x = \frac{u+v}{2}$ a odečtením $y = \frac{u-v}{2}$. Proto transformujeme omezení na $u+v = 0$, $u - v = 0$ a $u = 1$. Jedná se o tři přímky, které mají průsečíky v bodech $[0, 0]$, $[-1, 1]$ a $[1, 1]$. Vzhledem k vzájemné poloze nových přímek



dostaneme $u \in [0, 1]$, $v \in [-u, u]$. Dále musíme určit jakobián zobrazení. Máme

$$\det J^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

Tudíž je $|J| = 1/2$. Můžeme si také vypočíst

$$\det J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

A tedy vskutku jakobián sedí. Transformujeme

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \int_{-u}^{u} \mathrm{e}^{-\frac{v}{u}}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}u$$

Př. 118 *Určete jakobiány zobrazení $x = uv$, $y = u + v$.*

Počítáme

$$\det J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = v - u$$

Př. 119 *Určete jakobiány zobrazení $x = uv$, $y = u/v$.*

Počítáme

$$\det J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \end{vmatrix} = -2\frac{u}{v}$$

Př. 120 *Určete jakobiány zobrazení $x = uv$, $y = v^2/u$.*

Počítáme

$$\det J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ -\frac{v^2}{u^2} & \frac{2v}{u} \end{vmatrix} = 3\frac{v^2}{u}$$

Př. 121 *Určete jakobiány zobrazení $x = u + v$, $y = v/(u + v)$.*

Počítáme

$$\det J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{v}{(u+v)^2} & \frac{u}{(u+v)^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{(u+v)^2} + \frac{v}{(u+v)^2} = \frac{1}{u+v}$$

Př. 122 *Určete jakobiány zobrazení* $x = u/(u^2 + v^2)$, $y = v/(u^2 + v^2)$.

Počítáme

$$\det J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)^2} & -\frac{2uv}{(u^2+v^2)^2} \\ -\frac{2uv}{(u^2+v^2)^2} & \frac{u^2-v^2}{(u^2+v^2)^2} \end{vmatrix} = \frac{(v^2-u^2)(u^2-v^2)}{(u^2+v^2)^4} - \frac{4u^2v^2}{(u^2+v^2)^4} =$$

$$= \frac{-u^4+2u^2v^2-v^4}{(u^2+v^2)^4} - \frac{4u^2v^2}{(u^2+v^2)^4} = \frac{-u^4-2u^2v^2-v^4}{(u^2+v^2)^4} = -\frac{(u^2+v^2)^2}{(u^2+v^2)^4} = -\frac{1}{(u^2+v^2)^2}$$

Př. 123 *Určete jakobiány zobrazení $x = u/v$, $y = v/u$.*

Počítáme

$$\det J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{vmatrix} = \frac{1}{uv} - \frac{1}{uv} = 0$$

Př. 124 *Určete jakobiány zobrazení $x = u\cos A - v\sin A$, $y = u\sin A + v\cos A$, pro konstantu A.*

Počítáme

$$\det J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos A & -\sin A \\ \sin A & \cos A \end{vmatrix} = \cos^2 A + \sin^2 A = 1$$

4 Transformace trojného integrálu

Nechť $M \subset E^3$ je otevřená množina v prostoru u, v, w a g je prosté zobrazení M do prostoru x, y, z dané funkcemi $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$, které mají na M spojité parciální derivace prvního řádu. Nechť

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

splňuje $J(u, v, w) \neq 0$ je ohraničená na M. Nechť M a $g(M)$ jsou měřitelné a funkce f je spojitá a ohraničená na $g(M)$. Potom platí

$$\iiint_{g(M)} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_M f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \cdot |J(u, v, w)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

Příkladem transformace v E^3 je změna měřítka spojená s posunutím

$$\begin{aligned} x &= au + d, \\ y &= bv + e, \\ z &= cw + f, \end{aligned}$$

kde $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Jakobián tohoto zobrazení je

$$J(u, v, w) = abc$$

Transformace do válcových souřadnic je

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, \\ y &= \rho \sin \varphi, \\ z &= z, \end{aligned}$$

kde $\rho \in [0, \infty)$ je poloměr válce, tj. vzdálenost bodů válce od osy z. $\varphi \in [0, 2\pi]$ je odchylka bodu od kladné poloroviny xz v kladném smyslu, tj. odchylka od kladné poloosy x v kladném smyslu a v rovině rovnoběžné s půdorysnou xy. Jakobián tohoto zobrazení je

$$J(\rho, \varphi, z) = \rho$$

Transformace do sférických souřadnic je

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \sin \theta, \\ y &= \rho \sin \varphi \sin \theta, \\ z &= \rho \cos \theta, \end{aligned}$$

kde $\rho \in [0, \infty)$ je vzdálenost bodu od počátku, $\varphi \in [0, 2\pi]$ je odchylka bodu od osy x v kladném smyslu v projekci do půdorysny xy. Proměnná $\theta \in [0, \pi]$ je odchylka od kladné poloosy z. Jakobián tohoto zobrazení je

$$J(\rho, \varphi, \theta) = -\rho^2 \sin \theta$$

Transformace do zobecněných válcových souřadnic je

$$\begin{aligned} x &= a\rho \cos \varphi, \\ y &= b\rho \sin \varphi, \\ z &= z, \end{aligned}$$

kde $a > 0$, $b > 0$. Proměnná $\varphi \in [0, 2\pi]$ je stále odchylka bodu od kladné poloroviny xz v kladném smyslu a $\rho \in [0, \infty)$ je poloměr válce, tj. vzdálenost bodů válce od osy z v upravené metrice. Jakobián tohoto zobrazení je

$$J(\rho, \varphi, z) = ab\rho$$

Transformace do sférických souřadnic je

$$\begin{aligned} x &= a\rho \cos \varphi \sin \theta, \\ y &= b\rho \sin \varphi \sin \theta, \\ z &= c\rho \cos \theta, \end{aligned}$$

kde $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Stále platí, že $\varphi \in [0, 2\pi]$ je odchylka bodu od osy x v kladném smyslu v projekci do půdorysny xy a proměnná $\theta \in [0, \pi]$ je odchylka od kladné poloosy z. Proměnná $\rho \in [0, \infty)$ je vzdálenost bodu od počátku v upravené metrice. Jakobián tohoto zobrazení je

$$J(\rho, \varphi, \theta) = -abc\rho^2 \sin \theta$$

Transformace do hypersférických souřadnic v E^n je

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \cos \varphi \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2}, \\ x_2 &= \rho \sin \varphi \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2}, \\ x_3 &= \rho \cos \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2}, \\ x_4 &= \rho \cos \theta_2 \sin \theta_3 \dots \sin \theta_{n-2}, \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= \rho \sin \theta_{n-3} \sin \theta_{n-2}, \\ x_n &= \rho \sin \theta_{n-2}. \end{aligned}$$

Tentokrát je $\rho \in [0, \infty)$ je vzdálenost bodu od počátku, $\varphi \in [0, 2\pi]$ je odchylka bodu od osy x v kladném smyslu v projekci do půdorysny xy a $\theta_i \in [0, \pi]$ je úhel který svírá bod s kladnou poloosou x_{i+2}. Jakobián tohoto zobrazení je

$$J = (-1)^n \rho^{n-1} \sin \theta_1 \sin^2 \theta_2 \dots \sin^{n-2} \theta_{n-2}$$

Obdobně můžeme definovat transformaci do hyperválcových souřadnic v E^n jako

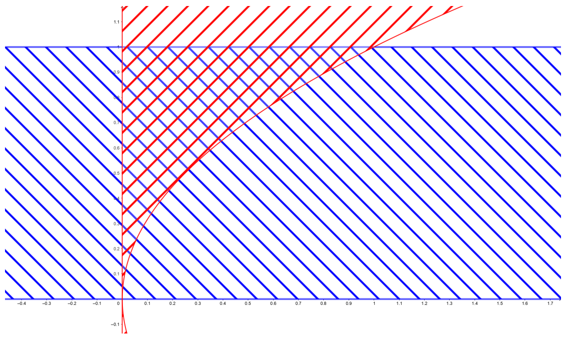
$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \cos \varphi, \\ x_2 &= \rho \sin \varphi, \\ x_3 &= x_3, \\ &\vdots \\ x_n &= x_n. \end{aligned}$$

Charakter proměnných odpovídá obvyklým válcovým souřadnicím. Jakobián zobrazení je opět

$$J = \rho.$$

Př. 125 *Převeďte trojný integrál* $\iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ *do válcových souřadnic, kde* V *je dána omezeními* $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = A$, $x = y^2$, $A > 0$.

Válcové souřadnice jsou dány transformací $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$. Jakobián je zde $|J| = \rho$. Z omezení dostaneme snadno tvar množiny V jako $0 \le x \le y^2$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le A$. Proměnná z zůstane nezměněna a vidíme, že nezávisí na proměnných x, y. Vidíme, že se jedná o část válce s různým dolním a horním omezením. V půdorysně je množina zobrazena jako



Převedeme nerovnosti pro x a y jako

$$\begin{aligned} 0 \le& \rho\sin\varphi \le 1 \\ 0 \le& \rho\cos\varphi \le \rho^2\sin^2\varphi \end{aligned}$$

Z první podmínky dostaneme $\rho \le \frac{1}{\sin\varphi}$, ale také $\sin\varphi \ge 0$, což vede na interval $\varphi \in [0, \pi]$. Ze druhé podmínky získáme

$$0 \le \rho\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi\sin\varphi} \le \rho$$

Neboť je $\sin\varphi \ge 0$ máme také požadavek aby $\operatorname{tg}\varphi > 0$ což je splněno na intervalu $(0, \pi/2]$. Další omezení vznikne v důsledku omezení $\rho\sin\varphi \le 1$ že

$$\rho\cos\varphi \le \rho^2\sin^2\varphi \le \rho\sin\varphi$$

a dostaneme po upravení $\operatorname{tg}\varphi \ge 1$. Transformovaný integrál je tedy

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_{\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi\sin\varphi}}^{\frac{1}{\sin\varphi}}\int_0^A \rho\mathrm{d}z\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi.$$

Př. 126 *Převeďte trojný integrál* $\iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ *do válcových souřadnic, kde* V *je dána omezeními* $x = \sqrt{y}$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 2$, $x^2 + y^2 = 2$.

Proměnná z nezávisí na proměnných x, y a naopak podmínky obsahující proměnné x, y nezávisí na proměnné z. Analýzou množiny V v půdorysně dostaneme $x \geq \sqrt{y}$, $y \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq 2$. Nalezneme průsečíky křivek v půdorysně xy, což jsou body $[0, 0]$, $[\sqrt{2}, 0]$, $[1, 1]$ **!!!!!!!!! pridat obrazek !!!!**. Dosazením polárních souřadnic $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ získáme

$$\begin{aligned}
\rho^2\cos^2\varphi &\geq \rho\sin\varphi \\
\rho^2 &\leq 2 \\
\rho\sin\varphi &\geq 0
\end{aligned}$$

Z první podmínky vyplyne $\rho \geq \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$. Ze třetí podmínky pak máme omezení $\varphi \in [0, \pi]$. Avšak z obrázku vidíme, že φ má největší úhel na přímce $y = x$, což odpovídá průsečíku $[1, 1]$. Tedy musíme zúžit interval na $\varphi \in [0, \pi/4]$. Transformujeme

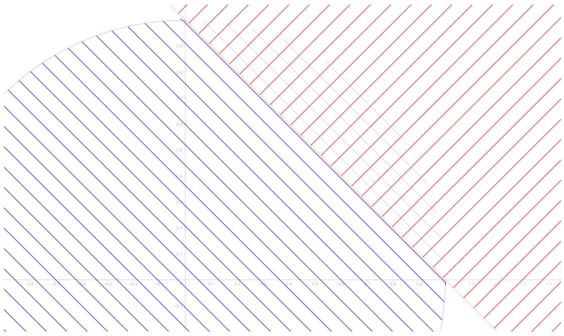
$$\int_0^{\pi/4} \int_{\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos\varphi}}^{\sqrt{2}} \int_0^2 \rho \,\mathrm{d}z\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi.$$

Př. 127 *Převeďte trojný integrál $\iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ do válcových souřadnic, kde V je dána omezeními $x^2+y^2 \leq A^2$, $y \geq A-x$, $z=0$, $z=A$, $A>0$.*

Proměnná z nezávisí na proměnných x,y a naopak podmínky obsahující proměnné x,y nezávisí na proměnné z. Dosazením polárních souřadnic $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ do omezení získáme

$$\begin{aligned} \rho^2 &\leq A^2 \\ \rho\sin\varphi &\geq A-\rho\cos\varphi \end{aligned}$$

Neboť se jedná o válec, můžeme vykreslit situaci v půdorysně xy



Vidíme skrze vyjádření z druhé nerovnosti, že

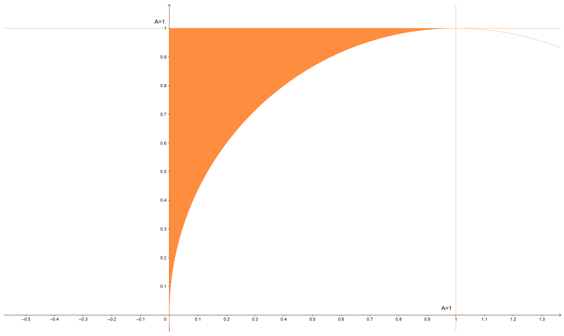
$$\rho \geq \frac{A}{\sin\varphi+\cos\varphi}$$

Navíc vidíme, že $\varphi \in [0,\pi/2]$. Transformujeme

$$\int_0^{\pi/2}\int_{\frac{A}{\sin\varphi+\cos\varphi}}^{A}\int_0^{A}\rho\mathrm{d}z\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi.$$

Př. 128 *Převeďte trojný integrál* $\iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ *do válcových souřadnic, kde* V *je dána omezeními* $x = 0$, $y = A$, $z = 0$, $z = 2A$, $(x - A)^2 + y^2 = A^2$, $A > 0$.

Proměnná z nezávisí na proměnných x, y a naopak podmínky obsahující proměnné x, y nezávisí na proměnné z. Analýzou množiny V v půdorysně xy určíme nerovnosti jako $x \geq 0$, $y \leq= A$, $(x - A)^2 + y^2 \geq A^2$. Vykreslením situace v půdorysně xy vidíme



že dolní hranice pro úhel φ je vymezena bodem $[A, A]$, který odpovídá průsečíku křivek $y = A$ a $(x - A)^2 + y^2 = A^2$. Tento bod leží na přímce $y = x$ a tedy dolní hranice je $\varphi \geq \pi/4$. Z obrázku vidíme, že $\varphi \in [\pi/4, \pi/2]$. Dosazením do nerovností dostaneme

$$\rho \sin\varphi \leq A$$
$$x^2 + y^2 = \rho^2 \geq 2Ax = 2A\rho\cos\varphi$$

Což vede na omezení $\rho \in [2A\cos\varphi, \frac{A}{\sin\varphi}]$. Transformujeme

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_{2A\cos\varphi}^{\frac{A}{\sin\varphi}} \int_0^{2A} \rho \mathrm{d}z\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi.$$

Př. 129 *vypočtěte integrál*

$$\iiint_V z\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána omezeními* $x^2+y^2 \le 9$*,* $y \ge 0$*,* $0 \le z \le 2$*.*

Proměnná z nezávisí na proměnných x, y a naopak podmínky obsahující proměnné x, y nezávisí na proměnné z. Navíc v půdorysně xy je množina tvořena polovinou kružnice. Zavedeme tedy válcové souřadnice. Dosazením $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ do nerovností dostaneme

$$\begin{aligned} \rho^2 &\le 9 \\ \rho\sin\varphi &\ge 0 \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že $\rho \in [0,3]$ a $\varphi \in [0,\pi]$. Jakobián transformace je $|J| = \rho$. Transformujeme integrál

$$\int_0^3 \int_0^\pi \int_0^2 \rho z\sqrt{\rho^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho = \pi\int_0^2 z\mathrm{d}z\int_0^3 \rho^2\mathrm{d}\rho = \pi\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^2\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^3 = 18\pi$$

Př. 130 *vypočtěte integrál*

$$\iiint_V z(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána omezeními* $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$, $0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}$.

Vzhledem k omezením si všimneme, že omezení $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ udává sféru. Také podmínka $y = \sqrt{1-x^2}$ v půdorysně udává kružnici. Využijeme tedy transformaci do sférických souřadnic $x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$. Jakobián této transformace je $J = -\rho^2\sin\theta$. Dosazením do nerovností dostaneme

$$\begin{aligned}
0 \le &\rho\cos\varphi\sin\theta \le 1\\
0 \le &\rho\sin\varphi\sin\theta \le \sqrt{1-\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\theta}\\
0 \le &\rho\cos\theta \le \sqrt{1-\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\theta-\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta}
\end{aligned}$$

Analýza těchto nerovností není příliš jednoduchá, pokud si však situaci vykreslíme, vidíme, že se jedná o čtvrtinu kružnice. Dostaneme tedy omezení $\rho \in [0,1]$, $\varphi \in [0,\pi/2]$, $\theta \in [0,\pi/2]$. Transformujeme

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\rho^3\sin\theta\cos\theta\left(\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\theta+\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho =\\
&=\int_0^1\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\rho^3\sin\theta\cos\theta\left(\rho^2\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho =\\
&=\int_0^1\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\rho^5\sin^3\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{2}\int_0^1\rho^5\mathrm{d}\rho\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta =\\
&=\frac{\pi}{2}\left[\frac{\rho^6}{6}\right]_0^1\int_0^1 t^3\mathrm{d}t = \frac{\pi}{12}\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{48}
\end{aligned}$$

Př. 131 *vypočtěte integrál*

$$\iiint_V \frac{xy}{(4+z)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána omezeními* $x^2+y^2 \le 4z \le 16$.

Vidíme, že pro pevné z je podmínka $x^2+y^2 \le 4z$ tvořena kružnicí. Zavedeme tedy cylindrické souřadnice a dosadíme do omezení, čímž získáme

$$\rho^2 \le 4z \le 16$$

Z těchto podmínek vidíme, že $\rho \in [0,4]$ a $z \in [\rho^2/4, 4]$. Další omezení nemáme, je tedy $\varphi \in [0, 2\pi]$. Jakobián této transformace je $|J| = \rho$. Transformujeme

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_0^4\int_{\rho^2/4}^4 \rho\frac{\rho^2\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\theta}{(4+\rho\cos\theta)^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \\
&= \int_0^{2\pi}\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^4\int_{\rho^2/4}^4 \frac{\rho^3\sin^2\theta}{16+2\rho\cos\theta+\rho^2\cos^2\theta}\mathrm{d}z\mathrm{d}\rho = \\
&= \left[\frac{\sin^2\sin\varphi}{2}\right]_0^{2\pi}\int_0^4\int_{\rho^2/4}^4 \frac{\rho^3\sin^2\theta}{16+2\rho\cos\theta+\rho^2\cos^2\theta}\mathrm{d}z\mathrm{d}\rho = \\
&= 0\cdot\int_0^4\int_{\rho^2/4}^4 \frac{\rho^3\sin^2\theta}{16+2\rho\cos\theta+\rho^2\cos^2\theta}\mathrm{d}z\mathrm{d}\rho = 0
\end{aligned}$$

Př. 132 *vypočtěte integrál*

$$\iiint_V xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána omezeními* $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0.$

Vidíme, že množina tvoří osminu koule v prvním oktantu o poloměru 1, a proto $\rho \in [0,1]$, $\varphi \in [0,\pi/2]$, $\theta \in [0,\pi/2]$. transformujeme

$$\int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \rho^5 \sin^3\theta \cos\theta \sin\varphi \cos\varphi \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\rho =$$
$$= \int_0^1 \rho^5 \mathrm{d}\rho \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cos\varphi \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta \cos\theta \mathrm{d}\theta =$$
$$= \left[\frac{\rho^6}{6}\right]_0^1 \int_0^1 t\mathrm{d}t \int_0^1 s^3 \mathrm{d}s = \frac{1}{6}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 \left[\frac{s^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{48}$$

Př. 133 *vypočtěte integrál*

$$\iiint_V x^2 + y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V je dána omezeními $x^2 + y^2 + z^2 \leq A^2$, $z \geq 0$, $A > 0$.

Množina V je polokoule o poloměru A. Zavedeme sférické souřadnice $x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$ a určíme $\rho \in [0, A]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [0, \pi/2]$. Jakobián této transformace je $|J| = \rho^2\sin\theta$. Transformujeme

$$\begin{aligned}
&\int_0^A \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \rho^2 \sin\theta \left(\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + \rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta\right) \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho = \\
&= \int_0^A \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \rho^4 \sin^3\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho = 2\pi \int_0^A \rho^4 \mathrm{d}\rho \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta \mathrm{d}\theta = \\
&= 2\pi \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^A \int_0^1 1 - t^2 \mathrm{d}t = 2\pi \frac{A^5}{5} \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{15} A^5 \pi
\end{aligned}$$

Př. 134 *vypočtěte integrál*

$$\iiint_V 3z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána omezeními* $x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2$.

Omezující podmínky jsou doplněny funkcemi $x^2 + y^2$, tyto dobře kooperují spolu s polárními souřadnicemi, zavedeme tedy transformaci do cylindrických souřadnic $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$. Dosazením do nerovnosti máme

$$\rho^2 \leq z \leq 1 - \rho^2$$

Musíme určit rozsah pro ρ. Již z definice vidíme, že $\rho \geq 0$. Horní ohraničení pak vyplývá z nerovnosti $\rho^2 \leq 1 - \rho^2$ dostaneme $\rho \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Neboť nemáme ohraničení pro φ, je $\varphi \in [0, 2\pi]$. Jakobián této transformace je $|J| = \rho$ Transformujeme

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_0^{2\pi} \int_{\rho^2}^{1-\rho^2} \rho 3z^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \rho \int_0^{2\pi} \left[z^3\right]_{\rho^2}^{1-\rho^2} \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho =$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \rho \int_0^{2\pi} (1-\rho^2)^3 - \rho^6 \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho = 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \rho \left(1 - 3\rho^2 + 3\rho^4 - \rho^6 - \rho^6\right) \mathrm{d}\rho =$$

$$= 2\pi \left[\frac{\rho^2}{2} - 3\frac{\rho^4}{4} + 3\frac{\rho^6}{6} - 2\frac{\rho^8}{8}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\pi \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{16} + \frac{3}{48} - \frac{1}{64}\right) = \frac{7}{32}\pi$$

Př. 135 *vypočtěte integrál*

$$\iiint_V 2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V je dána omezeními $0 \leq z \leq y$, $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$.

V půdorysně je množina tvořena polovinou kružnice. Další omezení omezují rozsah z, vidíme tedy, že se jedná o seříznutý válec. Zavedeme válcové souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$. Jakobián této transformace je $|J| = \rho$. Dosazením do nerovnic získáme

$$\begin{aligned} \rho^2 &\leq 1 \\ \rho\cos\varphi &\geq 0 \\ 0 \leq &z \leq \rho\sin\varphi \end{aligned}$$

Máme tedy $\rho \in [0, 1]$ a $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$. Transformujeme

$$\begin{aligned} &2\int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\rho\sin\varphi} \rho z \mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho = 2\int_0^1 \rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\rho\sin\varphi} \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho = \\ &= 2\int_0^1 \rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\rho^2\sin^2\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho = \int_0^1 \rho^3\mathrm{d}\rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi = \\ &= \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1-\cos 2\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4}\left[\frac{2\varphi - \sin 2\varphi}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

Př. 136 *vypočtěte integrál*

$$\iiint_V 1+2x-y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána omezeními* $x^2+y^2\leq 2z\leq 4$.

Omezující podmínky jsou doplněny funkcí x^2+y^2, tato dobře kooperuje spolu s polárními souřadnicemi, zavedeme tedy transformaci do cylindrických souřadnic $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $z=z$. Jakobián této transformace je $|J|=\rho$. Dosazením do nerovnosti máme

$$\rho^2\leq 2z\leq 4$$

Z tohoto důvodu je $\rho\in[0,2]$ a $z\in[\rho^2/2,2]$. Neboť další podmínky nemáme, je $\varphi\in[0,2\pi]$. Vidíme, že se jedná o seříznutý válec. transformujeme

$$\begin{aligned}
&\int_0^2\int_0^{2\pi}\int_{\rho^2/2}^2 \rho\,(1+2\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho=\\
&=\int_0^2\int_0^{2\pi}\left(\rho+2\rho^2\cos\varphi-\rho^2\sin\varphi\right)[z]_{\rho^2/2}^2\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho=\\
&=\int_0^2\int_0^{2\pi}2\rho+4\rho^2\cos\varphi-2\rho^2\sin\varphi-\frac{\rho^3}{2}-\rho^4\cos\varphi+\frac{\rho^4}{2}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho=\\
&=\int_0^2\left[2\rho\varphi+4\rho^2\sin\varphi+2\rho^2\cos\varphi-\frac{\rho^3}{2}\varphi-\rho^4\sin\varphi-\frac{\rho^4}{2}\cos\varphi\right]_0^{2\pi}\mathrm{d}\rho=\\
&=\int_0^2 4\pi\rho-\pi\rho^3\mathrm{d}\rho=\left[2\pi\rho^2-\pi\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2\mathrm{d}\rho=8\pi-4\pi=4\pi
\end{aligned}$$

Př. 137 *vypočtěte integrál*

$$\iiint_V z\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána omezeními* $0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \sqrt{2x-x^2},\ 0 \le z \le A,\ A > 0.$

Vidíme, že proměnná z neovlivňuje podmínky vzhledem k proměnným x, y a naopak. Upravíme podmínku

$$\begin{aligned} y &\le \sqrt{2x-x^2} = \sqrt{1-1+2x-x^2} \\ y^2 &\le 1-(x-1)^2 \\ (x-1)^2+y^2 &\le 1 \end{aligned}$$

Vidíme, že se jedná o posunutou kružnici a tudíž zavedeme cylindrické souřadnice $x = \rho\cos\varphi + 1$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$. Jakobián této transformace je stále $|J| = \rho$. Z nerovnic máme $\rho\sin\varphi \ge 0$, a proto $\varphi \in [0, \pi]$. Z nerovnice $(x-1)^2+y^2 \le 1$ dostaneme $\rho \in [0, 1]$. Již ze zadání pak máme $z \in [0, A]$. Transformujeme

$$\begin{aligned} &\int_0^A \int_0^1 \int_0^\pi \rho z\sqrt{(1+\rho\cos\varphi)^2+\rho^2\sin^2\varphi}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z = \\ &\int_0^A z\mathrm{d}z \int_0^1 \int_0^\pi \rho\sqrt{1+2\rho\cos\varphi+\rho^2}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho \end{aligned}$$

Výpočet tohoto integrálu není jednoduchý, vyzkoušíme tedy obvyklé polární souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Dosazením do nerovnosti $y \ge 0$ a $0 \le y^2 \le 2x - x^2$ dostaneme $0 \le x^2 \le x^2 + y^2 \le 2x$. Máme tedy $\rho \in [0, 2\cos\varphi]$, $\varphi \in [0, \pi/2]$. Dosadíme

$$\begin{aligned} &\int_0^A \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\varphi} \rho z\sqrt{\rho^2}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^A z\mathrm{d}z \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\varphi} \rho^2\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \\ &= \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^A \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{2\cos\varphi} \mathrm{d}\varphi = \frac{A^2}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{8\cos^3\varphi}{3}\mathrm{d}\varphi = \\ &= \frac{4A^2}{3}\int_0^1 1-t^2\mathrm{d}t = \frac{4A^2}{3}\left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{8A^2}{9} \end{aligned}$$

Př. 138 *vypočtěte integrál*

$$\iiint_V x^2 + y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V je dána omezeními $x^2 + y^2 \leq 2z$, $z \leq 2$.

Omezující podmínky jsou doplněny funkcí $x^2 + y^2$, tato dobře kooperuje spolu s polárními souřadnicemi, zavedeme tedy transformaci do cylindrických souřadnic $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$. Jakobián této transformace je $|J| = \rho$. Dosazením do nerovnosti dostaneme $\rho^2 \leq 2z \leq 4$ a proto je $\rho \in [0, 2]$, $z \in [\rho^2/2, 2]$. Další podmínky nemáme, proto je $\varphi \in [0, 2\pi]$. Vidíme, že se jedná o seříznutý válec. Transformujeme

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{\rho^2/2}^2 \rho^3 \mathrm{d}z\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \rho^3\left(2 - \frac{\rho^2}{2}\right)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 2\pi\int_0^2 2\rho^3 - \frac{\rho^5}{2}\mathrm{d}\rho = 2\pi\left[\frac{2\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{12}\right]_0^2 = 2\pi\left(8 - \frac{64}{12}\right) = \frac{16}{3}\pi$$

Př. 139 *vypočtěte integrál*

$$\iiint_V \frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V je dána omezeními $(x-1)^2+y^2 \geq 1$, $y \leq 3-x$, $x > 0$, $y \leq x$, $y \geq 0$, $0 \leq z \leq 2$.

Vidíme, že integrovaná funkce obsahuje výraz x^2+y^2. Podobně je ohraničení tvořeno po úpravě na čtverec posunutou kružnicí jako $x^2+(y-1)^2 \leq 1$. Rozhodujeme se mezi obvyklými válcovými souřadnicemi a posunutými válcovými souřadnicemi. Vzhledem k obtížnému výpočtu integrovaných funkcí zavedeme nejprve $x = \rho\cos\varphi$ a $y = \rho\sin\varphi$. Dosadíme postupně do nerovností čímž dostáváme

$$\begin{aligned}
x^2+y^2 = \rho^2 &\geq 2x = 2\rho\cos\varphi \\
\rho\sin\varphi &\leq 3-\rho\cos\varphi \\
\rho\sin\varphi &\leq \rho\cos\varphi \\
\rho\sin\varphi &\geq 0 \\
\rho\cos\varphi &> 0
\end{aligned}$$

Z první nerovnosti získáme $\rho \geq 2\cos\varphi$, ze druhé nerovnosti máme $\rho \leq \frac{3}{\sin\varphi+\cos\varphi}$. Třetí nerovnost nás vede na omezení $\sin\varphi \leq \cos\varphi$, což nám dává $[0,\pi/4]\cup[5\pi/4,2\pi]$. 4tvrtá nerovnost $\sin\varphi > 0$ nás vede na $\varphi \in (0,\pi]$. Společně pak třetí a čtvrtá podmínka dávají $\varphi \in (0,\pi/4]$. Poslední nerovnost nám nic nového nepřináší. Jakobián transformace je $|J| = \rho$. Transformujeme

$$\begin{aligned}
&\int_0^2 \int_0^{\pi/4} \int_{2\cos\varphi}^{\frac{3}{\sin\varphi+\cos\varphi}} \rho\frac{\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi}{\rho^2}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \\
&= \int_0^2 \int_0^{\pi/4} \int_{2\cos\varphi}^{\frac{3}{\sin\varphi+\cos\varphi}} \cos\varphi+\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \\
&= \int_0^2 \int_0^{\pi/4} (\cos\varphi+\sin\varphi)\left(\frac{3}{\sin\varphi+\cos\varphi}-2\cos\varphi\right)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \\
&= \int_0^2 \int_0^{\pi/4} 3-2\cos^2\varphi-2\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \\
&= \int_0^2 [3\varphi]_0^{\pi/4} - 2\int_0^{\pi/4} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi - 2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t\mathrm{d}t\mathrm{d}z = \\
&= \int_0^2 \frac{3\pi}{4} - 2\left[\frac{2\varphi+\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{\pi/4} - 2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}z = \\
&= \int_0^2 \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi+2}{4} - \frac{1}{2}\mathrm{d}z = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi+2}{2} - 1 = \pi - 2
\end{aligned}$$

Př. 140 *vypočtěte integrál*

$$\iiint_V 8y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V je dána omezeními $-1+2\sqrt{x^2+z^2} \leq y \leq \sqrt{x^2+z^2}$.

Vzhledem k výskytu funkce x^2+z^2 v ohraničující podmínce, zavedeme upravené cylindrické souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y = y$ a $z = \rho\sin\varphi$. Dosazením získáme

$$-1+2\rho = -1+2\sqrt{\rho^2} \leq y \leq \sqrt{\rho^2} = \rho$$

Z podmínky $-1+2\rho \leq \rho$ získáme $\rho \leq 1$. Úhel není nijak ohraničen, dostaneme tedy $\varphi \in [0, 2\pi]$. Jakobián transformace je stále $|J| = \rho$, neboť záměna proměnných y a z v transformaci jej neovlivní. Transformujeme

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-1+2\rho}^{\rho} 8\rho y\mathrm{d}y\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho = 16\pi \int_0^1 \rho \left[\frac{y^2}{2}\right]_{-1+2\rho}^{\rho} \mathrm{d}\rho = \\
&= 8\pi \int_0^1 \rho\left(\rho^2 - (2\rho-1)^2\right)\mathrm{d}\rho = 8\pi \int_0^1 \rho\left(\rho^2 - (2\rho-1)^2\right)\mathrm{d}\rho = \\
&= 8\pi \int_0^1 -3\rho^2 + 4\rho - 1\mathrm{d}\rho = 8\pi\left[-\rho^3 + 2\rho^2 - \rho\right]_0^1 = 0
\end{aligned}$$

Př. 141 *vypočtěte integrál*

$$\iiint_V 8y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V je dána omezeními $-1+2\sqrt{x^2+z^2} \leq y \leq \sqrt{x^2+z^2}$, $y \geq 0$.

Vzhledem k výskytu funkce x^2+z^2 v ohraničující podmínce, zavedeme upravené cylindrické souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y = y$ a $z = \rho\sin\varphi$. Dosazením získáme

$$-1+2\rho = -1+2\sqrt{\rho^2} \leq y \leq \sqrt{\rho^2} = \rho$$

Z podmínky $-1+2\rho \leq \rho$ získáme $\rho \leq 1$. Další podmínkou je $y \geq 0$. Musíme určit, za jakých podmínek je $-1+2\sqrt{x^2+z^2} < 0$. Toto je splněno na kružnici $x^2+z^2 \leq 1/4$. rozdělíme integrál na dva případy 1)$\rho \in [0,1/2]$, kde je $y \in [0,\rho]$. Ve druhém případě pak $\rho \in [1/2,1]$ a $y \in [-1+2\rho,\rho]$. Úhel není nijak ohraničen, dostaneme tedy $\varphi \in [0,2\pi]$. Jakobián transformace je stále $|J| = \rho$, neboť záměna proměnných y a z v transformaci jej neovlivní. Transformujeme

$$\begin{aligned}
&\int_0^{1/2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\rho} 8\rho y\mathrm{d}y\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho + \int_{1/2}^{1}\int_0^{2\pi}\int_{-1+2\rho}^{\rho} 8\rho y\mathrm{d}y\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho = \\
&= 16\pi\int_0^{1/2}\rho\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\rho}\mathrm{d}\rho + 16\pi\int_{1/2}^{1}\rho\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-1+2\rho}^{\rho}\mathrm{d}\rho = \\
&= 8\pi\int_0^{1/2}\rho^3\mathrm{d}\rho + 8\pi\int_{1/2}^{1}\rho\left(\rho^2-(2\rho-1)^2\right)\mathrm{d}\rho = \\
&= 8\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{1/2} + 8\pi\int_{1/2}^{1}\rho\left(\rho^2-4\rho^2+4\rho-1\right)\mathrm{d}\rho = \\
&= \frac{\pi}{8} + 8\pi\int_{1/2}^{1} -3\rho^3+4\rho^2-\rho\mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{8} + 8\pi\left[-\frac{3\rho^4}{4}+\frac{4\rho^3}{3}-\frac{\rho^2}{2}\right]_{1/2}^{1} = \\
&= \frac{\pi}{8} + \left(-\frac{3}{4}+\frac{4}{3}-\frac{1}{2}+\frac{3}{64}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\right)8\pi = \frac{\pi}{8}+\frac{17}{24}\pi = \frac{5}{6}\pi
\end{aligned}$$

Př. 142 *vypočtěte integrál*

$$\iiint_V 24x \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z,$$

kde V *je dána omezeními* $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2x$, $x \leq y^2 + z^2$.

Podmínku $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2x$ upravíme na čtverec, abychom dostali $(x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Jedná se tedy o posunutou sféru. Zavedeme tedy posunuté sférické souřadnice $x - 1 = \rho \cos\varphi \sin\theta$, $y = \rho \sin\varphi \sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$. Jakobián takto zůstane stále stejný $|J| = \rho^2 \sin\theta$. Dosadíme omezení abychom dostali

$$\begin{aligned}\rho^2 \cos^2\varphi \sin^2\theta + \rho^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta + \rho^2\cos^2\theta =& \rho^2 \leq 1\\ \rho\cos\varphi\sin\theta + 1 \leq \rho^2 \sin^2\varphi\sin^2\theta +& \rho^2\cos^2\theta\end{aligned}$$

Vidíme, že třetí podmínku nelze jednoduše upravit. Avšak pokud pozměníme transformaci do sférických souřadnic zaměněním proměnných x, z jako $z = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $x - 1 = \rho\cos\theta$, dostaneme podmínky opět

$$\begin{aligned}\rho^2 &\leq 1\\ \rho\cos\theta + 1 \leq \rho^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta + \rho^2\cos^2\varphi\sin^2\theta &= \rho^2\sin^2\theta\end{aligned}$$

Ze druhé podmínky $\rho\cos\theta + 1 \leq \rho^2\sin^2\theta$ vidíme, že ani tato transformace není příliš průhledná. Zkusíme tedy neposunutou transformaci $z = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $x = \rho\cos\theta$, což nám dává podmínky

$$\begin{aligned}\rho^2 &\leq 2\rho\cos\theta\\ \rho\cos\theta &\leq \rho^2\sin^2\theta\end{aligned}$$

Tyto ohraničení nám udávají podmínky $\rho \in [\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}, 2\cos\theta]$ a z podmínky $\rho\cos\theta \geq 0$ vidíme, že $\theta \in [0, \pi/2]$. Z podmínek také dostaneme

$$\begin{aligned}\rho^2 \leq& 2\rho\cos\theta \leq 2\rho^2\sin^2\theta\\ \frac{1}{2} \leq& \sin^2\theta\\ \frac{\sqrt{2}}{2} \leq& \sin\theta\end{aligned}$$

A proto omezíme θ ještě více na interval $\theta \in [\pi/4, \pi/2]$ Jakobián transformace je stále $|J| = \rho^2\sin\theta$. Dostáváme

$$24\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}}^{2\cos\theta}\rho^3\sin\theta\cos\theta \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta = 48\pi\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_{\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}}^{2\cos\theta}\mathrm{d}\theta =$$

$$= 12\pi\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\left(16\cos^4\theta - \frac{\cos^4\theta}{\sin^8\theta}\right)\mathrm{d}\theta =$$

$$= 12\pi\int_{\pi/4}^{\pi/2}16\sin\theta\cos^5\theta - \frac{\cos^5\theta}{\sin^7\theta}\mathrm{d}\theta =$$

$$= 12\pi\left[16 - \frac{\cos^6\theta}{6}\right]_{\pi/4}^{\pi/2} - 12\pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\frac{(1-t^2)^2}{t^7}\mathrm{d}t =$$

$$= 12\pi\left(16\frac{\pi}{4} - \frac{1}{48}\right) - 12\pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\frac{1}{t^7} - \frac{2}{t^5} + \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t =$$

$$= \pi\left(4\pi - \frac{1}{4}\right) - 12\pi\left[\frac{t^{-6}}{-6} - 2\frac{t^{-4}}{-4} + \frac{t^{-2}}{-2}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} =$$

$$= \pi\left(4\pi - \frac{1}{4}\right) - 12\pi\left[\frac{t^{-6}}{-6} - 2\frac{t^{-4}}{-4} + \frac{t^{-2}}{-2}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} =$$

$$= \pi\left(4\pi - \frac{1}{4}\right) - 12\pi\left(\frac{1}{-6} - 2\frac{1}{-4} + \frac{1}{-2} - \frac{8}{-6} + 2\frac{4}{-4} - \frac{2}{-2}\right) =$$

$$= 4\pi^2 - \frac{\pi}{4} - 12\pi\left(\frac{1}{6}\right) = 4\pi^2 - \frac{\pi}{4} - 2\pi$$

Př. 143 *vypočtěte integrál*

$$\iiint_V 60xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána omezeními* $\frac{x^2+z^2}{A} \leq y \leq \sqrt{x^2+z^2}$, $x \geq 0$, $z \leq 0$, $A > 0$.

Vzhledem k výskytu funkce $x^2 + z^2$ v ohraničující podmínce, zavedeme upravené cylindrické souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y = y$ a $z = \rho\sin\varphi$. Jakobián transformace je stále $|J| = \rho$. Dosazením získáme

$$\begin{aligned}\frac{\rho^2}{A} \leq & y \leq \rho \\ \rho\cos\varphi & \geq 0 \\ \rho\sin\varphi & \leq 0\end{aligned}$$

Z První nerovnosti vyplyne, že $\rho^2 \leq A\rho$ a tedy $0 \leq \rho \leq A$. Ostatní nerovnosti vedou k omezení $\varphi \in [3\pi/2, 2\pi]$. Transformujeme

$$\begin{aligned}&\int_0^A \int_{3\pi/2}^{2\pi} \int_{\frac{\rho^2}{A}}^{\rho} 60\rho^3 \cos\varphi\sin\varphi \mathrm{d}y\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho = \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi \int_0^A 60\rho^3\,[y]_{\frac{\rho^2}{A}}^{\rho}\,\mathrm{d}\rho = \\ &= 60\int_{-1}^{0} t\mathrm{d}t \int_0^A \rho^3\left(\rho - \frac{\rho^2}{A}\right)\mathrm{d}\rho = 60\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{0} \int_0^A \rho^4 - \frac{\rho^5}{A}\mathrm{d}\rho = \\ &= -30\left[\frac{\rho^5}{5} - \frac{\rho^6}{6A}\right]_0^A = -6A^5 + 5A^5 = -A^5\end{aligned}$$

Př. 144 *vypočtěte integrál*

$$\iiint_V x^2 y \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána omezeními* $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, $0 \leq z \leq 3 - y$.

Hned vidíme, že se jedná o seříznutý válec. Zavedeme tedy válcové souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ a $z = z$. Dosazením do nerovností máme hned $1 \leq \rho^2 \leq 4$ a $0 \leq z \leq 3 - \rho\sin\varphi$, neboť další omezení nemáme, je $\varphi \in [0, 2\pi]$. Transformujeme

$$\int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{3-\rho\sin\varphi} \rho^4 \cos^2\varphi \sin\varphi \mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho = \int_1^2 \int_0^{2\pi} \rho^4 \cos^2\varphi \sin\varphi (3 - \rho\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho =$$
$$= \int_1^2 \int_0^{2\pi} 3\rho^4 \cos^2\varphi \sin\varphi - \rho^5 \cos^2\varphi \sin^2\varphi \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho =$$
$$= \int_1^2 \left[-\rho^4 \cos^3\varphi\right]_0^{2\pi} - \frac{\rho^5}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho = -\frac{1}{4} \int_1^2 \rho^5 \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4\varphi}{2} \mathrm{d}\varphi =$$
$$= -\frac{1}{4} \left[\frac{rho^6}{6}\right]_1^2 \left[\frac{4\varphi - \sin 4\varphi}{8}\right]_0^{2\pi} = -\frac{64-1}{24}\pi = -\frac{21}{8}\pi$$

Př. 145 *vypočtěte integrál*

$$\iiint_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V je dána omezeními $\frac{B^2}{A^2} \leq \frac{x^2+y^2}{A^2} \leq z \leq 1$, $A > B > 0$.

Vzhledem ke tvaru množiny V zavedeme válcové souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ a $z = z$. Z podmínek dostaneme dosazením $\frac{B^2}{A^2} \leq \frac{\rho^2}{A^2} \leq z \leq 1$. Vidíme, že platí $B^2 \leq \rho^2 \leq A^2$. Neboť nemáme omezení pro velikost úhlu, je $\varphi \in [0, 2\pi]$. Transformujeme

$$\int_B^A \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\rho^2}{A^2}}^1 \rho \frac{1}{\sqrt{\rho^2}} \mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho = 2\pi \int_B^A 1 - \frac{\rho^2}{A^2} \mathrm{d}\rho = 2\pi \left[\rho - \frac{\rho^3}{3A^2}\right]_B^A =$$
$$= 2\pi \left(A - B - \frac{A^3}{3A^2} + \frac{B^3}{3A^2}\right)$$

Př. 146 *vypočtěte integrál*

$$\iiint_V x^2 + y^2 + z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána omezeními* $x^2 + y^2 \leq A^2$, $z \geq 0$, $z \leq B$, $A > 0$, $B > 0$.

Vzhledem ke tvaru množiny V zavedeme válcové souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ a $z = z$. Z podmínek dostaneme dosazením $\rho^2 \leq A^2$. Transformujeme

$$\int_0^A \int_0^{2\pi} \int_0^B \rho(\rho^2 + z^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho = 2\pi \int_0^A B\rho^3 + \left[\rho\frac{z^3}{3}\right]_0^B \mathrm{d}\rho =$$

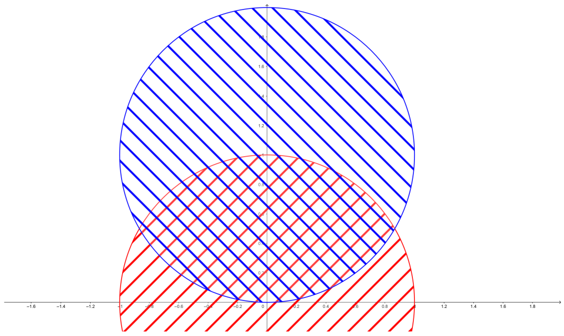
$$= 2\pi \int_0^A B\rho^3 + \frac{B^3}{3}\rho\mathrm{d}\rho = 2\pi\left(\left[B\frac{\rho^4}{4} + \frac{B^3\rho^2}{6}\right]_0^A +\right) = 2\pi\left(B\frac{A^4}{4} + \frac{A^2B^3}{6}\right)$$

Př. 147 *vypočtěte integrál*

$$\iiint_V x^2 + y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána omezeními* $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1$.

Množina V je tvořena průnikem dvou sfér, kde jedna má střed posunut mimo počátek. Zavedeme sférické souřadnice $x = \rho \cos\varphi \sin\theta$, $y = \rho \sin\varphi \sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$. Vzhledem k symetričnosti okolo osy z máme $\varphi \in [0, 2\pi]$ a celou situaci můžeme analyzovat pouze v nárysně xz. Vidíme dvě protínající se kružnice se stejným poloměrem



Uvažovaná situace rozpadne na dva případy. Musíme nejprve nalézt průsečík kružnic $x^2+z^2 = 1$ a $x^2+(z-1)^2 = 1$. Máme tak bod $[\sqrt{3}/2, 1/2]$ a musíme určit velikost úhlu přímky $z = \frac{x}{\sqrt{3}}$, která prochází nalezeným bodem a počátkem. Ze znalostí derivací víme, že tento úhel je $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, tj. $\alpha = \pi/6$. Neboť tento úhel svírá přímka s osou x, dopočteme úhel s osou y jako $\pi/2 - \alpha = \pi/3$. Proto z obrázku vidíme, že pro $\theta \in [0, \pi/3]$ je $\rho \in [0, 1]$. Pro $\theta \in [\pi/3, \pi/2]$ pak platí omezení

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \leq 2z = 2\rho\cos\theta$$

Transformujeme tedy integrál jako

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^1 \rho^4 \sin^3\theta \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi + \int_0^{2\pi} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} \rho^4 \sin^3\theta \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/3} \sin^3\theta \mathrm{d}\theta \int_0^1 \rho^4 \mathrm{d}\rho + 2\pi \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin^3\theta \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^{2\cos\theta} \mathrm{d}\theta =$$

$$= 2\pi \int_{1/2}^1 1 - t^2 \mathrm{d}t \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^1 + \frac{64\pi}{5} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin^3\theta \cos^5\theta \mathrm{d}\theta =$$

$$= \frac{2\pi}{5}\left[t - \frac{t^3}{3}\right]_{1/2}^1 + \frac{64\pi}{5} \int_{\sqrt{3}/2}^1 t^3(1-t^2)^2 \mathrm{d}t = \frac{2\pi}{5}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{24}\right) + \frac{64\pi}{5} \int_{\sqrt{3}/2}^1 t^3 - 2t^5 + t^7 \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{2\pi}{5} \cdot \frac{5}{24} + \frac{64\pi}{5} \left[\frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{3} + \frac{t^8}{8}\right]_{\sqrt{3}/2}^1 = \frac{\pi}{12} + \frac{64\pi}{5}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} - \frac{9}{64} + \frac{9}{64} - \frac{81}{2^{11}}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{5}\left(\frac{2^3}{3} - \frac{3^4}{2^5}\right) = \frac{\pi}{12} + \frac{2^8 - 3^5}{96 \cdot 5}\pi = \frac{\pi}{12} + \frac{13}{96 \cdot 5}\pi = \frac{53}{480}\pi$$

Př. 148 *Transformujte integrál* $\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ *pomocí sférických souřadnic, kde* V *je dána podmínkami* $x^2+y^2+z^2 \le A^2$*,* $x \ge 0$*,* $y \ge 0$*,* $z \ge 0$*.*

Vidíme hned, že se jedná o sféru s poloměrem A v prvním oktantu. Proto je dosazením do první podmínky $\rho \in [0,A]$ a vykreslením vidíme, že $\varphi \in [0,\pi/2]$, $\theta \in [0,\pi/2]$. Transformujeme

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^A \rho^2 \sin\theta f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho.$$

Př. 149 *Transformujte integrál* $\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ *pomocí sférických souřadnic, kde* V *je dána podmínkami* $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^+z^2 \leq 1$.

Zavedeme sférické souřadnice $x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$. Dosazením do podmínek získáme

$$\begin{aligned}\rho\cos\theta &\geq \sqrt{\rho^2\sin^2\theta} = \rho\sin\theta \\ \rho^2 &\leq 1\end{aligned}$$

Z první podmínky vidíme, že $\theta \in [0,\pi/4]$ a ze druhé podmínky, že $\rho \in [0,1]$. Další podmínku nemáme, a proto $\varphi \in [0,2\pi]$. Transformujeme

$$\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^2\sin\theta f(\rho\cos\varphi\sin\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\theta)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta.$$

Př. 150 *Transformujte integrál* $\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ *pomocí sférických souřadnic, kde* V *je dána podmínkami* $(x^2+y^2+z^2)^3 \le A^2 z^4$, $A>0$.

Zavedeme sférické souřadnice $x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$ a dosazením do podmínek získáme

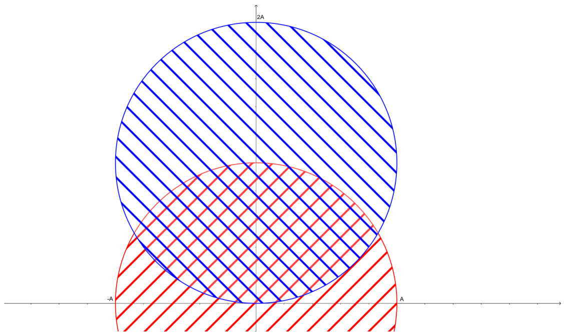
$$\begin{aligned} \rho^6 &\le A^2\rho^4\cos^4\theta \\ \rho^2 &\le A^2\cos^4\theta \\ \rho &\le A\cos^2\theta \end{aligned}$$

Vyplývající podmínka $\cos^2\theta \ge 0$ je splněna triviálně, máme tedy

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{A\cos^2\theta} \rho^2\sin\theta f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta.$$

Př. 151 *Transformujte integrál* $\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ *pomocí sférických souřadnic, kde* V *je dána podmínkami* $x^2+y^2+z^2 \le A^2$, $x^2+y^2+(z-A)^2 \le A^2$, $A>0$.

Zavedeme sférické souřadnice $x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$. Vzhledem k symetričnosti okolo osy z máme $\varphi \in [0,2\pi]$ a celou situaci můžeme analyzovat pouze v nárysně xz.



Vykreslením situace vidíme, že se uvažovaná situace rozpadne na dva případy. Musíme nejprve nalézt průsečík kružnic $x^2+z^2 = A^2$ a $x^2+(z-A)^2 = A^2$. Máme tak bod $[\sqrt{3}A/2, A/2]$ a musíme určit velikost úhlu přímky $z = \frac{x}{\sqrt{3}}$, která prochází nalezeným bodem a počátkem. Ze znalostí derivací víme, že tento úhel je $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, tj. $\alpha = \pi/6$. Neboť tento úhel svírá přímka s osou x, dopočteme úhel s osou y jako $\pi/2-\alpha = \pi/3$. Proto z obrázku vidíme, že pro $\theta \in [0,\pi/3]$ je $\rho \in [0,A]$. Pro $\theta \in [\pi/3,\pi/2]$ pak platí omezení

$$x^2+y^2+z^2 = \rho^2 \le 2Az = 2A\rho\cos\theta$$

Transformujeme tedy integrál jako

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^{A} \rho^2\sin\theta f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi +$$
$$+\int_0^{2\pi}\int_{\pi/3}^{\pi/2}\int_0^{2A\cos\theta} \rho^2\sin\theta f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

Př. 152 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána omezeními* $0 \le x \le A$, $0 \le y \le \sqrt{A^2-x^2}$, $0 \le z \le \sqrt{A^2-x^2-y^2}$.

Z omezení vidíme, že je množina V tvořena osminou sféry o poloměru A. Zavedeme sférické souřadnice $x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$. Z podmínky $z \ge 0$ vidíme, že $\theta \in [0, \pi/2]$. Z podmínky $y \ge 0$ pak vidíme, že $\varphi \in [0, \pi/2]$. Transformujeme tedy integrál jako

$$\begin{aligned}
&\int_0^A \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \rho^2 \sin\theta \sqrt{\rho^2}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho = \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^A \rho^3 \mathrm{d}\rho \int_0^{\pi/2} \sin\theta\mathrm{d}\theta = \\
&= \frac{\pi}{2}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^A [-\cos\theta]_0^{\pi/2} = \frac{A^4}{8}\pi
\end{aligned}$$

Př. 153 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V x^2 + y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána omezeními* $x^2 + y^2 + z^2 \geq A^2$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq B^2$, $z \leq 0$.

Vidíme, že množina je tvořena mezisféřím. Zavedeme tedy sférické souřadnice $x = \rho \cos\varphi \sin\theta$, $y = \rho \sin\varphi \sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$. Neboť $z = \rho\cos\theta \leq 0$, je $\theta \in [\pi/2, \pi]$. Dosazení, do dalších omezení máme

$$A^2 \leq \rho^2 \leq B^2.$$

Transformujeme

$$\int_A^B \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \rho^4 \sin^3\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho = 2\pi \int_A^B \rho^4 \mathrm{d}\rho \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^3\theta \mathrm{d}\theta =$$
$$= 2\pi \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_A^B \int_{-1}^0 1 - t^2 \mathrm{d}t = 2\pi \frac{A^5 - B^5}{5} \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_{-1}^0 = 2\frac{A^5 - B^5}{5}\pi\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 4\frac{A^5 - B^5}{15}\pi$$

Př. 154 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V 15\sqrt{2}yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána omezeními* $x^2+y^2+z^2 \le A^2$, $z \le -\sqrt{x^2+y^2}$.

Vidíme, že množina je tvořena částí sféry. Zavedeme tedy sférické souřadnice $x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$. Neboť $z = \rho\cos\theta \le 0$, je $\theta \in [\pi/2, \pi]$. Dosazení, do dalšího omezení $\rho\cos\theta \le -\sqrt{\rho^2\sin^2\theta} = -\rho\sin\theta$. Nerovnost $\cos\theta \le -\sin\theta$ je splněna pro $\theta \in [3\pi/4, \pi]$. Ostatní omezení dostaneme jako $\rho \le A$. Transformujeme

$$\int_0^A \int_0^{2\pi} \int_{3\pi/4}^{\pi} 15\sqrt{2}\rho^4 \sin\varphi\sin^2\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho =$$

$$= 15\sqrt{2}\int_0^A \rho^4\mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \sin\varphi\mathrm{d}\varphi \int_{3\pi/4}^{\pi} \sin^2\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta =$$

$$= 15\sqrt{2}\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^A [-\cos\varphi]_0^{2\pi} \left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_{3\pi/4}^{\pi} = 0$$

Př. 155 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána omezeními* $x^2+y^2+z^2 \leq z$.

Vzhledem k podmínkám vidíme, že sférické souřadnice mají smysl, zavedeme $x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$. Dosazením do podmínek tak máme $0 \leq \rho^2 \leq \rho\cos\theta$. Vidíme, že $\cos\theta \geq 0$ dává $\theta \in [0, \pi/2]$. Transformujeme tedy

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\cos\theta} \rho^2\sin\theta\sqrt{\rho^2}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta = 2\pi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\int_0^{\cos\theta}\rho^3\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta =$$
$$= 2\pi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\cos\theta}\mathrm{d}\theta = 2\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^4\theta}{4}\sin\theta\mathrm{d}\theta =$$
$$= \frac{1}{2}\pi\int_0^1 t^4\mathrm{d}t = \frac{15\sqrt{2}}{2}\pi\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\pi\cdot\frac{1}{5} = \frac{\pi}{10}$$

Př. 156 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V je dána omezeními $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$, $z^2 \geq x^2 + y^2$.

Nerovnost $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$ lze přepsat skrze úpravu na čtverec do tvaru $x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1$. Uvážíme tedy obvyklé sférické souřadnice, nebo souřadnice posunuté mimo střed. Dostaneme v první možnosti

$$\rho^2 \leq 2\rho\cos\theta$$
$$\rho^2\cos^2\theta \geq \rho^2\sin^2\theta$$

Z první nerovnosti dostaneme $\rho \leq \cos\theta$, ale také, že $\cos\theta \geq 0$. Z druhé podmínky pak máme $\cos\theta \geq \sin\theta$. Proto máme $\theta \in [0, \pi/4]$. Transformujeme

$$\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\cos\theta} \rho^2\sin\theta \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta = 2\pi\int_0^{\pi/4}\sin\theta\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{\cos\theta}\mathrm{d}\theta =$$
$$= 2\pi\int_0^{\pi/4}\sin\theta\frac{\cos^3\theta}{3}\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\sqrt{2}/2} t(1-t^2)\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{2\pi}{3}\left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{2\pi}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right) = \frac{2\pi}{3}\cdot\frac{3}{16} = \frac{\pi}{8}$$

Př. 157 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána omezeními* $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$, $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{2-x^2-y^2}$.

Vidíme, že podmínky $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$ udávají v půdorysně čtvrtinu kružnice. Podmínka $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{2-x^2-y^2}$ ohraničuje proměnnou z, zavedeme tedy válcové souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$. Neboť se jedná o čtvrtinu kružnice a $x \ge 0$, $y \ge 0$, máme $\rho \in [0,1]$ a $\varphi \in [0,\pi/2]$. Z poslední podmínky máme $\rho \le z \le \sqrt{2-\rho^2}$. Ověříme také nerovnost $\rho \le \sqrt{2-\rho^2}$ vede na nerovnost $\rho^2 \le 1$. Transformujeme

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_\rho^{\sqrt{2-\rho^2}} \rho z^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \rho\left[\frac{z^3}{3}\right]_\rho^{\sqrt{2-\rho^2}} \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \rho\left(\frac{\sqrt{(2-\rho^2)^3}-\rho^3}{3}\right)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \left|\begin{array}{c} \rho = \sqrt{2}\sin t \\ \mathrm{d}\rho = \sqrt{2}\cos t\mathrm{d}t \end{array}\right| = \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4} \sqrt{2}\sin t\left(\frac{\sqrt{(2-2\sin^2 t)^3}-\sqrt{8}\sin^3 t}{3}\right)\sqrt{2}\cos t\mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi = \\
&= 4\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4}\left(\frac{\sqrt{(1-\sin^2 t)^3}-\sin^3 t}{3}\right)\sin t\cos t\mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4}\left(\cos^3 t-\sin^3 t\right)\sin t\cos t\mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4}\sin t\cos^4 t-\sin^4 t\cos t\mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4}\sin t\cos^4 t\mathrm{d}t-\int_0^{\pi/4}\sin^4 t\cos t\mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^{\pi/2}\left[-\frac{\cos^5 t}{5}\right]_0^{\pi/4}-\left[\frac{\sin^5 t}{5}\right]_0^{\pi/4}\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi\left(-\frac{1}{5\sqrt{2^5}}+\frac{1}{5}-\frac{1}{5\sqrt{2^5}}\right) = \frac{1}{15}\pi\left(\sqrt{2^3}-1\right)
\end{aligned}$$

Př. 158 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V z\sqrt{x^2-2y+y^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána omezeními* $x^2+y^2\le 1$, $z\ge 0$, $z\le 1/2$.

Vidíme, že množina V je část válce, zavedeme tedy válcové souřadnice $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $z=z$. Transformujeme

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{1/2}\rho z\sqrt{\rho^2-2\rho\sin\varphi}\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho$$

Integrovaná funkce je poněkud komplikovaná, pokud ji však upravíme na čtverec, dostaneme $\sqrt{x^2-2y+y^2+1}=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$. Zavedeme tedy posunuté cylindrické souřadnice $x=\rho\cos\varphi$, $y-1=\rho\sin\varphi$, $z=z$. Dosazením do podmínky $x^2+y^2\le 1$ dostaneme nerovnost $\rho^2\le -2\rho\sin\varphi$. Neboť navíc $\rho\ge 0$ máme omezení $\sin\varphi\le 0$. Transformujeme

$$\int_0^{1/2}\int_\pi^{2\pi}\int_0^{-2\sin\varphi}\rho z\sqrt{\rho^2}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z=\int_0^{1/2}z\mathrm{d}z\int_\pi^{2\pi}\int_0^{-2\sin\varphi}\rho^2\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi=$$
$$=\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{1/2}\int_\pi^{2\pi}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{-2\sin\varphi}\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{8}\int_\pi^{2\pi}-\frac{8\sin^3\varphi}{3}\mathrm{d}\varphi=$$
$$=\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}1-t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{3}\left(2-\frac{2}{3}\right)=\frac{6-2}{9}=\frac{4}{9}$$

Př. 159 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V z(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána omezeními* $x^2+y^2 \leq 2y$, $z \geq 0$, $z \leq 1/2$.

Pokud upravíme podmínku $x^2+y^2 \leq 2y$ na čtverec, dostaneme $x^2+(y-1)^2 \leq 1$. Zavedeme tedy posunuté cylindrické souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y-1 = \rho\sin\varphi$, $z = z$. Dosazením do podmínky dostaneme $\rho^2 \leq 1$. Transformujeme tedy jednoduše

$$\int_0^{1/2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho z\left(\rho^2+2\rho\sin\varphi+1\right)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z =$$
$$= \int_0^{1/2} z\mathrm{d}z \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^3+2\rho^2\sin\varphi+\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{1/2}\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^4}{4}+\frac{2\rho^3\sin\varphi}{3}+\frac{\rho^2}{2}\right]_0^1\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}+\frac{2\sin\varphi}{3}+\frac{1}{2}\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \frac{1}{8}\left[\frac{3\varphi}{4}-\frac{2\cos\varphi}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{8}\cdot\frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}$$

Př. 160 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V \frac{1}{z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána omezeními* $x^2 + y^2 + z^2 \leq A^2$, $z \geq A/2$, $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$.

Vidíme, že vyšetřovaná množina tvoří část sféry. Proto zavedeme sférické souřadnice $x = \rho \cos \varphi \sin \theta$, $y = \rho \sin \varphi \sin \theta$, $z = \rho \cos \theta$ a dosazením do omezení dostaneme $\rho^2 \leq A^2$,

$$\begin{aligned}
\rho \cos \theta &\geq A/2 \\
\rho \cos \theta &\geq \sqrt{\rho^2 \sin^2 \theta} = \rho \sin \theta
\end{aligned}$$

Z podmínky $\cos \theta \geq \sin \theta$ máme $\theta \in [0, \pi/4]$. Počítáme tedy

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_{\frac{A}{2\cos\theta}}^{A} \frac{\rho^2 \sin \theta}{\rho \cos \theta} \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi = 2\pi \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} \theta \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_{\frac{A}{2\cos\theta}}^{A} \mathrm{d}\theta = \\
&= \pi \int_0^{\pi/4} \left(A^2 \operatorname{tg} \theta - \frac{A^2 \sin \theta}{4 \cos^3 \theta} \right) \mathrm{d}\theta = \\
&= \pi A^2 \left[-\ln |\cos \theta| \right]_0^{\pi/4} - \frac{\pi A^2}{4} \left[\frac{1}{2\cos^2 \theta} \right]_0^{\pi/4} = \\
&= -\pi A^2 \ln \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi A^2}{8} - \frac{\pi A^2}{4} = -\frac{\pi A^2}{2} \ln \frac{1}{2} - \frac{\pi A^2}{8}
\end{aligned}$$

Př. 161 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána omezeními* $x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4,\ z \geq \sqrt{x^2+y^2}$.

Vidíme, že vyšetřovaná množina tvoří část sféry. Proto zavedeme sférické souřadnice $x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$. Dosazením do omezení máme

$$\rho^2 \leq 4\rho\cos\theta$$
$$\rho\cos\theta \leq \rho\sin\theta$$

Z druhého omezení dostaneme $\theta \in [0, \pi/4]$ a z první nerovnosti $\rho \in [0, 4\cos\theta]$. Transformujeme

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{4\cos\theta} \rho^4 \sin^3\theta\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \int_0^{2\pi}\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/4}\sin^3\theta\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^{4\cos\theta}\mathrm{d}\theta =$$
$$= \left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\sin^3\theta\frac{2^10\cos^5\theta}{5}\mathrm{d}\theta =$$
$$= 0\cdot\int_0^{\pi/4}\sin^3\theta\frac{2^10\cos^5\theta}{5}\mathrm{d}\theta = 0$$

Př. 162 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána omezeními* $(x^2+y^2+z^2)^2 \leq 3z$.

Vidíme, že vyšetřovaná množina tvoří část sféry. Proto zavedeme sférické souřadnice $x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$. Dosazením do omezení máme

$$\rho^4 \leq 3\rho\cos\theta$$

Tato podmínka vede na nerovnost $\cos\theta \geq 0$ a tudíž $\theta \in [0, \pi/2]$. Dále pak $\rho \in [0, \sqrt[3]{3\cos\theta}]$. Transformujeme

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt[3]{3\cos\theta}} \rho^2\sin\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = 2\pi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{\sqrt[3]{3\cos\theta}}\mathrm{d}\theta =$$
$$= 2\pi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\frac{3\cos\theta}{3}\mathrm{d}\theta = 2\pi\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = \pi$$

Př. 163 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V \frac{xyz}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V je dána omezeními $(x^2+y^2+z^2)^2 \le A^2xy$, $x>0$, $y>0$, $z>0$.

Vidíme, že vyšetřovaná množina tvoří část sféry. Proto zavedeme sférické souřadnice $x=\rho\cos\varphi\sin\theta$, $y=\rho\sin\varphi\sin\theta$, $z=\rho\cos\theta$. Dosazením do omezení máme

$$\rho^4 \le A^2\rho^2\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\theta$$

Což nás vede na nerovnost $\rho \le A\sin\theta\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}$. Navíc máme podmínku $\cos\varphi\sin\varphi \ge 0$ dávají omezení $\varphi\in[0,\pi/2]\cup[\pi,3\pi/2]$. Další omezení udávají nerovnsoti

$$\begin{aligned}\rho\cos\varphi\sin\theta &> 0\\ \rho\sin\varphi\sin\theta &> 0\\ \rho\cos\theta &> 0\end{aligned}$$

Ze třetí nerovnosti máme hned $\theta\in[0,\pi/2)$. Z první nerovnosti pak také $\varphi\in(0,\pi/2)$. Transformujeme

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{A\sin\theta\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}}\rho^2\sin\theta\frac{\rho^3\sin^2\theta\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi}{\rho^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\\ &=\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{A\sin\theta\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}}\rho^3\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\\ &=\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{A\sin\theta\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\\ &=\frac{A^4}{4}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\sin^5\theta\cos\theta\cos^3\varphi\sin^3\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\\ &=\frac{A^4}{4}\int_0^{\pi/2}\cos^3\varphi\sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi\left[\frac{\sin^6\theta}{6}\right]_0^{\pi/2}=\\ &=\frac{A^4}{24}\int_0^1(1-t^2)t^3\mathrm{d}t=\frac{A^4}{24}\left[\frac{t^4}{4}-\frac{t^6}{6}\right]_0^1=\frac{A^4}{24}\cdot\frac{6-4}{24}=\frac{A^4}{288}\end{aligned}$$

Př. 164 *Transformujte integrál*

$$\iiint_V z \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z,$$

kde V *je dána omezeními* $z \geq \frac{x^2}{4} + y^2$, $\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 \leq 6$.

Vidíme, že vyšetřovaná množina připomíná rovnice sféry až na podíl u x^2. Proto zavedeme zobecněné sférické souřadnice $x = 2\rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$. Dosazením do podmínek dostaneme

$$\rho^2 \leq 6$$
$$\rho\cos\theta \geq \rho^2\sin^2\theta$$

Ze druhé nerovnosti dostaneme omezení $\rho \leq \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$. Navíc ze druhého omezení vidíme, že $\cos\theta \geq 0$, a proto $\theta \in [0, \pi/2]$. Vzhledem k měnícímu se hornímu omezení musíme určit úhel při kterém dochází ke změně. Ten lze nalézt více způsoby, například skrze rovnost

$$\sqrt{6} = \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\cos\theta}{1-\cos^2\theta}$$

Také ji můžeme získat jako průsečík ploch $z = \frac{x^2}{4} + y^2$ a $\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 6$. Dosazením jedné rovnosti do druhé získáme polynom $z + z^2 = 6$, jehož kladné řešení je $z = 2$. Tyto body leží na kouli o poloměru $\sqrt{6}$, proto dosazením do transformace $z = \rho\cos\theta$ máme $\sqrt{6}\cos\theta = 2$. Je tedy $\theta = \arccos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Jakobián této transformace je $|J| = 2\rho^2\sin\theta$. Transformujeme

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\arccos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}\int_0^{\sqrt{6}} 2\rho^3\sin\theta\cos\theta \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi + \int_0^{2\pi}\int_{\arccos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}^{\pi/2}\int_0^{\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}} 2\rho^3\sin\theta\cos\theta \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

Př. 165 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V \frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána omezeními* $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}\leq 1$.

Vidíme, že vyšetřovaná množina je elipsoid, proto zavedeme zobecněné sférické souřadnice $x = A\rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = B\rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = C\rho\cos\theta$. Dosazením do podmínek dostaneme

$$\rho^2 \leq 1.$$

Jakobián této transformace je $|J| = ABC\rho^2\sin\theta$. Transformujeme

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 ABC\rho^2\sin\theta\left(\rho^2\right)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = 2ABC\pi\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^4\mathrm{d}\rho =$$

$$= 2ABC\pi\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4ABC\pi}{5}$$

Př. 166 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V \sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}-\frac{y^2}{B^2}-\frac{z^2}{C^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V je dána omezeními $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}\leq 1$.

Vidíme, že vyšetřovaná množina je elipsoid, proto zavedeme zobecněné sférické souřadnice $x = A\rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = B\rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = C\rho\cos\theta$. Dosazením do podmínek dostaneme

$$\rho^2 \leq 1.$$

Jakobián této transformace je $|J| = ABC\rho^2\sin\theta$. Transformujeme

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 ABC\rho^2\sin\theta\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \\
&= 2ABC\pi\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\mathrm{d}t = \\
&= 2ABC\pi\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t = \\
&= ABC\pi\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\mathrm{d}t = ABC\pi\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4t}{2}\mathrm{d}t = \\
&= ABC\pi\left[\frac{4t-\sin 4t}{8}\right]_0^{\pi/2} = \frac{ABC\pi^2}{4}
\end{aligned}$$

Př. 167 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V \frac{z^2}{13}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána omezeními* $x^2+y^2+z^2 \le A^2$, $z \ge \frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{A}-A$.

Množina V je tvořena částí sféry. Pokud bychom zavedli sférické souřadnice, dostaneme ve druhé podmínce

$$\rho\cos\theta \ge \frac{\rho^2\sin^2\theta}{A} - A$$

Tato nerovnost není příliš průhledná. Pokusíme se tedy zavést spíše cylindrické souřadnice, čímž dostaneme podmínky

$$\begin{aligned} \rho^2 + z^2 &\le A^2 \\ z &\ge \frac{\rho^2}{A} - A \end{aligned}$$

Dostaneme tak společně ohraničení $\frac{\rho^2}{A} - A \le z \le \sqrt{A^2-\rho^2}$. Z podmínky $\frac{\rho^2}{A} - A \le \sqrt{A^2-\rho^2}$ navíc po umocnění získáme $\rho^2(\rho^2/A^2-1) \le 0$. Tudíž $\rho \in [0, A]$. Transformujeme

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_0^A\int_{\frac{\rho^2}{A}-A}^{\sqrt{A^2-\rho^2}} \frac{z^2}{13}\rho\mathrm{d}z\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^A \rho\left[\frac{z^3}{39}\right]_{\frac{\rho^2}{A}-A}^{\sqrt{A^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{1}{39}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^A \rho\sqrt{(A^2-\rho^2)^3} - \rho\left(\frac{\rho^2}{A}-A\right)^3\mathrm{d}\rho = \\
&= \frac{2\pi}{39}\left(\int_0^{\pi/2} A\sin t\sqrt{(A^2-A^2\sin^2 t)^3}A\cos t\mathrm{d}t - \int_0^A \frac{\rho^7}{A^3} - 3\frac{\rho^5}{A} + 3A\rho^3 - A^3\rho\mathrm{d}\rho\right) = \\
&= \frac{2\pi}{39}\left(\int_0^{\pi/2} A^5\sin t\cos^4 t\mathrm{d}t - \left[\frac{\rho^8}{8A^3} - 3\frac{\rho^6}{6A} + 3\frac{A\rho^4}{4} - \frac{A^3\rho^2}{2}\right]_0^A\right) = \\
&= \frac{2\pi}{39}\left(A^5\left[-\frac{\cos^5 t}{5}\right]_0^{\pi/2} - \left(\frac{A^5}{8} - 3\frac{A^5}{6} + 3\frac{A^5}{4} - \frac{A^5}{2}\right)\right) = \\
&= \frac{2\pi}{39}\left(\frac{A^5}{5} + \frac{A^5}{8}\right) = \frac{\pi}{39}\cdot\frac{8A^5+5A^5}{20} = \frac{A^5}{60}\pi
\end{aligned}$$

Př. 168 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V 2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V je dána omezeními $x^2+y^2 \geq 1/4$, $\sqrt{x^2+y^2}-1 \leq z \leq 1-\sqrt{x^2+y^2}$.

Vzhledem k tvaru množiny V zavedeme válcové souřadnice. Dostáváme nerovnosti $\rho \leq 1/2$ a $\rho - 1 \leq z \leq 1-\rho$. Ze druhé nerovnosti dostaneme také $\rho - 1 \leq z \leq 1 - \rho$ což vede na nerovnost $\rho \leq 1$. Transformujeme

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{1/2}\int_{\rho-1}^{1-\rho} 2z\rho\mathrm{d}z\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{1/2} \rho\left[z^2\right]_{\rho-1}^{1-\rho}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{1/2} \rho\left((1-\rho)^2-(\rho-1)^2\right)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{1/2} \rho\cdot 0\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = 0$$

Př. 169 *Transformuje integrál*

$$\iiint_V \mathrm{e}^{xyz}\, x^2 y \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z,$$

pomocí transformace $x = u$, $y = (u+v)/u$, $z = (u+v+w)/(u+v)$, *kde* V *je dána omezeními* $x \geq 1$, $y \geq 1$, $z \geq 1$, $xyz \leq 2$.

Dosadíme zadanou transformaci do podmínek odkud získáme

$$\begin{aligned} u &\geq 1 \\ \frac{u+v}{u} = 1 + \frac{v}{u} &\geq 1 \\ \frac{u+v+w}{u+v} = 1 + \frac{w}{u+v} &\geq 1 \\ u+v+w &\leq 2 \end{aligned}$$

Z první nerovnosti vidíme, že u je kladné. Z druhé a třetí nerovnosti máme tudíž $v \geq 0$, $w \geq 0$. V rovině uv vidíme ohraničení vzhledem k přímce $u + v \leq 2$ jako $u \in [1, 2]$ a $v \in [0, 1]$. Nalezneme Jakobián zobrazení jako

$$\det J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{v}{u^2} & -\frac{w}{(u+v)^2} \\ 0 & \frac{1}{u} & -\frac{w}{(u+v)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{u+v} \end{vmatrix} = \frac{1}{u(u+v)}$$

Můžeme tedy transformovat integrál jako

$$\int_0^1 \int_1^2 \int_0^{2-u-v} \mathrm{e}^{u+v+w}\, u^2 \cdot \frac{u+v}{u} \cdot \frac{1}{u(u+v)} \mathrm{d}w \mathrm{d}u \mathrm{d}v = \int_0^1 \int_1^2 \int_0^{2-u-v} \mathrm{e}^{u+v+w}\, \mathrm{d}w \mathrm{d}u \mathrm{d}v$$

Př. 170 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána omezeními* $z \geq \frac{x^2}{4} + y^2$, $z \leq 4$.

Vidíme, že v podmínce vystupuje ohraničení $z \geq \frac{x^2}{4} + y^2$, neboť se jedná pro pevné z o elipsu, zavedeme zobecněné válcové souřadnice jako $x = 2\rho\cos\varphi$, $y - 1 = \rho\sin\varphi$, $z = z$. Dosazením získáme

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = \rho^2 \leq z \leq 4$$

Z nerovnosti také vidíme, že $\rho^2 \leq 4$. Jakobián zobrazení je $|J| = 2\rho$ Máme tedy integrál

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{\rho^2}^4 2z\rho\mathrm{d}z\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \rho\left[z^2\right]_{\rho^2}^4 \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 16\rho - \rho^5\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = 2\pi\left[8\rho^2 - \frac{\rho^6}{6}\right]_0^2 = 2\pi\left[2^5 - \frac{2^5}{3}\right]_0^2 = \frac{2^7}{3}\pi$$

Př. 171 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V je dána omezeními $x^2+y^2 \geq 1/4$, $x^2+y^2-1 \leq z \leq 1-x^2-y^2$.

Vzhledem k tvaru množiny V zavedeme válcové souřadnice. Dostáváme nerovnosti $\rho \geq 1/2$ a $\rho^2-1 \leq z \leq 1-\rho^2$. Ze druhé nerovnosti dostaneme také $\rho^2-1 \leq z \leq 1-\rho^2$ což vede na nerovnost $\rho \leq 1$. Transformujeme

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_{1/2}^{1}\int_{\rho^2-1}^{1-\rho^2} \rho\frac{1}{\rho^4}\mathrm{d}z\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \\
&= 2\pi\int_{1/2}^{1}\frac{1}{\rho^3}\left(1-\rho^2-\rho^2+1\right)\mathrm{d}\rho = 2\pi\int_{1/2}^{1}\frac{2}{\rho^3}-\frac{2}{\rho}\mathrm{d}\rho = \\
&= 2\pi\left[\frac{2\rho^{-2}}{-2}-2\ln\rho\right]_{1/2}^{1} = 2\pi\left(-1+4+2\ln 1/2\right) = 6\pi+4\pi\ln 1/2
\end{aligned}$$

5 Nevlastní integrál

Neomezená množina M Nechť M je neohraničená množina. Řekneme, že posloupnost množin M_n vyčerpává množinu M pokud platí $M_n \subset M$, pro každé n a navíc pokud pro každé $r > 0$ existuje n_0 takové, že pro každé $n \geq n_0$ je $M \cap x^2 + y^2 \leq r^2 \subset M_n$.

Dále předpokládejme, že f je integrovatelné na libovolné ohraničené množině $N \subset M$.

Řekneme, že nevlastní integrál konverguje na množině M a

$$\iint_M f \mathrm{d}x\mathrm{d}y = I,$$

pokud existuje číslo I takové, že

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{M\setminus M_n} f \mathrm{d}x\mathrm{d}y = I$$

pro libovolnou posloupnost měřitelných množin M_n, které vyčerpávají množinu M. Pokud takové číslo neexistuje, řekneme, že integrál diverguje.

Nechť funkce f, g jsou nezáporné na neohraničneé množině M. Nechť $f \leq g$ na množině M. Potom platí, že

- pokud $\iint_M g \mathrm{d}y\mathrm{d}x < \infty$ potom také $\iint_M f \mathrm{d}y\mathrm{d}x < \infty$.
- pokud $\iint_M f \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \infty$ potom také $\iint_M g \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \infty$.

Jestliže konverguje integrál

$$\iint_M |f| \mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

pak konverguje také integrál

$$\iint_M f \mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Neohraničená funkce Bod $A \in \overline{M}$ se nazývá singulární bod funkce f jestliže funkce f není ohraničená na žádné množině tvaru $M \cap O(A)$, kde $O(A)$ je libovolné okolí bodu A.

Řekneme, že posloupnost ohraničených množin M_n se smršťuje k bodu A pokud $A \in M_n^\circ$ (tj. A je vnitřním bodem) pro všechna n a navíc platí, že $\lim_{n\to\infty} d(M_n) = 0$ (tj. průměr množin jde limitně k nule).

Dále předpokládejme, že f je integrovatelné na libovolné množině $M \setminus M_n$, kde M_n se smršťuje k její singularitě.

Nechť funkce f je definovaná na množině $M \setminus \{A\}$ a A je její singulární bod. Řekneme, že nevlastní integrál konverguje na množině M a

$$\iint_M f \mathrm{d}x\mathrm{d}y = I,$$

pokud existuje číslo I takové, že

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{M\setminus M_n} f \mathrm{d}x\mathrm{d}y = I$$

pro libovolnou posloupnost měřitelných množin M_n, které se smršťují k bodu A. V opačném případě řekneme, že integrál diverguje.

Pokud A není singulárním bodem, platí

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{M\setminus M_n} f \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_M f \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Nechť funkce f, g mají společný singulární bod na M. Jestliže nevlastní integrály

$$\iint_M f \mathrm{d}y\mathrm{d}x, \qquad \iint_M g \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

konvergují, pak konverguje také integrál

$$\iint_M Af + Bg \mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

kde A, B jsou konstanty a platí

$$\iint_M Af + Bg \mathrm{d}y\mathrm{d}x = A \iint_M f \mathrm{d}y\mathrm{d}x + B \iint_M g \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Nechť funkce f, g jsou nezáporné na množině M, kde A je jejich společný singulární bod. Nechť $f \leq g$ na množině M. Potom platí, že

- pokud $\iint_M g \mathrm{d}y\mathrm{d}x < \infty$ potom také $\iint_M f \mathrm{d}y\mathrm{d}x < \infty$.
- pokud $\iint_M f \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \infty$ potom také $\iint_M g \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \infty$.

Nechť funkce f je definovaná na množině $M\setminus\{A\}$ a A je její singulární bod. Jestliže konverguje integrál

$$\iint_M |f| \mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

pak konverguje také integrál

$$\iint_M f \mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Př. 172 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_M xy \mathrm{d}x \mathrm{d}y \qquad pro \qquad M = [0, \infty)^2$$

Zavedeme nějakou vyčerpávající množinu množiny M. Hned vidíme, že takovou množinou by mohlo být například $M_n = [0, n)^2$. Dostáváme tak integrál

$$I_n = \iint_{M_n} xy \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_0^n \int_0^n xy \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^n \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^n = \frac{n^4}{4}$$

Počítáme-li nyní limitu $\lim_{n\to\infty} I_n = \infty$. Tudíž máme, že integrál diverguje.

Př. 173 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_M \frac{1}{x^2y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad pro \qquad M = [1, \infty)^2$$

Zavedeme nějakou vyčerpávající množinu množiny M. Hned vidíme, že takovou množinou by mohlo být například $M_n = [1, n)^2$. Dostáváme tak integrál

$$I_n = \iint_{M_n} \frac{1}{x^2y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^n \int_1^n \frac{1}{x^2y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n \left[-\frac{1}{y}\right]_1^n =$$
$$= \left(-\frac{1}{n} + 1\right)^2$$

Počítáme-li nyní limitu $\lim_{n\to\infty} I_n = 1$. Tudíž máme, že integrál konverguje.

Př. 174 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_M \frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \textit{pro} \qquad M:\ x^2+y^2 \leq 1$$

Vidíme, že integrovaná funkce

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$$

má singularitu v počátku. Chceme tedy nalézt smršťující množinu M_n která se k němu smršťuje. Volíme $M_n : x^2 + y^2 \geq \frac{1}{n^2}$ čímž dostaneme integrál

$$\begin{aligned} I_n = \iint_{M\setminus M_n} \frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\rho}{\rho^2}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \\ = 2\pi\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{\rho}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = 2\pi\left[\ln\rho\right]_{\frac{1}{n}}^1 = 2\pi\left(\ln 1 - \ln\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Vidíme, že $\lim_{n\to\infty} I_n = \infty$ a tedy integrál diverguje.

Př. 175 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_M \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad pro \qquad M = [0,1]^2$$

Vidíme, že integrovaná funkce

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{y}}$$

má singularitu v počátku. Chceme tedy nalézt vyčerpávající množinu M_n která se k němu smršťuje. Volíme $M_n : \left[\frac{1}{n}, 1\right]^2$ čímž dostaneme integrál

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left[2\sqrt{x}\right]_{\frac{1}{n}}^1 \left[2\sqrt{y}\right]_{\frac{1}{n}}^1 = \\ &= \left(2\sqrt{1} - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2 \end{aligned}$$

Vidíme, že platí $\lim_{n\to\infty\infty} I_n = 1$. Zdá se, že integrál konverguje. Musíme si však uvědomit, že tento postup není přesný. Zvolená množina M_n sice vyčerpává množinu M, ale množina $M \setminus M_n$ není smršťující. Přidáme-li však k množině M_n ještě část $[0, 1/n] \times [1/n, 1]$ a $[1/n, 1] \times [0, 1/n]$ bude již vše v pořádku a $M \setminus M_n$ bude smršťující. Dopočítáme tedy ještě integrál

$$\begin{aligned} I'_n &= \int_0^{\frac{1}{n}} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left[2\sqrt{x}\right]_0^{\frac{1}{n}} \left[2\sqrt{y}\right]_{\frac{1}{n}}^1 = \\ &= \frac{2}{\sqrt{n}}\left(2\sqrt{1} - \frac{2}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že $f(x,y)$ je symetrická přes osu $y = x$, máme

$$\iint_{M\setminus M_n} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = I + 2I' \to 1 + 0 = 1$$

Př. 176 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_M xy\, \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \textit{pro} \qquad M = [0, \infty)^2$$

Nalezneme posloupnost M_n, která vyčerpává množinu M. Například $M_n = [0, n]^2$. Vidíme, že $M_n \subset M$ a že $M_n \to M$. Počítáme

$$\begin{aligned}
\iint_{M_n} xy\, \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^n \int_0^n xy\, \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{e}^{-y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^n x\, \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x \int_0^n y\, \mathrm{e}^{-y^2}\, \mathrm{d}y = \\
&= \left(\int_0^n x\, \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x \right)^2 = \left| \begin{array}{c} t = x^2 \\ \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x \end{array} \right| = \frac{1}{4} \left(\int_0^{n^2} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t \right)^2 = \\
&= \frac{1}{4} \left([-\,\mathrm{e}^{-t}]_0^{n^2} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(1 - \mathrm{e}^{-n^2} \right)^2 \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Př. 177 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_M \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \textit{pro} \qquad M : 0 < x^2 + y^2 \le x$$

Vidíme, že $f(x, y)$ má singularitu v bodě $A = [0, 0]$. Hledáme množinu, která se smršťuje k A. Takovou množinou je například $M_n : x^2 + y^2 \le \frac{1}{n^2}$. Vidíme, že A je vnitřním bodem M_n pro každé $n \in \mathbb{N}$ a že průměr $d(M_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Spočítáme tedy

$$\iint_{M\setminus M_n} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Množina M je dána jako $0 \ge x^2 + y^2 - x = (x - 1/2)^2 + y^2$ kružnice se středem $[1/2, 0]$. Po transformaci do polárních souřadnic dostaneme

$$\begin{aligned}
\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi &\le \rho\cos\varphi \\
\rho^2 &\le \rho\cos\varphi \\
\rho &\le \cos\varphi
\end{aligned}$$

Máme tedy $\frac{1}{n} < \rho \le \cos\varphi$. Potřebujeme ještě určit úhel φ a tedy hledáme průsečík $M_n \cap M$. Řešíme soustavu

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= \frac{1}{n^2} \\
x^2 + y^2 &= x
\end{aligned}$$

Vidíme, že $x = 1/n^2$ a $y = \pm\sqrt{1/n^2 - 1/n^4}$. Dopočítáme tedy z pravoúhlého trojúhelníku $\operatorname{tg}\varphi\frac{y}{x} = \sqrt{n^2-1}$ a tedy máme symetricky $-\operatorname{arctg}\sqrt{n^2-1} \le \varphi \le \operatorname{arctg}\sqrt{n^2-1}$. Dostáváme konečně integrál

$$\begin{aligned}
&\int_{-\operatorname{arctg}\sqrt{n^2-1}}^{\operatorname{arctg}\sqrt{n^2-1}} \int_{1/n}^{\cos\varphi} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2}}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \int_{-\operatorname{arctg}\sqrt{n^2-1}}^{\operatorname{arctg}\sqrt{n^2-1}} \left(\cos\varphi - \frac{1}{n}\right)\mathrm{d}\varphi = \\
&= \left[\sin\varphi - \frac{\varphi}{n}\right]_{-\operatorname{arctg}\sqrt{n^2-1}}^{\operatorname{arctg}\sqrt{n^2-1}} = \\
&= 2\sin\operatorname{arctg}\sqrt{n^2-1} - 2\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{n^2-1}}{n} = \alpha(n)
\end{aligned}$$

Máme složení spojitých funkcí a ohraničenou funkci vynásobenou něčím, co jde do nuly. Dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(n) = 2\sin(\pi/2) - 0 = 2.$$

Př. 178 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $x^2+y^2 \le A^2$, $A>0$.

Vidíme, že integrovaná funkce není definována v počátku, což je bod množiny M. Zavedeme vyčerpávající množiny M_n dané ohraničením $\frac{1}{n^2} \le x^2+y^2 \le A^2$, která je tvořena kružnicí. Zvolíme polární souřadnice $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Dosazením do omezení dostaneme $1/n \le \rho \le A$. Navíc Neboť nemáme další podmínky, po transformaci je $\varphi \in [0,2\pi]$. Počítáme

$$\begin{aligned}
I_n &= \iint_{M_n} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_{1/n}^{A} \rho\left(\rho^2\right)\ln\rho^2\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \\
&= 4\pi\int_{1/n}^{A}\rho^3\ln\rho\mathrm{d}\rho = \begin{vmatrix} \ln\rho & \frac{1}{\rho} \\ \rho^3 & \frac{\rho^4}{4} \end{vmatrix} = \\
&= 4\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\ln\rho\right]_{1/n}^{A} - \pi\int_{1/n}^{A}\rho^3\mathrm{d}\rho = \\
&= A^4\pi\ln A - \frac{\pi}{n^4}\ln\frac{1}{n} - \pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_{1/n}^{A} = \\
&= A^4\pi\ln A - \frac{\pi}{n^4}\ln\frac{1}{n} - \frac{A^4}{4}\pi + \frac{\pi}{4n^4}
\end{aligned}$$

Nyní musíme pouze určit $\lim_{n\to\infty} I_n$. Platí

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{\ln\frac{1}{n}}{n^4} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^4} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n^4} = 0$$

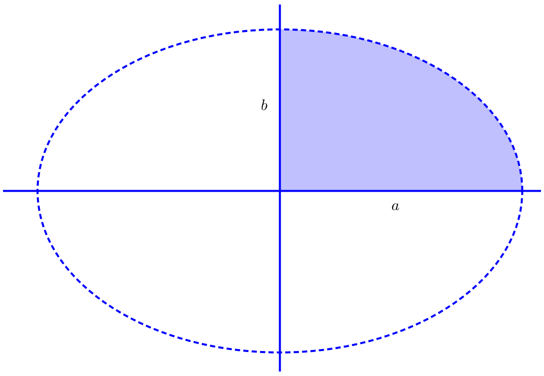
Proto je $\lim_{n\to\infty} I_n = A^4\pi\ln A - \frac{A^4}{4}\pi$ a platí

$$\iint_M (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = A^4\pi\ln A - \frac{A^4}{4}\pi.$$

Př. 179 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_M \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} \qquad \textit{pro} \qquad M: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1, x\geq 0, y\geq 0, a>0, b>0$$

Množina M je částí elipsy:



Z definičního oboru vidíme, že ve jmenovateli vznikne nula, pokud $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Singularitou je zde tedy část elipsy. Volíme tedy $M_n: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}>1-\frac{1}{n}, x\geq 0, y\geq 0$ a budeme počítat integrál přes množinu $M\setminus M_n$. Neboť pracujeme s elipsami, zvolíme transformaci do eliptických souřadnic $x=a\rho\cos\varphi$, $y=b\rho\sin\varphi$. Po dosazení do podmínky dostaneme

$$\frac{a^2\rho^2\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{b^2\rho^2\sin^2\varphi}{b^2}=\rho^2\leq 1-\frac{1}{n}$$

A také $a\rho\cos\varphi\geq 0 \Rightarrow \cos\varphi\geq 0$, $b\rho\sin\varphi\geq 0\Rightarrow \sin\varphi\geq 0$. Celkem tedy z obrázku, nebo z nerovností dostaneme $\rho\in[0,\sqrt{1-1/n}]$, $\varphi\in[0,\pi/2]$. Dostáváme

$$\int_0^{\sqrt{1-1/n}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ab\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho = \left| \begin{array}{c} t^2=1-\rho^2 \\ t\mathrm{d}t=-\rho\mathrm{d}\rho \end{array}\right| = -ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_1^{\frac{1}{n}}\frac{t}{\sqrt{t^2}}\mathrm{d}t =$$

$$=\frac{\pi}{2}ab\int_{\frac{1}{n}}^1 1\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}ab\left(1-\frac{1}{n}\right)\xrightarrow{n\to\infty}\frac{\pi}{2}ab$$

Př. 180 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_M \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{pro} \quad M:\ x^2+y^2\leq 1$$

Vidíme, že integrovaná funkce

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

má singularity v bodech kružnice $x^2+y^2=1$. Zavedeme tedy smršťující se množinu M_n : $\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\leq x^2+y^2$. Dostaneme integrál

$$\begin{aligned}
I_n &= \iint_{M\setminus M_n} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{x^2+y^2\leq\left(1-\frac{1}{n}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\
&= \int_0^{2\pi}\int_1^{1-\frac{1}{n}} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \\
&= \pi\int_{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \\
&= 2\pi\left[\sqrt{t}\right]_{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}^{1} = 2\pi\left(1-\sqrt{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}\right)
\end{aligned}$$

Vidíme, že $\lim_{n\to\infty} I_n = 2\pi$. Mohli bychom konstatovat, že integrál konverguje. Avšak musíme si uvědomit, že smršťující množina M_n není definována správně vzhledem k přednáškám. Stačí si rozmyslet, že průměr množin M_n

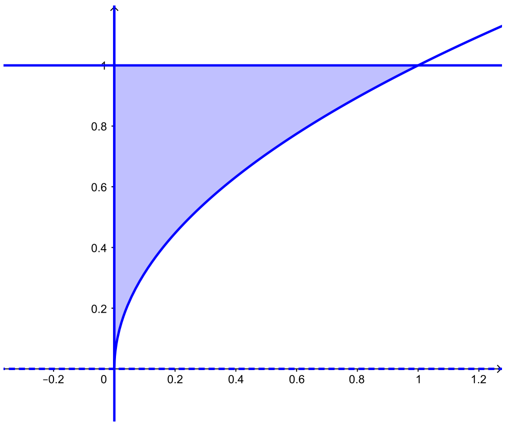
$$\lim_{n\to\infty} d(M_n)\neq 0$$

Je třeba si uvědomit, že definice smršťující množiny nepočítá se situací, kdy singularita není v izolovaném bodě. Chceme-li určit, zda integrál vskutku konverguje, musíme využít zdrojů nad rámec přednášky. Lze se podívat na poznámku v [1] str. 353, kde je naznačen možný postup.

Př. 181 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_M e^{x/y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \textit{pro} \qquad M : 0 < y \leq 1, x \geq 0, y \geq \sqrt{x}$$

Množina M vypadá takto:



Z definičního oboru funkce $f(x, y) = e^{x/y}$ vidíme, že v bodě $[0, 0]$ se nachází singularita. Abychom nemuseli rozdělovat vše na dva integrály, volíme $M_n = \{\frac{1}{n} \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2\}$. Dostáváme

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1}\int_{0}^{y^2} e^{x/y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{n}}^{1}\left[y\,e^{x/y}\right]_0^{y^2}\mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{n}}^{1} y\,e^{y} - y\mathrm{d}y = |\text{per partes}| =$$

$$= \left[(y-1)\,e^{y} - \frac{y^2}{2}\right]_{\frac{1}{n}}^{1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)e^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$$

Př. 182 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_M \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \textit{pro} \qquad M : 0 < x^2+y^2 \leq a^2, a > 0$$

Z definičního oboru vidíme, že máme singularitu v bodě $[0,0]$. Z tvaru funkce a množiny M vidíme, že bude vhodné vše transformovat do polárních souřadnic. Volíme tedy $M_n : x^2+y^2 \leq \frac{1}{n^2}$. Bereme tedy $\rho \in [1/n^2, a]$ a $\varphi \in [0, 2\pi]$. Dostaneme

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \int_{1/n^2}^{a} \rho \ln \frac{1}{\sqrt{\rho^2}} \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi = -\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{1/n^2}^{a} \rho \ln \rho \mathrm{d}\rho = |\text{per partes}| \\
&= -2\pi \left[\frac{\rho^2}{2} \ln \rho - \frac{\rho^4}{4} \right]_{1/n}^{a} = -2\pi \left(\frac{a^2}{2} \ln a - \frac{a^2}{4} - \frac{1}{2n^2} \ln \left(\frac{1}{n} \right) + \frac{1}{4n^2} \right) =: \alpha(n)
\end{aligned}$$

Pomocí L'hospitalova pravidla dostaneme, že

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{\ln(1/n)}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2} = |\frac{\infty}{\infty}| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n^2} = 0$$

a tedy $\lim_{n\to\infty} \alpha(n) = \pi a^2 \left(\frac{1}{2} - \ln a \right)$.

Př. 183 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

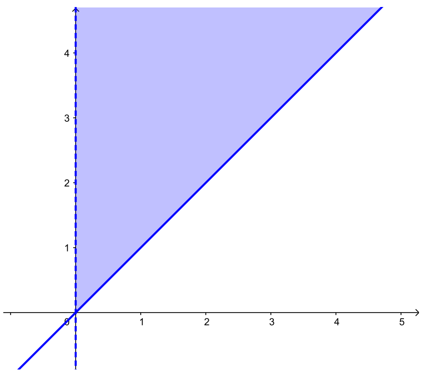
Z tvaru funkce hned vidíme, že je rozumné brát $M_n : x^2 + y^2 \leq n^2$ a transformovat vše do polárních souřadnic $\rho \in [0, n]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Dostaneme

$$\begin{aligned}
&\int_0^n \int_0^{2\pi} \rho\,\mathrm{e}^{-\rho^2}\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho = \left| \begin{array}{c} t = \rho^2 \\ \mathrm{d}t = 2\rho\mathrm{d}\rho \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{n^2} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \\
&= \pi\left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{n^2} = \pi\left(1 - \mathrm{e}^{-n^2}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \pi
\end{aligned}$$

Př. 184 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_M \mathrm{e}^{-x-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \textit{pro} \qquad M : 0 \le x \le y$$

Množina M vypadá takto:



Volíme jednoduše $M_n = \{0 \le x \le y \le n\}$ a dostáváme

$$\int_0^n \int_x^n \mathrm{e}^{-x-y}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^n \left[-\mathrm{e}^{-x-y}\right]_x^n \mathrm{d}x = \int_0^n \mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x-n}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \left[\mathrm{e}^{-x-n} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^n = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2n} - \mathrm{e}^{-n} + \frac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$$

Řešení navržené z první lavice spočívá v uvědomění si, že funkce $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x-y}$ je symetrická přes osu $y = x$ a tedy, dostáváme

$$\iint_M \mathrm{e}^{-x-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint_N \mathrm{e}^{-x-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \text{pro} \qquad N : [0,\infty)^2$$

Kde následně volbou $N_n = [0,n]^2$ dostáváme

$$\int_0^n \int_0^n \mathrm{e}^{-x-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_0^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^n\right)^2 = \left(1 - \mathrm{e}^{-n}\right)^2 \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

Př. 185 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-|x|-|y|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

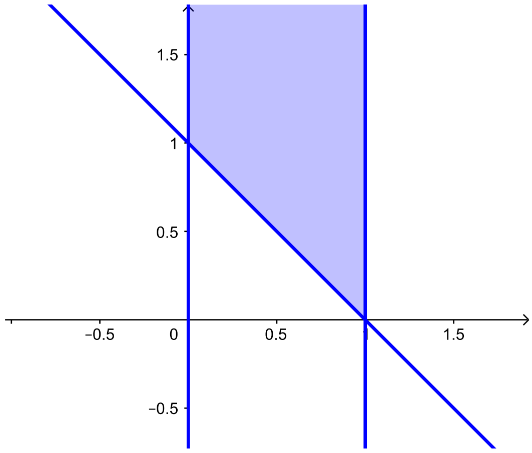
Žádná M_n se nezdá obzvlášť výhodná, zvolíme tedy jednoduchou $M_n = [-n, n]^2$ a počítáme

$$\int_{-n}^{n}\int_{-n}^{n} \mathrm{e}^{-|x|-|y|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-n}^{n} \mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x \int_{-n}^{n} \mathrm{e}^{-|y|}\,\mathrm{d}y = \left(\int_{-n}^{n} \mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x\right)^2 =$$
$$= \left(\int_{-n}^{0} \mathrm{e}^{x} + \int_{0}^{n} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\right)^2 = |\text{subst.} t = -x| = 4\left(\int_{-n}^{0} \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x\right)^2 = 4\left([\mathrm{e}^x]_{-n}^{0}\right)^2 =$$
$$= 4\left(1 - \mathrm{e}^{-n}\right)^2 \xrightarrow{n\to\infty} 4$$

Př. 186 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_M \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x+y)^p} \qquad \mathit{pro} \qquad M: x+y \geq 1, 0 \leq x \leq 1, p > 0$$

Množina M vypadá takto:



Zde se nabízejí dvě varianty, volit $M_n : x \in [0,1], y \in [1-x, n]$ nebo $M_n : x \in [0,1], y \in [1-x, n-x]$. Pro druhou variantu můžeme navíc zavést vhodnou transformaci $x = x, y = u - x$. Kde následně dostaneme $x \in [0,1]$, $u \in [1, n]$. Nebo rovnou vezmeme

$$\int_0^1 \int_{1-x}^{n-x} \frac{1}{(x+y)^p} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = x+y \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}y \end{array} \right| = \int_0^1 \int_1^n t^{-p} \mathrm{d}t\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_1^n t^{-p} \mathrm{d}t = \begin{cases} [\ln|t|]_1^n & p = 1 \\ \left[\frac{t^{1-p}}{1-p}\right]_1^n & p \neq 1 \end{cases} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} \infty & 0 < p \leq 1 \\ \frac{1}{p-1} & p > 1 \end{cases}$$

Pro $p \leq 1$ je tedy integrál divergentní. Pro $p > 1$ je konvergentní.

Př. 187 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2}$$

Z tvaru funkce usuzujeme, že nejlepší bude vše převést do polárních souřadnic a volit M_n : $x^2+y^2 \le n^2$ pro $\rho \in [0,n]$, $\varphi \in [0,2\pi]$. Dostaneme

$$\int_0^n \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{1+\rho^2} \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\rho = \left| \begin{array}{c} t = 1+\rho^2 \\ \mathrm{d}t = 2\rho\mathrm{d}\rho \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_1^{1+n^2} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \pi \left[\ln|t|\right]_1^{1+n^2} =$$
$$= \pi(\ln(n^2+1) - \ln 1) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

Dostáváme tedy, že integrál diverguje.

Př. 188 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_M \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+a^2)^2} \qquad \textit{pro} \qquad M = [0,\infty)^2, a > 0$$

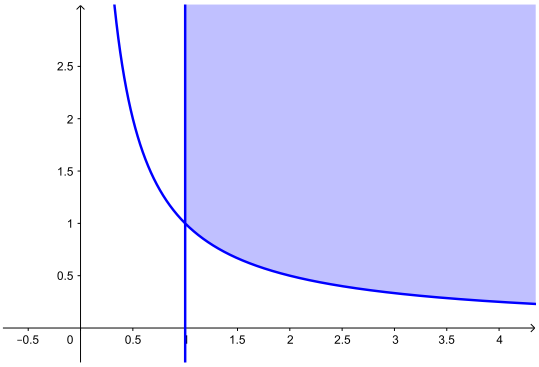
Z tvaru funkce usuzujeme, že nejlepší bude vše převést do polárních souřadnic a volit M_n : $x^2 + y^2 \leq n^2$ pro $\rho \in [0, n]$, $\varphi \in [0, \pi/2]$. Dostaneme

$$\int_0^n \int_0^{\pi/2} \frac{\rho}{(\rho^2+a^2)^2} \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\rho = \left| \begin{array}{c} t = \rho^2 + a^2 \\ \mathrm{d}t = 2\rho \mathrm{d}\rho \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int_{a^2}^{a^2+n^2} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} =$$
$$= \frac{\pi}{4} \left[-\frac{1}{t} \right]_{a^2}^{a^2+n^2} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^2+n^2} \right) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\pi}{4a^2}$$

Př. 189 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_M \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p y^q} \qquad \textit{pro} \qquad M : xy \geq 1, x \geq 1, p > 0, q > 0$$

Množina M vypadá takto:



Vzhledem k obrázku volíme $M_n : 1 \leq x \leq n, xy \leq n$ a zavedeme transformaci $x = x, u = yx$. Čímž získáme $x \in [1, n]$ a $u \in [1, n]$. Dále spočítáme jakobián

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{u}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x}$$

Máme tedy

$$\int_1^n \int_1^n \frac{1}{x^{p+1} \frac{u^q}{x^q}} \mathrm{d}x\mathrm{d}u = \int_1^n \frac{1}{u^q}\mathrm{d}u \int_1^n \frac{1}{x^{p+1-q}}\mathrm{d}x = \left[\frac{u^{1-q}}{1-q}\right]_1^n \left[\frac{x^{q-p}}{q-p}\right]_1^n =$$
$$= \frac{1}{(1-q)(q-p)} \left(\frac{1}{n^{q-1}} - 1\right) \left(\frac{1}{n^{p-q}} - 1\right)$$

Výrazy v závorce mohou konvergovat k 0, nebo divergovat k ∞. Proto vidíme, že pokud $q < 1$ nebo $p < q$ integrál diverguje. Roznásobíme-li závorky, dostaneme

$$\frac{1}{(1-q)(q-p)} \left(n^{1-p} - n^{1-q} - n^{q-p} + 1\right)$$

Vidíme, že pokud $p < 1$, pak integrál také diverguje. Celkově tedy pro $p > q > 1$ integrál konverguje k $\frac{1}{(1-q)(q-p)}$.

Př. 190 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Z tvaru funkce hned vidíme, že je rozumné brát $M_n : x^2+y^2 \le n^2$ a transformovat vše do polárních souřadnic $\rho \in [0,n]$, $\varphi \in [0,2\pi]$. Dostaneme

$$\int_0^{2\pi}\int_0^n \rho\,\mathrm{e}^{-\rho^2}\cos(\rho^2)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \left| \begin{array}{c} t=\rho^2 \\ \mathrm{d}t = 2\rho\mathrm{d}\rho \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{n^2}\mathrm{e}^{-t}\cos t\mathrm{d}t =$$
$$= |\text{2krat per partes a pak zbyly integral prevedeme na druhou stranu}| =$$
$$= \frac{\pi}{2}\left[\mathrm{e}^{-t}(\sin t - \cos t)\right]_0^{n^2} =$$
$$= \frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-n^2}(\sin n^2 - \cos n^2) + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{n\to\infty} |0\cdot\mathrm{OHR.}| \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\pi}{2}$$

Př. 191 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \sin(x^2+y^2) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Z tvaru funkce hned vidíme, že je rozumné brát $M_n : x^2 + y^2 \leq n^2$ a transformovat vše do polárních souřadnic $\rho \in [0, n]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Dostaneme

$$\int_0^{2\pi} \int_0^n \rho\, \mathrm{e}^{-\rho^2} \sin(\rho^2) \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi = \left| \begin{array}{c} t = \rho^2 \\ \mathrm{d}t = 2\rho \mathrm{d}\rho \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{n^2} \mathrm{e}^{-t} \sin t \mathrm{d}t =$$
$$= |\text{2krat per partes a pak zbyly integral prevedeme na druhou stranu}| =$$
$$= \frac{\pi}{2} \left[\mathrm{e}^{-t}(-\sin t - \cos t)\right]_0^{n^2} =$$
$$= \frac{\pi}{2} \mathrm{e}^{-n^2}(-\sin n^2 - \cos n^2) + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{n \to \infty} |0 \cdot \text{OHR.}| \xrightarrow{n \to \infty} \frac{\pi}{2}$$

Př. 192 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána omezeními* $x^2+y^2-1 \le z \le 1-x^2-y^2$.

Vzhledem k tvaru množiny V zavedeme válcové souřadnice. Dostáváme nerovnosti $\rho \le 1/2$ a $\rho^2-1 \le z \le 1-\rho^2$. Ze druhé nerovnosti dostaneme také $\rho^2-1 \le z \le 1-\rho^2$ což vede na nerovnost $\rho \le 1$. Vidíme, že množina M obsahuje počátek. Avšak počátek je singulárním bodem integrované funkce. Zavedeme vyčerpávající množinu V_n danou skrze omezení $x^2+y^2-1 \le z \le 1-x^2-y^2$ a $\frac{1}{n^2} \le x^2+y^2$. Počítáme

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{2\pi} \int_{1/n}^{1} \int_{\rho^2-1}^{1-\rho^2} \rho \frac{1}{\rho^4} \mathrm{d}z\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \\
&= 2\pi \int_{1/n}^{1} \frac{1}{\rho^3} \left(1-\rho^2-\rho^2+1\right) \mathrm{d}\rho = \\
&= 2\pi \int_{1/n}^{1} \frac{2}{\rho^3} - \frac{2}{\rho} \mathrm{d}\rho = \\
&= 2\pi \left[\frac{2\rho^{-2}}{-2} - 2\ln\rho\right]_{1/n}^{1} = 2\pi\left(-1+n^2-2\ln n\right)
\end{aligned}$$

Poté bereme

$$\iiint_V \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} I_n = 2\pi \lim_{n\to\infty} -1+n^2-2\ln n = \infty$$

Př. 193 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iiint_M \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^7} \qquad pro \qquad M = [0,\infty)^3$$

Volíme $M_n = [0,n]^3$ a dostáváme

$$\int_0^n \int_0^n \int_0^n \frac{1}{(1+x+y+z)^7}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -\frac{1}{6}\int_0^n \int_0^n \left[\frac{1}{(1+x+y+z)^6}\right]_0^n \mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$
$$= -\frac{1}{6}\int_0^n \int_0^n \frac{1}{(1+n+y+z)^6} - \frac{1}{(1+y+z)^6}\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$
$$= \frac{1}{30}\int_0^n \left[\frac{1}{(1+n+y+z)^5} - \frac{1}{(1+y+z)^5}\right]_0^n \mathrm{d}z =$$
$$= \frac{1}{30}\int_0^n \frac{1}{(1+2n+z)^5} + \frac{1}{(1+z)^5} - \frac{2}{(1+n+z)^5}\mathrm{d}z$$
$$= -\frac{1}{120}\left[\frac{1}{(1+2n+z)^4} + \frac{1}{(1+z)^4} - \frac{2}{(1+n+z)^4}\right]_0^n =$$
$$= -\frac{1}{120}\left(\frac{1}{(1+3n)^4} + \frac{3}{(1+n)^4} - \frac{3}{(1+2n)^4} - 1\right) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{120}$$

Př. 194 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iiint_M \ln(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \qquad \textit{pro} \qquad M: 0 < x^2+y^2+z^2 \le a^2$$

Z definičního oboru vidíme, že funkce má singularitu v bodě $[0,0,0]$. Z tvaru funkce hned vidíme, že je rozumné brát $M_n : x^2+y^2+z^2 \ge \frac{1}{n^2}$ a transformovat vše do sférických souřadnic $\rho \in [1/n, a]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [0, \pi]$. Dostaneme

$$\int_{\frac{1}{n^2}}^{a}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \rho^2 \sin\theta \ln\rho^2 \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{n^2}}^{a}\rho^2\ln\rho^2\mathrm{d}\rho =$$

$$|\text{per partes}| = 2\pi\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}\left[\frac{2}{3}\rho^3\ln\rho - \frac{2}{9}\rho^3\right]_{\frac{1}{n^2}}^{a} =$$

$$= 4\pi\left(\frac{2}{3}a^3\ln a\rho - \frac{2}{9}a^3 + \frac{2\ln a}{3n^3}\rho + \frac{2}{9n^3}\right)|\text{L'h}| \xrightarrow{n\to\infty} \frac{8\pi a^3}{3}(\ln a - 1/3)$$

Př. 195 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{-x^2-y^2-z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \qquad \textit{pro} \qquad M: 0 < x^2+y^2+z^2 \le a^2$$

Na první pohled vidíme, že je vhodné zavést polární souřadnice. Narazili bychom však na problém, že nevíme jak integrovat $\int \rho^2\,\mathrm{e}^{-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho$. Místo toho tedy transformujeme pomocí Fubiniho věty

$$\left(\iiint_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{-x^2-y^2-z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)^2 = \left(\iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^3 = \pi^3$$

Kde využijeme výsledek dřívějšího příkladu, nebo celý integrál transformujeme do polárních souřadnic a vše dopočteme. Víme, že integrál na levé straně je kladný, dostaneme tedy výsledek $\sqrt{\pi^3}$.

Př. 196 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\int \cdots \int_{[1,\infty)^k} \frac{1}{x_1^2 \cdot \cdots \cdot x_k^2} \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_k$$

I pro k rozměrný integrál můžeme volit vyčerpávací množinu $M_n = [1, n]^k$. Dostáváme

$$\begin{aligned} I_n &= \int \cdots \int_{[1,n]^k} \frac{1}{x_1^2 \cdot \cdots \cdot x_k^2} \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_k = \\ &= \int_1^n \frac{1}{x_1^2} \mathrm{d}x_1 \cdots \int_1^n \frac{1}{x_k^2} \mathrm{d}x_k = \left(\int_1^n \frac{1}{x_1^2} \mathrm{d}x_1 \right)^k = \\ &= \left(\left[-\frac{1}{x_1} \right]_1^n \right)^k = \left(-\frac{1}{n} + 1 \right)^k = \end{aligned}$$

Nyní vidíme, že platí $\lim_{n\to\infty} I_n = 1$.

Př. 197 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\int \cdots \int_M \frac{1}{x_1^2 + \cdots + x_k^2} \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_k \qquad \textit{pro} \qquad M : x_1^2 + \cdots + x_k^2 \leq 1$$

Zavedeme smršťující se množinu. Vzhledem k tomu, že M je tvořena k rozměrnou koulí, zvolíme $M_n = \frac{1}{n^2} \leq x_1^2 + \cdots + x_k^2 \leq 1$ a zavedeme k rozměrné sférické souřadnice. Dostaneme tak

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \cdots \int_{M_n} \frac{1}{x_1^2 + \cdots + x_k^2} \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_k = \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdots \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\rho}{\rho^2} \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta_1 \ldots \mathrm{d}\theta_{k-2} \mathrm{d}\varphi = \\
&= 2\pi^{k-1} \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{\rho} \mathrm{d}\rho = 2\pi^{k-1} \left[\ln \rho\right]_{\frac{1}{n}}^{1} = -2\pi^{k-1} \ln \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Nyní máme, že $\lim_{n\to\infty} I_n = \infty$. Tedy integrál diverguje. Pokud bude $k = 2$, jedná se o Příklad 174, pokud je naopak $k = 1$, jedná se o jednorozměrný integrál.

Př. 198 *Rozhodněte o konvergenci/divergenci integrálu*

$$\iint_M \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \textit{pro} \qquad M : x + y \geq 1, 0 \leq x \leq 1, p > 1$$

Všimneme si, že můžeme integrál ohraničit

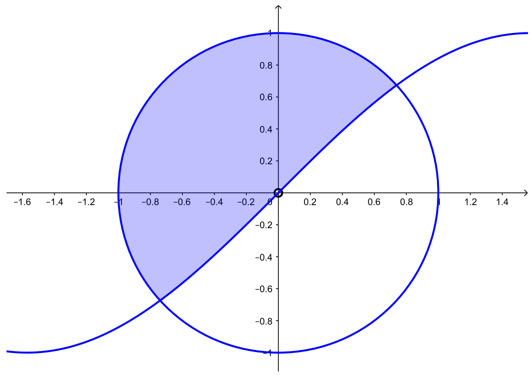
$$\iint_M \left| \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} \right| \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \iint_M \frac{1}{(x+y)^p} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Všimneme si, že ohraničující integrál je integrál počítaný v příkladě 198 odkud dostáváme, že integrál je konvergentní a to absolutně.

Př. 199 *Rozhodněte o konvergenci/divergenci integrálu*

$$\iint_M \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \textit{pro} \qquad M: 0 < x^2+y^2 \leq 1, \sin x \geq y$$

Množina M vypadá takto:



Vidíme, že integrovaná funkce má singularitu v bodě $[0,0]$. Tvar funkce nám napovídá, že je vhodné využít k integraci transformaci do polárních souřadnic, odrazuje nás však naopak tvar množiny M. Všimněme si však, že funkce nabývá pouze kladných hodnot a tedy integrál může být pouze nezáporný, navíc integrál zvětšíme, pokud budeme integrovat přes množinu N, kde $M \subset N$. Zvolíme tedy $N: x^2+y^2 \leq 1$ a počítáme

$$\iint_M \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}} < \iint_N \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_0^{2\pi}\int_{1/n}^{1} 1\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = 2\pi\left(1-\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 2\pi$$

Z těchto důvodů integrál konverguje.

Př. 200 *Rozhodněte o konvergenci/divergenci integrálu*

$$\iint_M yx\,\mathrm{e}^{x^2y^2}\ln(x^2+y^2) \qquad \textit{pro} \qquad M:[2,\infty)^2$$

Snadno vidíme, že

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} yx\,\mathrm{e}^{x^2y^2}\ln(x^2+y^2)=\infty$$

Očekáváme tedy, že integrál diverguje. Navíc na množině M platí, že

$$yx\,\mathrm{e}^{x^2y^2}\ln(x^2+y^2) > 2x\,\mathrm{e}^{4x^2}\ln(x^2+4) > 1x\,\mathrm{e}^{1x^2}\ln(4+4) > x\,\mathrm{e}^{x^2} > \mathrm{e}^x$$

Proto máme

$$\iint_M yx\,\mathrm{e}^{x^2y^2}\ln(x^2+y^2) > \iint_M \mathrm{e}^x = \int_0^n\int_0^n \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = n\,(\mathrm{e}^n-1) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

Takže vskutku vidíme, že integrál diverguje.

Př. 201 *Rozhodněte o konvergenci/divergenci integrálu*

$$\iint_M \mathrm{e}^{y^2x^2} - \frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \textit{pro} \qquad M: 0 < x^2+y^2 \le 1$$

Z tvaru množiny M tušíme, že bychom chtěli vše transformovat do polárních souřadnic, nevíme si však příliš rady s funkcí $\mathrm{e}^{y^2x^2}$, kterou nedokážeme jednoduše zintegrovat. avšak víme, že na množině M je funkce $\mathrm{e}^{y^2x^2}$ ohraničená, a proto

$$\iint_M \mathrm{e}^{y^2x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

konverguje. Navíc spočítáme, že

$$\iint_M \frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_{1/n}^1 \frac{\rho}{\rho^2}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = 2\pi\left(\ln 1 - \ln\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

Proto pokud by konvergoval integrál

$$\iint_M \mathrm{e}^{y^2x^2} - \frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

pak by konvergoval také rozdíl

$$\iint_M \mathrm{e}^{y^2x^2} - \frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_M \mathrm{e}^{y^2x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_M \frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Jenže tento integrál diverguje. A tedy víme, že vyšetřovaný integrál také diverguje.

Př. 202 *Rozhodněte o konvergenci/divergenci integrálu*

$$\iint_M \frac{2x^2+yx}{x^2y+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde množina $M=[0,\infty)^2$.

První si všimneme, že na množině M je funkce $f(x,y)=\frac{2x^2+yx}{x^2y+1}\geq 0$. Dále si všimneme, že platí

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,1)}\frac{2x^2+yx}{x^2y+1}=\lim_{(x,y)\to(\infty,1)}\frac{2+y\frac{1}{x}}{y+\frac{1}{x^2}}=\frac{2+0}{1+0}=2$$

nebo také

$$\lim_{(x,y)\to(1,\infty)}\frac{2x^2+yx}{x^2y+1}=\lim_{(x,y)\to(\infty,1)}\frac{x+\frac{2x^2}{y}}{x^2+\frac{1}{y}}=\frac{1+0}{1+0}=1$$

Ať už vezmeme kteroukoliv limitu, neboť je $f(x,y)\geq 0$ a limity $\neq 0$, máme

$$\iint_M \frac{2x^2+yx}{x^2y+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\infty$$

Př. 203 *Rozhodněte o konvergenci/divergenci integrálu*

$$\iint_M \frac{1}{y^2}\sin^2(xy) + \sqrt{x^2+x} - x\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde množina M je dána ohraničením $x \geq 0$.

První ze všeho se rozmyslíme, zda nelze funkci vhodně ohraničit. Všimneme si první, že platí $f(x,y) \geq 0$ na celém M, neboť očividně $\frac{1}{y^2}\sin^2(xy) \geq 0$ a $\sqrt{x^2+x} - x \geq \sqrt{x^2} - x = 0$. Navíc platí, že máme

$$\sqrt{x^2+x} - x \leq \frac{1}{y^2}\sin^2(xy) + \sqrt{x^2+x} - x \leq \frac{1}{y^2} + \sqrt{x^2+x} - x$$

Dále spočítáme limitu

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{1}{2}.$$

Můžeme tak snadno ohraničit

$$\iint_M \frac{1}{y^2}\sin^2(xy) + \sqrt{x^2+x} - x\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq \iint_M \sqrt{x^2+x} - x\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq \iint_{M(\varepsilon)} \frac{1}{2} - \varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \infty,$$

kde množina $M(\varepsilon)$ je dána ohraničením $x \geq N$, pro N dostatečně velké aby bylo $\varepsilon < \frac{1}{2}$.

Př. 204 *Rozhodněte o konvergenci/divergenci integrálu*

$$\iint_M \frac{\sin y}{x^2y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde množina $M = [1, \infty)^2$.

Vezmeme integrál

$$\iint_M \left|\frac{\sin y}{x^2y^2}\right| \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \iint_M \frac{1}{x^2y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Spočítáme integrál

$$\iint_M \frac{1}{x^2y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \int_1^n \frac{1}{x^2y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\int_1^n \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \left(\left[-\frac{1}{x}\right]_1^n\right)^2 =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n} + 1\right)^2 = 1$$

Vidíme tedy, že integrál z absolutní hodnoty konverguje, konverguje tedy také integrál

$$\iint_M \frac{\sin y}{x^2y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

a to absolutně.

Př. 205 *Rozhodněte o konvergenci/divergenci integrálu*

$$\iint_M \ln(2x+3y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde množina M je dána jako $[-1,1]^2$

Všimneme si, že integrovaná funkce má singularitu v počátku. Chceme se jí tedy vyhnout. Uvědomme si však, že nám nesejde, zda je M dána jako $[-1,1]^2$, nebo například $x^2+y^2 \leq 15$, neboť nás zde pouze zajímá, zda funkce konverguje/diverguje. Je-li množina M ohraničená a obsahuje počátek, na jejím tvaru nám již nezáleží. Dodržíme-li však tyto podmínky, můžeme se omezit s M na jinou množinu, která našim potřebám bude vyhovovat lépe. Také si všimneme, že funkce má singularitu utíkající do $-\infty$. Pokud tedy ohraničíme integrál zdola konvergentním integrálem, bude také samotný integrál také konvergovat. Pokud je $x<1$, $y<1$ tak máme

$$2x+3y > x+y > x^2+y^2.$$

Navíc neboť je logaritmus $\ln x$ rostoucí funkce, je nutně

$$\ln(2x+3y) > \ln(x^2+y^2).$$

Množinu M pak můžeme omezit pouze na jednotkovou kružnici $x^2+y^2 \leq 1$, abychom mohli použít polární souřadnice. Počítáme

$$\begin{aligned}
&\iint_{x^2+y^2\leq 1} \ln(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{n}}^1 \rho\ln\rho^2\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \\
&= \lim_{n\to\infty}\pi\int_{\frac{1}{n^2}}^1 \ln t\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\pi\left[t\ln t - t\right]_{\frac{1}{n^2}}^1 = \\
&= \lim_{n\to\infty}\pi\left(-1-\frac{1}{n^2}\ln\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right) = -1
\end{aligned}$$

Neboť snadno rozřešíme limitu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-2\ln n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-2}{n}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{-2}{n^2} = 0$$

Máme tedy dolní ohraničení integrálu se stejnou singularitou, které konverguje. Celý integrál tak konverguje.

Př. 206 *Rozhodněte o konvergenci/divergenci integrálu*

$$\iint_M \frac{\sin(x-y)\cos(x+y)}{2x^2+3y^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde množina M je ohraničená podmínkou $x^2+y^2 \leq 1$.

Neboť funkce mění znaménko na množině M, zavedeme integrál

$$\iint_M \left|\frac{\sin(x-y)\cos(x+y)}{2x^2+3y^2+1}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \iint_M \frac{1}{2x^2+3y^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Nyní chceme spočítat integrál přes vyčerpávající množinu. Integrovaná funkce je však poněkud komplikovaná, využijeme tak dalšího odhadu

$$\iint_M \frac{1}{2x^2+3y^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \iint_M \frac{1}{x^2+y^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\rho}{\rho^2+1}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{\rho^2+1}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho = \lim_{n\to\infty} 2\pi\left[\operatorname{arctg}\rho\right]_{\frac{1}{n}}^1 = \frac{\pi^2}{2}$$

Tedy vidíme, že integrál konverguje a to dokonce absolutně. Avšak všimněme si, že tento integrál ve skutečnosti nemá žádnou singularitu. Řešit jeho konvergence v tomto případě tedy nemá smysl.

Př. 207 *Ukažte, že integrál*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \cos(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

diverguje.

Ukážeme, že integrál přes různé vyčerpávací množiny dává různé výsledky. Zvolíme nejprve $M_n : x^2+y^2 \leq n^2$ a zavedeme polární souřadnice. Máme

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_0^n \rho\cos\rho^2 \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \left| \begin{array}{c} t=\rho^2 \\ \mathrm{d}t = 2\rho\mathrm{d}\rho \end{array} \right| = \\
&= \pi\int_0^{n^2} \cos t\mathrm{d}\rho = \pi\left[\sin t\right]_0^{n^2} = \pi\sin n^2
\end{aligned}$$

Nyní vidíme, že limita $\lim_{n\to\infty}\iint_{M_n}\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ neexistuje. Zvolíme-li jinou vyčerpávací množinu $K_n : [-n,n]^2$ máme

$$\begin{aligned}
&\int_{-n}^n\int_{-n}^n \cos(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-n}^n\int_{-n}^n \cos(x^2)\cos(y^2) - \sin(x^2)\sin(y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\
&= \int_{-n}^n \cos(x^2)\mathrm{d}x\int_{-n}^n \cos(y^2)\mathrm{d}y - \int_{-n}^n \sin(x^2)\mathrm{d}x\int_{-n}^n \sin(y^2)\mathrm{d}y = \\
&= \left(\int_{-n}^n \cos(x^2)\mathrm{d}x\right)^2 - \left(\int_{-n}^n \sin(x^2)\mathrm{d}x\right)^2 = \\
&= 4\left(\int_0^n \cos(x^2)\mathrm{d}x\right)^2 - 4\left(\int_0^n \sin(x^2)\mathrm{d}x\right)^2
\end{aligned}$$

Nalezneme, že platí

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} = \int_0^\infty \sin(x^2)\mathrm{d}x$$

Dostaneme tak

$$\lim_{n\to\infty} 4\left(\int_0^n \cos(x^2)\mathrm{d}x\right)^2 - 4\left(\int_0^n \sin(x^2)\mathrm{d}x\right)^2 = 4\frac{2\pi}{16} - 4\frac{2\pi}{16} = 0$$

Vidíme tedy, že integrál diverguje neboť přes různé součty se integrál nerovná.

Př. 208 *Rozhodněte o absolutní/neabsolutní konvergenci integrálu*

$$\iint_M \frac{\sin(x+y)}{x+y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde množina M je dána jako $[0,2]^2$.

Funkce se zdá v bodě $[0,0]$ nespojitá. Musíme se však zamyslet nad limitou

$$\lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)} \frac{\sin(x+y)}{x+y},$$

neboť víme, že je $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Víme, že můžeme nahradit funkci $\sin x$ Maclaurinovou řadou pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ jako

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Máme tedy limitu

$$\lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)} \frac{\sin(x+y)}{x+y} = \lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{(x+y)^{2n+1}}{x+y} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (x+y)^{2n} = \frac{1}{1!} \cdot 1 = 1$$

Tedy integrovaná funkce je na množině M ohraničená. Takový integrál je nutně na ohraničené množině M absolutně konvergentní.

Př. 209 *Ukažte, že integrál*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \sin(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

diverguje.

Zavedeme vyčerpávací množinu $M_n : x^2+y^2 \leq n^2$ čímž dostaneme snadno po zavedení polárních souřadnic

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_0^n \rho\sin\rho^2\cos\rho^2\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \pi\int_0^{n^2}\sin t\cos t\mathrm{d}t = \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{n^2}\sin 2t\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^{n^2} = \\
&= \frac{\pi}{2}\left(-\frac{\cos 2n^2}{2}+\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Vidíme nyní, že limita

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{M_n}\sin(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

neexistuje. Můžeme také upravit integrál

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathbb{R}^2}\sin(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\
&= 4\iint_{[0,\infty)^2}\left(\sin x^2\cos y^2+\sin y^2\cos x^2\right)\left(\cos x^2\cos y^2-\sin x^2\sin y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\
&= 4\iint_{[0,\infty)^2}\sin x^2\cos x^2\cos^2 y^2+\cos^2 x^2\sin y^2\cos y^2-\sin^2 x^2\sin y^2\cos y^2-\sin x^2\cos x^2\sin^2 y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\
&= 4\iint_{[0,\infty)^2}\sin x^2\cos x^2\left(\cos^2 y^2-\sin^2 y^2\right)+\left(\cos^2 x^2-\sin^2 x^2\right)\sin y^2\cos y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\
&= 2\iint_{[0,\infty)^2}\sin 2x^2\cos 2y^2+\cos 2x^2\sin 2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\
&= 4\int_0^n\int_0^n\sin x^2\cos 2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\int_0^n\sin(\sqrt{2}x)^2\mathrm{d}x\int_0^n\cos(\sqrt{2}y)^2\mathrm{d}y = \\
&= 2\int_0^{\sqrt{2}n}\sin t^2\mathrm{d}t\int_0^{\sqrt{2}n}\cos s^2\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

Využijeme-li faktu, že

$$\int_0^\infty\cos(x^2)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} = \int_0^\infty\sin(x^2)\mathrm{d}x$$

dostaneme nyní

$$\iint_{\mathbb{R}^2}\sin(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^\infty\sin t^2\mathrm{d}t\int_0^\infty\cos s^2\mathrm{d}s = 2\frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{4}$$

Přes různé vyčerpávající množiny tak máme různý výsledek.

Př. 210 *Ukažte, že integrál*

$$\iint_{[1,\infty)^2} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

diverguje přesto, že integrály

$$\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

konvergují.

První si všimneme, že pokud integrály konvergují, platí

$$\iint_{[1,\infty)^2} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{x^2+y^2\geq 1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

neboť přidáním je výsledný integrál rozšířený o integrály, které splňují

$$\iint_{x\in[0,1],\ x^2+y^2\geq 1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{y\in[0,1],\ x^2+y^2\geq 1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Můžeme tak počítat

$$\int_0^{\pi 2} \int_1^n \frac{\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi}{\rho^4} \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi =$$
$$= \int_0^{\pi 2} \cos 2\varphi \mathrm{d}\varphi \int_1^n \frac{1}{\rho} \mathrm{d}\rho = \left[\frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{\pi 2} [\ln\rho]_1^n = 0 \cdot [\ln\rho]_1^n = 0$$

A tedy integrál vyjde nulový. Stejně tak si můžeme všimnout, že pokud integrály konvergují, máme

$$\iint_{[1,\infty)^2} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{[1,\infty)^2, x\geq y} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{[1,\infty)^2, y\geq x} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$
$$= \iint_{[1,\infty)^2, x\geq y} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{[1,\infty)^2, y\geq x} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

Neboť ve druhém integrálu se jedná pouze o záměnu písmenek.

Dále budeme chtít počítat intergál přes vyčerpávající množinu, která není symetrická přes osu $y = x$. Zvolme například množinu $M_n = [1, n] \times [1, Kn]$, kde $K > 0$ je konstanta. Máme

$$
\begin{aligned}
&\int_1^{Kn}\int_1^n \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^{Kn}\int_1^n \frac{1}{x^2+y^2} - 2\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\
&= \int_1^{Kn} \left[\frac{1}{y}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)\right]_1^n - 2y^2\left(\left[\frac{x}{2y^2(x^2+y^2)}\right]_1^n + \frac{1}{2y^2}\int_1^n \frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \\
&= \int_1^{Kn} \left[\frac{1}{y}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)\right]_1^n - \left[\frac{x}{x^2+y^2}\right]_1^n - \left[\frac{1}{y}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)\right]_1^n \mathrm{d}y = \\
&= \int_1^{Kn} -\frac{n}{n^2+y^2} + \frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y = \left[-\frac{n}{n}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{n}\right) + \operatorname{arctg} y\right]_1^{Kn} = \\
&= -\operatorname{arctg} K + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right) + \operatorname{arctg}(Kn) - \operatorname{arctg} 1 = \\
&= -\operatorname{arctg} K + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right) + \operatorname{arctg}(Kn) - \frac{\pi}{4} \to -\operatorname{arctg} K + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} K
\end{aligned}
$$

Vidíme, že pro libovolné K integrál konverguje, ale pro $K \neq 1$ je tento výraz nenulový.

6 Integrály závislé na parametru

Eulerovu Gamma funkci definujeme jako

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1} \mathrm{d}t, & x > 0, \\ \frac{\Gamma(x-\lfloor x \rfloor)}{x(x+1)\dots(x-\lfloor x \rfloor -1)}, & x \in (-\infty, 0) \setminus \mathbb{Z}, \end{cases}$$

na množině $\mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$.

Některé vlastnosti Gamma funkce

1. Je-li funkce$\Gamma(x)$ definovaná v bodě x, potom $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
2. $\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$.
3. $\Gamma(n + \frac{1}{p}) = \Gamma(\frac{1}{p}) \frac{(pn-(p-1))!^p}{p^n}$
4. $\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{(-2)^n}{(2n-1)!!} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$.
5. $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$, $x \notin \mathbb{Z}$.
6. $\frac{\mathrm{d}^n \Gamma(x)}{\mathrm{d}x^n} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1} \ln^n t \mathrm{d}t$, pro $x > 0$.

Zde symbol $!^p$ označuje p vykřičníků $! \dots !$.

Beta funkci definujeme následně jako

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} \mathrm{d}t = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

pro $x > 0$, $y > 0$.

Věta 211 *Nechť funkce f je spojitá na množině $A \times B$, kde A a B jsou kompaktní měřitelné množiny. Potom platí, že funkce*

$$g(y) = \int_A f(x, y) \mathrm{d}x$$

je spojitá na množině B a můžeme psát

$$\lim_{y \to y_0} \int_A f(x, y) \mathrm{d}x = \int_A \lim_{y \to y_0} f(x, y) \mathrm{d}x = \int_A f(x, y_0) \mathrm{d}x$$

pro $y_0 \in B^\circ$.

Věta 212 *Nechť A je kompaktní měřitelná množina a nechť funkce f je spojitá na množina $A \times [a, b]$ a má na této množině spojitou parciální derivaci podle poslední proměnné. Potom funkce*

$$g(y) = \int_A f(\mathbf{x}, y) \mathrm{d}\mathbf{x} \mathrm{d}y$$

má na intervalu $[a, b]$ spojitou derivaci a platí

$$g'(y) = \int_A \frac{\partial f(\mathbf{x}, y)}{\partial y} \mathrm{d}\mathbf{x} \mathrm{d}y$$

Věta 213 *Nechť f je spojitá funkce na množině $[a,b] \times [c,d]$ a funkce g, h jsou funkce spojité na intervalu $[c,d]$ a $g([c,d]) \subset [a,b]$, $h([c,d]) \subset [a,b]$. Poté je funkce*

$$G(y) = \int_{h(y)}^{g(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

spojitá na intervalu $[c,d]$.

Věta 214 *Nechť f je spojitá funkce na množině $(a,b) \times (c,d)$ a má zde spojitou parc. derivaci podle druhé proměnné. Nechť g, h jsou funkce definované na intervalu (c,d) a mají na něm derivaci. Nechť dále g, h splňují $g((c,d)) \subset (a,b)$, $h((c,d)) \subset (a,b)$. Poté má funkce*

$$G(y) = \int_{h(y)}^{g(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

na intervalu (c,d) derivaci a platí

$$G'(y) = \int_{h(y)}^{g(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}x + f(g(y),y)g'(y) - f(h(y),y)h'(y).$$

Př. 215 *Nalezněte následující hodnoty* $\Gamma(1)$, $\Gamma^2(1/2)$ $\Gamma(5)$, $\Gamma(3,2)$, $\Gamma(-2)$, $\Gamma(-1,5)$, $\Gamma(1/4)\Gamma(3/4)$, $\Gamma(3/2)\Gamma(-1/2)$.

Počítáme dosazením

$$\begin{aligned}
\Gamma(1) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{1-1}\mathrm{d}t = \big[-\mathrm{e}^{-t}\big]_0^\infty = -0+1 = 1\\
\Gamma(5) &= 4\Gamma(4) = \cdots = 4\cdot 3\cdot 2\cdot \Gamma(1) = 4! = 24\\
\Gamma^2(1/2) &= \Gamma(1/2)\Gamma(1/2) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi\\
\Gamma(3,2) &= 2,2\cdot 1,2\Gamma(1,2) = 2,64\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{0,2}\mathrm{d}t =\\
&= 2,64\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, \sqrt[5]{t}\mathrm{d}t \text{ integrál nespočteme. Můžeme pouze aproximovat jeho hodnotu.}\\
\Gamma(-2) &\text{ funkce není v bodě } -2 \text{ definovaná}\\
\Gamma(-1,5) &= \frac{\Gamma(-1,5-(-2))}{-1,5} = \frac{\Gamma(0,5)}{-1,5\cdot(-0,5)} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}\\
\Gamma(1/4)\Gamma(3/4) &= \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\pi\\
\Gamma(3/2)\Gamma(-1/2) &= \frac{\pi}{\sin\frac{3\pi}{2}} = -\pi
\end{aligned}$$

Př. 216 *Nalezněte následující hodnoty $\beta(1,1)$, $\beta(1/2,3/2)$, $\beta(2,-1)$, $\beta(1/2,1/3)$ jako známé konstanty nebo pomocí hodnot $\Gamma(1/p)$, $p \in \mathbb{N}$.*

Máme vztah

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Dosadíme tedy hodnoty

$$\begin{aligned}
\beta(1,1) &= \frac{\Gamma(1)\Gamma(1)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2} \\
\beta(1/2,3/2) &= \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(3/2)}{\Gamma(2)} = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/2)}{2 \cdot 2!} = \frac{\pi}{4} \\
\beta(2,-1) &\text{ funkce není definována pro záporné hodnoty} \\
\beta(1/3,1/3) &= \frac{\Gamma^2(1/3)}{\Gamma(2/3)}
\end{aligned}$$

Víme, že platí $\Gamma(1/3)\Gamma(2/3) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. Proto je

$$\beta(1/3,1/3) = \frac{\sqrt{3}\Gamma^3(1/3)}{2\pi}$$

Př. 217 *Nalezněte hodnotu $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ za pomoci aritmetického-geometrického průměru.*

Celý postup začneme vyjádřením hodnoty $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ pomocí integrálu

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}$$

Počítáme

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}} = \left| \begin{array}{c} t^4 = u \\ 4t^3\mathrm{d}t = \mathrm{d}u \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u}} \frac{1}{4\sqrt[4]{u^3}} \mathrm{d}u =$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^1 (1-u)^{1/2-1} u^{1/4-1} \mathrm{d}u = \frac{1}{4} B(1/2, 1/4) = \frac{1}{4} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)}$$

Z předchozího příkladu již víme, že můžeme vyjádřit

$$\Gamma(1/4)\Gamma(3/4) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\pi$$

Proto platí, že

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{\Gamma^2(1/4)}{4\sqrt{2\pi}}$$

Nyní zavedeme posloupnosti

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$
$$y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$$

Pro počáteční podmínky $x_0 = 1$, $y_0 = \sqrt{2}$. Tyto posloupnosti konvergují ke stejné hodnotě $1/G$, kde G je Gaussova konstanta. Postupně ukážeme řadou transformací, že pomocí této hodnoty lze vyjádřit hodnotu $\Gamma(1/4)$.

Uvažme dále funkci

$$T(A, B) = \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(A^2+t^2)(B^2+t^2)}} = 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(A^2+t^2)(B^2+t^2)}}$$

Poté platí, že

$$
\begin{aligned}
T(A,B) &= 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(A^2+t^2)(B^2+t^2)}} = 2\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{(A^2+B^2)u^2+u^4+A^2B^2}}\mathrm{d}u = \\
&= 2\int_0^\infty \frac{u^2+AB}{\sqrt{u^2\left(A^2+B^2+2AB-2AB+u^2+\frac{A^2B^2}{u^2}\right)(u^2+AB)^2}}\mathrm{d}u = \\
&= 2\int_0^\infty \frac{u^2+AB}{\sqrt{u^2\left((A+B)^2+u^2-2AB+\frac{A^2B^2}{u^2}\right)(u^4+2ABu^2+A^2B^2)}}\mathrm{d}u = \\
&= 2\int_0^\infty \frac{u^2+AB}{\sqrt{u^4\left((A+B)^2+u^2-2AB+\frac{A^2B^2}{u^2}\right)\left(u^2+2AB+\frac{A^2B^2}{u^2}\right)}}\mathrm{d}u = \\
&= 2\int_0^\infty \frac{u^2+AB}{u^2\sqrt{\left((A+B)^2+\left(u-\frac{AB}{u}\right)^2\right)\left(4AB+u^2-2AB+\frac{A^2B^2}{u^2}\right)}}\mathrm{d}u = \\
&= \int_0^\infty \frac{1+\frac{AB}{u^2}}{\frac{2}{4}\sqrt{\left((A+B)^2+\left(u-\frac{AB}{u}\right)^2\right)\left(4AB+\left(u-\frac{AB}{u}\right)^2\right)}}\mathrm{d}u = \\
&= \int_0^\infty \frac{1+\frac{AB}{u^2}}{2\sqrt{\left(\frac{1}{4}(A+B)^2+\frac{1}{4}\left(u-\frac{AB}{u}\right)^2\right)\left(AB+\frac{1}{4}\left(u-\frac{AB}{u}\right)^2\right)}}\mathrm{d}u = \\
&= \left|\begin{array}{c} t=\frac{1}{2}\left(u-\frac{AB}{u}\right) \\ \mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(1+\frac{AB}{u^2}\right)\mathrm{d}u \end{array}\right| = \\
&= \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\left(\left(\frac{A+B}{2}\right)^2+t^2\right)\left(\sqrt{A^2B^2}+t^2\right)}}\mathrm{d}u = \\
&= T\left(\frac{A+B}{2},\sqrt{AB}\right)
\end{aligned}
$$

Vidíme, že funkce $T(x_{n+1},y_{n+1})=T(x_n,y_n)$. Proto indukcí platí, že $T(x_0,y_0)=T(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}T(x_n,y_n)=T(L,L)$. Avšak vidíme, že

$$
\begin{aligned}
T(x_0,y_0)=T(L,L) &= \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(L^2+t^2)(L^2+t^2)}} = \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}t}{L^2+t^2} = \\
&= \left[\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{L}\right)}{L}\right]_{-\infty}^\infty = \left[\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{L}\right)}{L}\right]_{-\infty}^\infty = \\
&= \frac{\pi}{2L}+\frac{\pi}{2L}=\frac{\pi}{L}
\end{aligned}
$$

Z tohoto výrazu nyní můžeme vyjádřit limitu $L(x_0,y_0)$, Nás zajímá především hodnota $L(1,\sqrt{2})$. Vidíme však, že ji můžeme získat dosazením do funkce $T(A,B)$ jako

$$T(1,\sqrt{2}) = 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1+t^2)(2+t^2)}}.$$

Tento integrál budeme chtít spojit s integrálem

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}.$$

Avšak k tomuto vede ještě několik mezi kroků.

Uveďme, že na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ platí rovnost

$$\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x} = \sqrt{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \sqrt{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\cos x}$$

Této rovnosti využijeme abychom vyjádřili

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{A^2\cos^2 u + B^2 \sin^2 u}} = \left| \begin{array}{c} t = B\,\mathrm{tg}\,u \\ \mathrm{d}t = \frac{B}{\cos^2 u}\mathrm{d}u = \frac{B}{\cos u}\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 u}\mathrm{d}u = \\ = \frac{B}{\cos u}\sqrt{1+\frac{t^2}{B^2}}\mathrm{d}u = \frac{1}{\cos u}\sqrt{B^2+t^2}\mathrm{d}u \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\cos u \mathrm{d}t}{\cos u\sqrt{B^2+t^2}\sqrt{A^2+B^2\frac{\sin^2 u}{\cos^2 u}}} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{B^2+t^2}\sqrt{A^2+t^2}} = T(A,B)$$

Dále dostaneme

$$K(C) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-C^2\sin^2 u}} = \left| \begin{array}{c} t = \sin u \\ \mathrm{d}t = \cos u \mathrm{d}u = \sqrt{\cos^2 u}\mathrm{d}u = \sqrt{1-\sin^2 u}\mathrm{d}u = \\ = \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}u \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-C^2t^2}}$$

Spojením těchto vyjádření vidíme, že platí

$$T(A,B) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{A^2\cos^2 u + B^2\sin^2 u}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{A\sqrt{\cos^2 u + \frac{B^2}{A^2}\sin^2 u}} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{A\sqrt{1-\sin^2 u + \frac{B^2}{A^2}\sin^2 u}} = \frac{1}{A}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-\left(1-\frac{B^2}{A^2}\right)\sin^2 u}} = \frac{1}{A}K\left(\sqrt{1-\frac{B^2}{A^2}}\right)$$

Je-li však $A = \sqrt{2}$ a $B = 1$ vidíme, že

$$K\left(\sqrt{1-\frac{B^2}{A^2}}\right) = K\left(\sqrt{1-\frac{1}{2}}\right) = K\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = K\left(\frac{B}{A}\right)$$

Navíc můžeme vyjádřit

$$K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-\frac{1}{2}t^2}} = \sqrt{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{2-t^2}}$$

Dále převedeme

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1+x^2)}} = \left| \begin{array}{c} x = \frac{t}{\sqrt{2-t^2}} \\ \mathrm{d}x = \cdots = \frac{2}{\sqrt{(2-t^2)^3}}\mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^1 \frac{\frac{2}{\sqrt{(2-t^2)^3}}}{\sqrt{\left(1-\frac{t^2}{2-t^2}\right)\left(1+\frac{t^2}{2-t^2}\right)}}\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{2-t^2}{\sqrt{(2-t^2)^3}\sqrt{(2-t^2-t^2)\,(2-t^2+t^2)}}\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-t^2}\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$

Nyní spojíme postupně všechny kroky znovu dohromady

$$\Gamma^2(1/4) = 4\sqrt{2\pi}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}} = 4\sqrt{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-t^2}\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t =$$

$$= 4\sqrt{\pi}K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4\sqrt{\pi}K\left(\sqrt{1-\frac{1}{2}}\right) = 4\sqrt{2\pi}T(1,\sqrt{2}) = 4\sqrt{2\pi}L(1,\sqrt{2})$$

Vidíme tedy, že hodnotu $\Gamma(1/4)$ dokážeme vyjádřit pomocí limity dvou posloupností. Avšak tuto limitu dostaneme právě jako Gaussovu konstantu. Více zajímavých informací lze nalézt v knize [**?**] nebo na webu [**?**].

Př. 218 *Nalezněte následující hodnoty* $\Gamma\left(\frac{9}{4}\right)$, $\Gamma\left(\frac{10}{4}\right)$, $\Gamma\left(\frac{11}{4}\right)$, $\Gamma\left(\frac{16}{5}\right)$ *pomocí hodnot* $\Gamma(1/p)$, $p \in \mathbb{N}$.

Vidíme, že lze přepsat $\Gamma\left(\frac{9}{4}\right) = \Gamma\left(2+\frac{1}{4}\right)$. Určíme hodnotu $\Gamma(n+\frac{1}{p})$ ze zadaného vzorce a dostaneme

$$\Gamma\left(2+\frac{1}{4}\right) = \Gamma(\frac{1}{4})\frac{(8-3)!!!!}{4^2} = \frac{5}{16}\Gamma(\frac{1}{4})$$

Další hodnotu lze převést $\Gamma\left(\frac{10}{4}\right) = \Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right)$.

Dosadíme opět do vzorce pro $\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)$ čímž máme

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+2\right) = \frac{3!!}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

Vidíme, že lze přepsat $\Gamma\left(\frac{11}{4}\right) = \Gamma\left(2+\frac{3}{4}\right)$. Použijeme vzorec $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ abychom dostali

$$\Gamma\left(2+\frac{3}{4}\right) = \left(1+\frac{3}{4}\right)\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{21}{16}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$$

Následně určíme hodnotu $\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$ skrze předchozí příklady. Víme, že platí

$$\Gamma(3/4) = \frac{\sqrt{2}\pi}{\Gamma(1/4)}$$

Přepíšeme $\Gamma\left(\frac{16}{5}\right) = \Gamma\left(3+\frac{1}{5}\right)$ a dosadíme do vzorce pro $\Gamma(n+\frac{1}{p})$ jako

$$\Gamma\left(3+\frac{1}{5}\right) = \frac{11\cdot 6}{125}\Gamma\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{66}{125}\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)$$

Př. 219 *Nalezněte hodnotu $\beta(n,m)$, kde $n,m \in \mathbb{N}$.*

Víme, že můžeme převést

$$\beta(n,m) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(n+m)} = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!} = \frac{m+n}{n \cdot m} \frac{m! \cdot n!}{(m+n)!} = \frac{m+n}{nm} \frac{1}{\binom{n+m}{n}}$$

Př. 220 *Zaveďte funkci* $g(x,y) = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-y+1)}$ *a zobecněné kombinační číslo* $\binom{x}{y} = \frac{g(x,y)}{\Gamma(y+1)}$. *Ukažte, že platí*

$$g(x+1,y) - g(x,y) = y \cdot g(x, y-1)$$
$$\binom{x+1}{y} - \binom{x}{y} = \binom{x}{y-1}$$

Dosadíme nejprve

$$\begin{aligned}
g(x+1,y) - g(x,y) &= \frac{\Gamma(x+2)}{\Gamma(x-y+2)} - \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-y+1)} = \\
&= \Gamma(x+1)\left(\frac{x+1}{(x-y+1)\Gamma(x-y+1)} - \frac{1}{\Gamma(x-y+1)}\right) = \\
&= \Gamma(x+1)\frac{x+1-(x-y+1)}{(x-y+1)\Gamma(x-y+1)} = \Gamma(x+1)\frac{y}{(x-y+1)\Gamma(x-y+1)} = \\
&= \frac{y\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-y+2)} = y\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-(y-1)+1)} = y \cdot g(x, y-1)
\end{aligned}$$

Do druhé nerovnosti dosadíme obdobně čímž dostaneme

$$\begin{aligned}
&\binom{x+1}{y} - \binom{x}{y} = \frac{g(x+1,y)}{\Gamma(y+1)} - \frac{g(x,y)}{\Gamma(y+1)} = \frac{g(x+1,y)-g(x,y)}{\Gamma(y+1)} = \\
&= \frac{y \cdot g(x,y-1)}{y\Gamma(y)} = \frac{g(x,y-1)}{\Gamma(y)} = \binom{x}{y-1}
\end{aligned}$$

Př. 221 *Vyjádřete* $\int_0^\infty x^B \mathrm{e}^{-Ax^2}\,\mathrm{d}x$*, kde* $A > 0$ *a* $B > -1$ *pomocí Gamma funkce. Pomocí tohoto odvození ukažte, že hustota standardizovaného normálního rozdělení je definována korektně.*

Vzhledem ke tvaru Gamma funkce musíme zavést vhodnou substituci $t = Ax^2$. Dostaneme tak

$$\int_0^\infty x^B \mathrm{e}^{-Ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\frac{t}{A}\right)^{B/2} \mathrm{e}^{-t}\,\frac{1}{\sqrt{At}}\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{2A^{(B+1)/2}}\int_0^\infty t^{(B-1)/2}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2A^{(B+1)/2}}\int_0^\infty t^{(B+1)/2-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{\Gamma((B+1)/2)}{2A^{(B+1)/2}}$$

Hustota rozdělení psti musí splňovat, že $\int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x = 1$. Ověříme tedy, že standardizované normální rozdělení tuto vlastnost splňuje. Hustota je

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

Dosadíme do integrálu a počítáme

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x\right) =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

Vidíme, že máme integrál odpovídá obecnému tvaru pro $A = 1/2$, $B = 0$. Dosadíme

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(1/2)}{2\sqrt{1/2}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi} = 1$$

Př. 222 *Vyjádřete* $\int_0^\infty x^B \mathrm{e}^{-Ax^n}\,\mathrm{d}x$*, kde* $A > 0$*,* $B > -1$ *a* $n \in \mathbb{N}$ *pomocí Gamma funkce. Pomocí těchto výsledků rozhodněte, která z těles* V_n *má největší objem. Těleso* V_n *vznikne rotací křivky* $x^{(n-1)/2}\,\mathrm{e}^{-x^n}$ *okolo osy* x *na intervalu* $[0,\infty)$.

Vzhledem ke tvaru Gamma funkce musíme zavést vhodnou substituci $t = Ax^n$. Dostaneme

$$\int_0^\infty \left(\frac{t}{A}\right)^{B/n} \mathrm{e}^{-t}\, \frac{1}{n\sqrt[n]{A}\,t^{(n-1)/n}}\mathrm{d}t = \frac{1}{nA^{(B+1)/n}} \int_0^\infty t^{(B+1)/n-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{\Gamma((B+1)/n)}{nA^{(B+1)/n}}$$

S pomocí tohoto výsledku budeme nyní počítat objem těles. ten získáme jako

$$\pi \int_0^\infty f^2(x)\mathrm{d}x = \pi \int_0^\infty x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-2x^n}\,\mathrm{d}x$$

Tento integrál odpovídá vyšetřovanému integrálu pro $A = 2$ a $B = n-1$, který získáme ze znalosti obecné formule jako

$$\pi \int_0^\infty x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-2x^n}\,\mathrm{d}x = \pi\frac{\Gamma((n-1+1)/n)}{n2^{(n-1+1)/n}} = \pi\frac{\Gamma(1)}{2n} = \frac{\pi}{2n}$$

Tato hodnota je očividně největší pro $n = 1$.

Př. 223 *Vyjádřete* $\int_0^\infty \frac{x^{A-1}}{(1+x)^{A+B}}\mathrm{d}x$, *kde* $A > 0$, $B > 0$ *a* $n \in \mathbb{N}$ *pomocí Beta funkce. Pomocí těchto výsledků rozhodněte, který z integrálů*

$$\int_0^\infty \frac{x^{A-1}}{(1+x)^{A+B}}\mathrm{d}x$$
$$\int_0^\infty \frac{x^{B-1}}{(1+x)^{A+B}}\mathrm{d}x$$

je větší, pokud víte, že $A > B$.

Abychom spočetli integrál, musíme zavést vhodnou substituci. Vidíme, že by tento úkol nebyl příliš složitý, pokud bychom měli ve jmenovateli výraz $1 - x$. Pokud zavedeme substituci $x = t/(1-t)$ dostaneme, že $x+1 = 1/(1-t)$ a navíc je $\mathrm{d}x = \frac{(1-t)+t}{(1-t)^2}\mathrm{d}t$. Vidíme, že nám tato substituce dá přesně to co chceme. Máme

$$\int_0^\infty \frac{t^{A-1}}{(1-t)^{A-1}}(1-t)^{A+B}\frac{1}{(1-t)^2}\mathrm{d}t = \int_0^\infty t^{A-1}(1-t)^{A+B+1-A-2}\mathrm{d}t = \int_0^\infty t^{A-1}(1-t)^{B-1}\mathrm{d}t = \beta(A,B)$$

Pomocí tohoto výsledku chceme nyní určit, který z integrálů je větší. Avšak platí

$$\int_0^\infty \frac{x^{A-1}}{(1+x)^{A+B}}\mathrm{d}x = \beta(A,B)$$
$$\int_0^\infty \frac{x^{B-1}}{(1+x)^{A+B}}\mathrm{d}x = \beta(B,A)$$

Navíc platí, že

$$\beta(A,B) = \frac{\Gamma(A)\Gamma(B)}{\Gamma(A+B)} = \frac{\Gamma(B)\Gamma(A)}{\Gamma(A+B)} = \beta(B,A)$$

Proto jsou integrály stejné.

Př. 224 *Vyjádřete* $\int_0^1 x^{B-1}(1-x^n)^{A-1}\mathrm{d}x$*, kde* $A>0$*,* $B>0$ *a* $n>0$ *pomocí Beta funkce. Pomocí tohoto výsledku určete hodnotu integrálu* $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$*.*

Abychom spočetli integrál, musíme zavést vhodnou substituci. V integrálu nám vadí výraz x^n v rozdílu. Zavedeme tedy substituci $t=x^n$ čímž dostaneme

$$\int_0^1 x^{B-1}(1-x^n)^{A-1}\mathrm{d}x = \int_0^1 t^{(B-1)/n}(1-t)^{A-1}\frac{1}{n}t^{1/n-1}\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{n}\int_0^1 t^{B/n-1}(1-t)^{A-1}\mathrm{d}x = \frac{\beta(B/n, A)}{n}$$

Následně chceme vypočítat integrál, přepíšeme jej tedy do tvaru

$$\int_0^1 (1-x^2)^{-1/2}\mathrm{d}x$$

Proto vidíme $A=1/2$, $B=1$ a $n=2$. Dosadíme do vzorce abychom získali

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{\beta(1/2,1/2)}{2} = \frac{\Gamma^2(1/2)}{\Gamma(1)2} = \frac{\pi}{2}$$

Př. 225 *Vyjádřete* $\int_0^{\pi/2} \sin^{B-1} x \cos^{A-1} x\mathrm{d}x$*, kde* $A > 0$*,* $B > 0$ *pomocí Beta funkce. Pomocí těchto výsledků odvoďte hodnotu integrálu*

$$\int_0^1 \sin^n x\mathrm{d}x$$

pro libovolné $n \in \mathbb{N}$*.*

Budeme chtít zavést vhodnou substituci, abychom integrál převedli. Zavedeme $t = \sin x$, avšak musíme také přepsat $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-t^2}$. Dostaneme tedy

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{B-1} x \cos^{A-1} x\mathrm{d}x = \int_0^1 t^{B-1} \sqrt{(1-t^2)^{A-1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}} \mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^1 t^{B-1}(1-t^2)^{A/2-1}\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{B-1}(1-t^2)^{A/2-1}\mathrm{d}t$$

Z předchozího příkladu však víme, že

$$\int_0^1 t^{B-1}(1-t^2)^{A/2-1}\mathrm{d}t = \frac{\beta(B/2, A/2)}{2}$$

Nyní chceme počítat integrál

$$\int_0^1 \sin^n x\mathrm{d}x$$

Vidíme, že zde platí $A = 1$ a $B = n+1$. Dosazením do výsledku vidíme, že

$$\int_0^1 \sin^n x\mathrm{d}x = \frac{\beta((n+1)/2, 1/2)}{2} = \frac{\Gamma((n+1)/2)\Gamma(1/2)}{2\Gamma((n+2)/2)} = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma((n+1)/2)}{n\Gamma(n/2)} =$$
$$= \begin{cases} \frac{(2k-1)!!\sqrt{\pi}}{2^k(k-1)!}, & \text{pro } n = 2k, k \in \mathbb{N} \\ \frac{2^{k-1}(k-1)!}{(2k-3)!!\sqrt{\pi}}, & \text{pro } n = 2k-1, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Př. 226 *Vyjádřete* $\int_0^\infty \frac{x^{A-1}}{1+x^B}\mathrm{d}x$*, kde* $A > 0$*,* $B > 0$*,* $A/B < 1$ *pomocí Beta funkce. Pomocí těchto výsledků spočtěte integrál*

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^6}\mathrm{d}x.$$

Musíme integrál převést do vhodného tvaru, ve jmenovateli nám však vadí výraz $1+x^B$, zavedeme tedy substituci $t = x^B$. Čímž dostaneme

$$\int_0^\infty \frac{x^{A-1}}{1+x^B}\mathrm{d}x = \frac{1}{B}\int_0^\infty \frac{t^{(A-1)/B}}{1+t}t^{1/B-1}\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{B}\int_0^\infty \frac{t^{A/B-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \frac{1}{B}\int_0^\infty \frac{t^{A/B-1}}{(1+t)^{A/B+1-A/B}}\mathrm{d}t$$

V Příkladě 226 jsme ukázali, že platí

$$\int_0^\infty \frac{x^{A-1}}{(1+x)^{A+B}}\mathrm{d}x = \beta(A,B)$$

Proto dostaneme integrál jako

$$\frac{1}{B}\int_0^\infty \frac{t^{A/B-1}}{(1+t)^{A/B+1-A/B}}\mathrm{d}t = \frac{1}{B}\beta(A/B, 1-A/B) = \frac{\Gamma(A/B)\Gamma(1-A/B)}{B\Gamma(1)} =$$
$$= \frac{\pi}{B\sin\left(\frac{A\pi}{B}\right)}$$

Integrál můžeme snadno spočítat pokud si uvědomíme, že platí

$$\left(\operatorname{arctg} x^3\right)' = \frac{3x^2}{1+x^6}$$

nebo dosadíme do vzorce $A = 3$, $B = 6$ a získáme

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^6}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6\sin\left(\frac{3\pi}{6}\right)} = \frac{\pi}{6}$$

Př. 227 *Nalezněte $n-$tý moment standardizovaného normálního rozdělení.*

Standardizované normální rozdělení má hustotu

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

a jeho $n-$ tý moment je

$$M_n = E(N^n(0,1)) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x$$

První si všimneme, že pro n liché je integrovaná funkce také lichá a nemá tedy smysl integrál počítat neboť v tomto případě je $M_n = 0$. Předpokládejme nadále, že $n = 2k$ je sudé. Dostaneme

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^n \,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^n \,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x$$

V Příkladě 221 jsme ukázali, že platí

$$\int_0^{\infty} x^B \,\mathrm{e}^{-Ax^2} \,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma((B+1)/2)}{2A^{(B+1)/2}}$$

Volíme tedy $B = n$ a $A = 1/2$. Dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^n \,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((n+1)/2)}{2^{1-(n+1)/2}} = \\ = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(k+1/2)}{2^{1/2-k}} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} 2^{k-1/2} \frac{(2k-1)!!}{2^k} \sqrt{\pi} = (2k-1)!! \end{aligned}$$

Př. 228 *Nalezněte $n-$tý moment rozdělení, které je dáno hustotou*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\Gamma(C/2)} x^{C/2-1} \, \mathrm{e}^{-x/2}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

kde $C = 4k$, $k \in \mathbb{N}$ je libovolný parametr.

Počítáme $n-$tý moment jako integrál

$$M_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{2^{C/2}\Gamma(C/2)} \int_0^{\infty} x^n x^{C/2-1} \, \mathrm{e}^{-x/2} \, \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2^{C/2}\Gamma(C/2)} \int_0^{\infty} x^{n+C/2-1} \, \mathrm{e}^{-x/2} \, \mathrm{d}x$$

V Příkladě 221 jsme ukázali, že platí

$$\int_0^{\infty} x^B \, \mathrm{e}^{-Ax^2} \, \mathrm{d}x = \frac{\Gamma((B+1)/2)}{2A^{(B+1)/2}}$$

Volíme tedy $B = n + C/2 - 1$ a $A = 1/2$. Dostáváme tedy

$$\frac{1}{2^{C/2}\Gamma(C/2)} \frac{\Gamma((2n+C)/4)}{2^{1-(2n+C)/4}} = \frac{\Gamma(k+n/2)}{2^{1-n/2+k}\Gamma(2k)} =$$
$$= \frac{\Gamma(k+n/2)}{2^{1-n/2+k}(2k-1)!} = \begin{cases} \frac{(k+l-1)!}{2^{1+k-l}(2k-1)!} & \text{pro } n = 2l, l \in \mathbb{N}, \\ \frac{[2(k+l)-3]!!}{2^{3k+l-1}(2k-1)!}\sqrt{\pi} & \text{pro } n = 2l-1, l \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

Př. 229 *Nalezněte $n-$tý moment rozdělení, které je dáno hustotou*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{Cx^{C-1}}{D^C}\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{D}\right)^2}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

kde $C > 0$, $D > 0$ jsou parametry.

Počítáme $n-$tý moment jako integrál

$$\begin{aligned} M_n &= \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} x^n \frac{Cx^{C-1}}{D^C}\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{D}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{C}{D^C}\int_0^{\infty} x^{n+C-1}\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{D}\right)^2}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

V Příkladě 221 jsme ukázali, že platí

$$\int_0^{\infty} x^B\,\mathrm{e}^{-Ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma((B+1)/2)}{2A^{(B+1)/2}}$$

Volíme tedy $B = n + C - 1$ a $A = 1/D^2$. Máme tedy

$$\frac{C}{D^C}\frac{\Gamma((n+C)/2)}{2}D^{n+C} = C\frac{\Gamma((n+C)/2)}{2}D^n = \begin{cases} CD^n\,\frac{(k-1)!}{2}, & \text{pro } n + C = 2k, k \in \mathbb{N}, \\ CD^n\,\frac{(2k-3)!!}{2^k}\sqrt{\pi} & \text{pro } n + C = 2k - 1, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Př. 230 *Pomocí hodnot funkcí Beta/Gamma spočtěte hodnotu integrálů*

1. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1-x^2}}$
2. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$
3. $\int_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x$
4. $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$
5. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\mathrm{d}x$
6. $\int_0^{\pi/2} \sin x\sqrt{\cos x}\mathrm{d}x$
7. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{tg} x}\mathrm{d}x$

1. Integrál převedeme do tvaru

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1-x^2}} = \int_0^1 x^{1-1}(1-x^2)^{2/3-1}\mathrm{d}x = \beta(1,2/3) = \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(5/3)}$$

2. Integrál převedeme do tvaru

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^1 x^{1-1}(1-x^4)^{1/2-1}\mathrm{d}x$$

Integrál tohoto tvaru jsme v obecné podobě vyřešili v Příkladě 224 jako vzorec

$$\int_0^1 x^{B-1}(1-x^n)^{A-1}\mathrm{d}x = \frac{\beta(B/n,A)}{n}$$

dosadíme tedy

$$\int_0^1 x^{1-1}(1-x^4)^{1/2-1}\mathrm{d}x = \frac{\beta(1/4,1/2)}{4} = \frac{\Gamma(1/4)}{4\Gamma(3/4)}\sqrt{\pi}$$

3. Integrál převedeme vhodnou substitucí $x = 3t$ do tvaru

$$\int_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x = 81\int_0^1 t^{3-1}(1-x^2)^{3/2-1}\mathrm{d}x$$

I zde využijeme vzorec získaný v Příkladě 224 čímž dostaneme

$$81\int_0^1 t^{3-1}(1-x^2)^{3/2-1}\mathrm{d}x = \frac{\beta(3/2,3/2)}{2} = \frac{\Gamma^2(3/2)}{2\Gamma(3)} = \frac{\pi}{16}$$

4. Integrál převedeme do tvaru

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{x^{3/2-1}}{(1+x)^{3/2+1/2}}\mathrm{d}x$$

Integrál tohoto tvaru jsme v obecné podobě vyřešili v Příkladě 226, kde jsme získali vzorec

$$\int_0^\infty \frac{x^{A-1}}{(1+x)^{A+B}} = \beta(A,B)$$

Dosadíme do něj abychom získali

$$\int_0^\infty \frac{x^{3/2-1}}{(1+x)^{3/2+1/2}}\mathrm{d}x = \beta(3/2,1/2) = \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(2)} = \frac{\pi}{2}$$

5. Integrál převedeme do tvaru

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin^{3/2-1} x \cos^{1-1} x\mathrm{d}x$$

Integrál tohoto tvaru jsme v obecné podobě vyřešili v Příkladě 225, kde jsme získali vzorec

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{B-1} x \cos^{A-1} x\mathrm{d}x = \frac{\beta(B/2,A/2)}{2}$$

Dosadíme do tohoto vzorce abychom získali

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{3/2-1} x \cos^{1-1} x\mathrm{d}x = \frac{\beta(3/4,1/2)}{2}$$

6. Integrál převedeme do tvaru

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\sqrt{\cos x}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin^{2-1} x \cos^{3/2-1} x\mathrm{d}x$$

Integrál tohoto tvaru jsme v obecné podobě vyřešili v Příkladě 225, kde jsme získali vzorec do kterého snadno dosadíme.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2-1} x \cos^{3/2-1} x\mathrm{d}x = \frac{\beta(1,3/4)}{2}$$

7. Integrál převedeme do tvaru

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{tg} x}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin^{3/2-1} x \cos^{1/2-1} x\mathrm{d}x$$

Integrál tohoto tvaru jsme v obecné podobě vyřešili v Příkladě 225, kde jsme získali vzorec do kterého snadno dosadíme.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{3/2-1} x \cos^{1/2-1} x\mathrm{d}x = \frac{\beta(3/4,1/4)}{2} = \frac{\Gamma(3/4)\Gamma(1/4)}{2\Gamma(1)} = \frac{\pi}{2\sin(\pi/4)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Př. 231 *Ukažte, že funkce*

$$F(y) = \int_0^1 \operatorname{sgn}(x-y)\mathrm{d}x$$

je spojitá.

Vypočteme integrál vzhledem k jednoduchosti funkce

$$\operatorname{sgn}(x-y) = \begin{cases} 1, & x-y>0, \\ 0, & x=y, \\ -1, & x-y<0. \end{cases}$$

V integrálu však $x \in [0,1]$, a proto máme

$$F(y) = \begin{cases} \int_0^1 -1\mathrm{d}x = -1, & y \geq 1, \\ \int_0^1 1\mathrm{d}x = 1, y \leq 0. \end{cases}$$

Zbytek funkce pro $y \in (0,1)$ dopočteme snadno

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_0^1 \operatorname{sgn}(x-y)\mathrm{d}x = \int_0^y \operatorname{sgn}(x-y)\mathrm{d}x + \int_y^1 \operatorname{sgn}(x-y)\mathrm{d}x = \\ &= \int_0^y -1\mathrm{d}x + \int_y^1 1\mathrm{d}x = -y + (1-y) = 1-2y \end{aligned}$$

Funkce $F(y)$ je tedy definovaná po částech, kde vyšetřované části jsou spojité. Musíme tedy dořešit spojitost funkcí pouze v bodech 0 a 1. Avšak snadno vidíme, že zde se limita zprava a zleva vždy rovnají neboť

$$\begin{aligned} \lim_{y\to 0^-} F(y) = 1 = \lim_{y\to 0^+-} F(y), \\ \lim_{y\to 1^-} F(y) = -1 = \lim_{y\to 1^+-} F(y). \end{aligned}$$

Př. 232 *Vypočtěte limitu*

$$\lim_{y\to 0}\int_0^2 x^2\cos(xy)\mathrm{d}x$$

Všimneme si, že integrovaná funkce $f(x,y) = x^2\cos(xy)$ je spojitá na celém $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ a tedy i na množině $[0,2]\times[-A,A]$. Můžeme tedy zaměnit pořadí integrace a limity podle věty čímž získáme

$$\lim_{y\to 0}\int_0^2 x^2\cos(xy)\mathrm{d}x = \int_0^2 \lim_{y\to 0} x^2\cos(xy)\mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^2 x^2\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

Př. 233 *Vypočtěte limitu*

$$\lim_{y\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x$$

Chtěli bychom v tomto případě zaměnit pořadí limity a integrálu, k tomu musíme ověřit několik podmínek. Víme, že funkce $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ je spojitá na celé množině $\mathbb{R}^2$. Navíc množina $A=[-1,1]$ je kompaktní a proto můžeme počítat pro libovolnou kompaktní B, která obsahuje bod 0, že

$$\begin{aligned}&\lim_{y\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\lim_{y\to 0}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x=\\&=\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}|x|\mathrm{d}x=2\int_{0}^{1}x\mathrm{d}x=2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=1\end{aligned}$$

Př. 234 *Vypočtěte limitu*

$$\lim_{y\to 1}\int_0^1 \frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$$

Vidíme, že funkce $f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$ není spojitá v počátku. Množina $A=[0,1]$ je daná. Musíme vhodně zvolit množinu B, aby na obdélníku $A\times B$ byla f spojitá. Chceme však vyšetřovat limitu $y\to 1$, můžeme volit například $B=[1/2,2]$ a podmínka na spojitost f je splněna. Můžeme tedy brát

$$\begin{aligned}&\lim_{y\to 1}\int_0^1 \frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}x=\int_0^1 \lim_{y\to 1}\frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x=\\&=[\operatorname{arctg} x]_0^1=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Obdobně můžeme počítat

$$\begin{aligned}&\lim_{y\to 1}\int_0^1 \frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}x=\lim_{y\to 1}\frac{1}{y^2}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}\mathrm{d}x=\\&=\lim_{y\to 1}\frac{1}{y^2}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)\right]_0^1=\lim_{y\to 1}\frac{1}{y^2}\operatorname{arctg}\frac{1}{y}=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Př. 235 *Vypočtěte limitu*

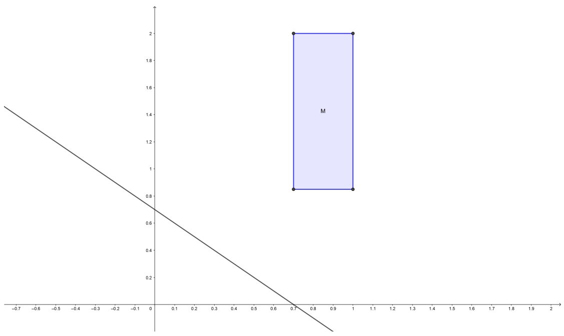
$$\lim_{y\to 1}\int_z^1 \frac{1}{x+y-z}\mathrm{d}x,$$

kde $z<1$

Hledáme obdélník $A\times B$ na kterém by byla funkce

$$f(x,y)=\frac{1}{x+y-z}$$

spojitá za podmínky, že $1\in B$ a máme dané $A=[z,1]$. Funkce $f(x,y)$ není spojitá na přímce $x+y=z$, proto volíme $B=\left[\frac{1+z}{2},2\right]$, neboť takto nebude mít obdélník s přímkou žádný průnik. Stačí si vše vykreslit. Pro jisté z dostaneme



Avšak můžeme také uvážit, že pro $x>0$ je $y=z-x<z<\frac{1+z}{2}$.

Dostáváme tak

$$\lim_{y\to 1}\int_z^1 \frac{1}{x+y-z}\mathrm{d}x=\int_z^1 \lim_{y\to 1}\frac{1}{x+y-z}\mathrm{d}x=$$
$$=\int_z^1 \frac{1}{x+1-z}\mathrm{d}x=[\ln|x+1-z|]_z^1=\ln|2-z|-\ln 1=\ln(2-z)$$

Můžeme také počítat přímo

$$\lim_{y\to 1}\int_z^1 \frac{1}{x+y-z}\mathrm{d}x=\lim_{y\to 1}[\ln|x+y-z|]_z^1=$$
$$=\lim_{y\to 1}(\ln(1+y-z)-\ln y)=\ln(2-z)$$

Př. 236 *Vypočtěte limitu*

$$\lim_{y\to 0}\int_y^{y+1} \frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x$$

Vidíme, že funkce $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$, $g(y) = y+1$ a $h(y) = y$ jsou spojité na libovolném intervalu. Proto zvolíme $[a,b]$, $[c,d]$ libovolně tak aby $g([c,d]) \subset [a,b]$ a $h([c,d]) \subset [a,b]$. Nesmíme však zapomenout, že chceme $0 \in [c,d]$. Snadno tak získáme například intervaly $[-3,3]\times[-1,1]$. Můžeme proto počítat

$$\lim_{y\to 0}\int_y^{y+1} \frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x = \lim_{y\to 0} G(y) = G(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = [\operatorname{arctg} x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Př. 237 *Vypočtěte limitu*

$$\lim_{y\to 0}\int_{y-2}^{\operatorname{sgn} y} x+y^2 \mathrm{d}x$$

Vidíme, že funkce $f(x,y)=x+y^2$, $h(y)=y-2$ jsou spojité v každém bodě. Avšak funkce $g(y)=\operatorname{sgn} y$ je nespojitá v bodě 0. Nenalezneme tedy vhodný trojúhelník, abychom mohli zaměnit pořadí limity a integrace, počítáme přesto rovnou

$$\lim_{y\to 0}\int_{y-2}^{\operatorname{sgn} y} x+y^2 \mathrm{d}x=\lim_{y\to 0}\left[\frac{x^2}{2}+xy^2\right]_{y-2}^{\operatorname{sgn} y}=$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sgn}^2 y-(y-2)^2}{2}+y^2\operatorname{sgn} y-y^3+2y^2=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sgn}^2 y}{2}+y^2\operatorname{sgn} y=$$

Budeme chtít počítat limitu těchto výrazů, uvědomíme si však, že funkce $\operatorname{sgn} y$ je ohraničená, proto je $\lim_{y\to 0} y^2\operatorname{sgn} y=0$. Dále pak platí, že $\lim_{y\to 0}\operatorname{sgn}^2 y=1$ což si snadno rozmyslíme, nebo nakreslíme. Proto je celkem limita

$$\lim_{y\to 0}\int_{y-2}^{\operatorname{sgn} y} x+y^2 \mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

Př. 238 *Vypočtěte limitu*

$$\lim_{y\to 1}\int_{y^2}^{y^3+1}\sqrt{\frac{x^2+\ln y}{x^2+y^2-1}}\mathrm{d}x$$

Vidíme, že funkce $g(y) = y^3+1$ a $h(y) = y^2$ jsou spojité na libovolném intervalu. Navíc funkce $f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+\ln y}{x^2+y^2-1}}\mathrm{d}x$ je nespojitá pouze v bodech $[x,0]$ a na kružnici $x^2+y^2=1$. Zvolíme interval $B=[1-1/n, 1+1/n]$ pro vhodné dostatečně velké n. Druhý interval $A=[a,b]$ volíme poté tak, aby se body obdélníku $A\times B$ nesetkaly s kružnicí $x^2+y^2=1$. Stačí nalézt n dostatečně velké spolu s a dostatečně blízkým hodnotě 1 avšak tak aby stále platilo $\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 > a$. horní hranice b zvolíme libovolně dostatečně velkou, např. $b=4$. Poté platí, že $g(B)\subset[a,4]$ a $h(B)\subset[a,4]$. Můžeme tedy počítat

$$\lim_{y\to 1}\int_{y^2}^{y^3+1}\sqrt{\frac{x^2+\ln y}{x^2+y^2-1}}\mathrm{d}x = \lim_{y\to 1}G(y) = G(1) = \int_1^2\sqrt{\frac{x^2+\ln 1}{x^2+1-1}}\mathrm{d}x =$$

$$= \int_1^2\sqrt{\frac{x^2}{x^2}}\mathrm{d}x = \int_1^2 1\mathrm{d}x = 1$$

Př. 239 *Vypočtěte limitu*

$$\lim_{y\to 0} \frac{1}{y} \int_z^x f(t+y) - f(t) \mathrm{d}t,$$

kde funkce $f(t)$ *je spojitá na intervalu* $[A, B]$, *a* $A < z < x < B$.

Nejdříve se musíme zorientovat v písmencích vyskytujících se v integrálu. Řešíme limitu vzhledem k y a integrál vzhledem k t. Proto nás meze integrálu nezajímají a bereme je jako konstanty. Funkce

$$h(t, y) = f(t+y) - f(t)$$

je spojitá pokud $t \in [A, B]$ a pokud je $t + y \in [A, B]$. Avšak zajímá nás y pouze blízko nule. Tudíž funkce $h(t, y)$ je spojitá na množině $[z, x] \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ pokud je $\varepsilon > 0$ dostatečně malé tak aby $A < z - \varepsilon < t + y < x + \varepsilon < B$. Můžeme tedy zaměnit pořadí integrace a limity čímž dostaneme

$$\lim_{y\to 0} \frac{1}{y} \int_z^x f(t+y) - f(t) \mathrm{d}t = \int_z^x \lim_{y\to 0} \frac{f(t+y) - f(t)}{y} \mathrm{d}t =$$
$$= \int_z^x f'(t) \mathrm{d}t = [f(t)]_z^x = f(x) - f(z)$$

Př. 240 *Nalezněte derivaci funkce*

$$G(y) = \int_0^2 \mathrm{e}^{-yx^2} \, \mathrm{d}x$$

pro $y \neq 0$.

Vidíme, že integrovaná funkce

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{-yx^2}$$

je spojitá na celém $\mathbb{R}^2$ a proto je spojitá i na libovolném vhodném obdélníku. Její parciální derivace je

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \mathrm{e}^{-yx^2} = -x^2 \, \mathrm{e}^{-yx^2}$$

a tato je také spojitá na libovolném vhodném obdélníku. Můžeme tedy zaměnit

$$G'(y) = \int_0^2 \frac{\partial}{\partial y} \mathrm{e}^{-yx^2} \, \mathrm{d}x = \int_0^2 -x^2 \, \mathrm{e}^{-yx^2} \, \mathrm{d}x$$

Tento integrál snadno neurčíme, necháme tedy derivaci v tomto tvaru.

Př. 241 *Nalezněte derivaci funkce*

$$G(y) = \int_0^1 \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) \mathrm{d}x$$

pro $y \neq 0$.

Vidíme, že funkce $\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$ je nespojitá v bodech $[x, 0]$. Její parciální derivace je

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{x}{y^2 + x^2}$$

a ta je nespojitá v počátku $[0, 0]$. Z integrálu máme danou první část obdélníku přes který integrujeme jako $A = [0, 1]$. Pro pevné $y > 0$ a $y < 0$ vždy nalezneme zbytek kompaktního interval na kterém budou $f(x, y)$ a $f_y(x, y)$ spojité. Máme tedy

$$G'(y) = -\int_0^1 \frac{x}{y^2 + x^2} \mathrm{d}x = -\left[\frac{1}{2} \ln|y^2 + x^2|\right]_0^1 = -\frac{1}{2} \ln|y^2 + 1| + \frac{1}{2} \ln|y^2| = \frac{1}{2} \ln \frac{y^2}{y^2 + 1}$$

Př. 242 *Nalezněte derivaci funkce*

$$G(y) = \int_1^2 \frac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1+x}} \mathrm{d}x$$

Vidíme, že integrovaná funkce

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}}$$

není spojitá v bodech $[0, y]$ a $[-1, y]$. Její parciální derivace je

$$f_y(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1+x}(1+x^2y^2)}$$

Tato je nespojitá pouze v bodech $[-1, y]$. Interval pro x máme daný jako $A = [1, 2]$. Na obdélníku $A \times \mathbb{R}$ jsou tak funkce f a f_y spojité a můžeme počítat

$$G'(y) = \int_1^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1+x}} \mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1+x}(1+x^2y^2)} \mathrm{d}x$$

Př. 243 *Nalezněte derivaci funkce*

$$G(y) = \int_0^1 \frac{\ln(1+xy)}{1+x^2+\ln y} \mathrm{d}x$$

pro $y > 1$.

Vidíme, že funkce

$$f(x,y) = \frac{\ln(1+x)}{1+x^2+\ln y}$$

není spojitá pouze pro $yx \leq -1$. Avšak vyšetřovaný obdélník má jednu stranu $A = [0,1]$. Navíc máme podmínku $y > 1$ a tedy nás toto omezení neovlivňuje. Ze zadaných podmínek je také jmenovatel vždy kladný. Parciální derivace je

$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\ln(1+xy)}{1+x^2+\ln y} = \frac{x}{(1+yx)(1+x^2+\ln y)} - \frac{\ln(1+xy)}{(1+x^2+\ln y)^2}$$

Vidíme, že parciální derivace není definována pouze v bodech $1+yx = 0$ avšak tímto také nejsme omezení. Máme tudíž

$$G'(y) = \int_0^1 \frac{x}{(1+yx)(1+x^2+\ln y)} - \frac{\ln(1+xy)}{(1+x^2+\ln y)^2} \mathrm{d}x$$

Př. 244 *Nalezněte derivaci funkce*

$$G(y) = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \mathrm{d}x,$$

kde $z > 0$.

Vidíme, že funkce

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$

je spojitá v libovolném bodě. Parciální derivace

$$f_y(x, y) = -\frac{2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

je také spojitá v každém bodě. Proto platí

$$G'(y) = -\int_0^1 \frac{2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \mathrm{d}x$$

Př. 245 *Nalezněte derivaci funkce*

$$G(y) = \int_0^1 \frac{\ln(z+x)}{z+x^2}\mathrm{d}x,$$

kde $z > 0$.

Vidíme, že funkce

$$f(x,y) = \frac{\ln(z+x)}{z+x^2}$$

není spojitá pouze pro $z + x \leq 0$ avšak vyšetřovaný obdélník je pro x omezen integrovaným rozsahem jako $A = [0,1]$. Neboť je navíc $z > 0$ tato podmínka nás nijak neomezí. Parciální derivace je

$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\ln(z+xy)}{z+x^2} = \frac{x}{(z+yx)(z+x^2)}$$

Vidíme, že parciální derivace není definována pouze v bodech $z+yx = 0$ avšak tímto také nejsme omezení. Máme tudíž

$$G'(y) = \int_0^1 \frac{x}{(z+yx)(z+x^2)}\mathrm{d}x$$

Př. 246 *Nalezněte derivaci funkce*

$$G(y) = \int_0^z x^2 + y^2 \mathrm{d}x,$$

pro $z > 0$.

Vidíme, že funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ je spojitá v každém bodě. Také parciální derivace $f_y(x, y) = 2y$ je spojitá v každém bodě. Proto platí

$$G'(y) = \int_0^z 2y \mathrm{d}x = 2y \left[x\right]_0^z = 2yz$$

Můžeme nyní také snadno určit

$$G(y) = y^2 z + C,$$

kde C je konstant. Víme, že platí

$$C = G(0) = \int_0^z x^2 + 0^2 \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^z = \frac{z^3}{3}$$

Proto máme

$$G(y) = y^2 z + \frac{z^3}{3}$$

Toto bychom však mohli získat rovnou integrováním původního integrálu.

Př. 247 *Vypočtěte hodnotu integrálu*

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

Integrál vypočteme pomocí parametrického integrálu

$$G(y) = \int_0^1 \frac{\ln(1+xy)}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

Pro $x \in [0,1]$ je integrovaná funkce

$$f(x,y) = \frac{\ln(1+xy)}{1+x^2}$$

spojitá na obdélníku $M = [0,1] \times [A,B]$, kde $-1 < A < B$. Navíc je parciální derivace daná jako

$$f_y(x,y) = \frac{x}{(1+xy)(1+x^2)}$$

spojitá na obdélníku M také. Proto máme

$$\begin{aligned}
G'(y) &= \int_0^1 \frac{x}{(1+xy)(1+x^2)}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{-y}{(y^2+1)(1+xy)} + \frac{x}{(1+y^2)(1+x^2)} + \frac{y}{(1+y^2)(1+x^2)}\mathrm{d}x = \\
&= \left[-\frac{1}{1+y^2}\ln(1+xy) + \frac{1}{2(1+y^2)}\ln(1+x^2) + \frac{y \operatorname{arctg} x}{1+y^2}\right]_0^1 = \\
&= -\frac{\ln(1+y)}{1+y^2} + \frac{\ln 2}{2(1+y^2)} + \frac{\pi y}{4(1+y^2)}
\end{aligned}$$

Integrací tohoto výrazu dostaneme

$$\begin{aligned}
G(y) &= -\int_0^y \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x + \left[\frac{\ln 2}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{8}\ln(1+x^2)\right]_0^y = \\
&= -\int_0^y \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x + \frac{\ln 2}{2}\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{8}\ln(1+y^2)
\end{aligned}$$

Druhé vyjádření pro funkci $G(y)$ je pak

$$G(y) = \int_0^1 \frac{\ln(1+xy)}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

Dohromady tak máme

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = G(1) = -\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x + \frac{\pi \ln 2}{8} + \frac{\pi \ln 2}{8}$$

Převedením na druhou stranu tak získáme

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\ln 2}{8}\pi$$

Př. 248 *Nalezněte derivaci funkce*

$$G(y) = \int_y^{y^2} \mathrm{e}^{-yx^2}\,\mathrm{d}x,$$

pro $y > 0$.

Všimneme si, že vystupující funkce $g(y) = y^2$, $h(y) = y$ a $f(x,y) = \mathrm{e}^{-yx^2}$ jsou všechny spojité na libovolném obdélníku. Také parciální derivace

$$f_y(x,y) = -x^2\,\mathrm{e}^{-yx^2}$$

je spojitá na libovolném obdélníku a derivace $g'(y)$, $h'(y)$ jsou spojité na libovolném intervalu. Proto můžeme dosadit do Leibnitzova vzorce čímž získáme

$$G'(y) = -\int_y^{y^2} x^2\,\mathrm{e}^{-yx^2}\,\mathrm{d}x + f(y^2,y)\cdot(y^2)' + f(y,y)\cdot(y)' = -\int_y^{y^2} x^2\,\mathrm{e}^{-yx^2}\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{e}^{-y^5} - \mathrm{e}^{-y^3}\cdot 1$$

Př. 249 *Nalezněte derivaci funkce*

$$G(y) = \int_{y^2}^{3y^2+1} \frac{\mathrm{e}^{xy}}{x} \mathrm{d}x,$$

pro $y > 0$.

Vidíme, že omezující funkce $g(y) = 3y^2+1$ a $h(y) = y^2$ jsou spojité a diferencovatelné. Integrovaná funkce

$$f(x, y) = \frac{\mathrm{e}^{xy}}{x}$$

je nespojitá v bodech $[0, y]$. Platí, že $h([a, b]) = [a^2, b^2]$ a $g[a, b] = [3a^2+1, 3b^2+1]$. Proto platí, že ohraničující funkce g, h zobrazují interval $[a, b]$ do intervalu $[a^2, 3b^2+1]$. Pokud $0 \notin [a, b]$ potom ani $0 \notin [a^2, 3b^2+1]$. Tudíž $f(x, y)$ je spojitá na obdélníku $M = [a^2, 3b^2+1] \times [a, b]$. Její parciální derivace je

$$f_y(x, y) = \mathrm{e}^{xy},$$

která je spojitá na libovolném obdélníku, tedy i na M. Můžeme tedy použít Leibnizův vzorec abychom získali

$$G'(y) = \int_{y^2}^{3y^2+1} \mathrm{e}^{xy}\, \mathrm{d}x + f(g(y), y)g'(y) - f(h(y), y)h'(y) = \int_{y^2}^{3y^2+1} \mathrm{e}^{xy}\, \mathrm{d}x + \frac{6y\,\mathrm{e}^{3y^3+y}}{3y^2+1} - \frac{2y\,\mathrm{e}^{y^3}}{y^2} =$$

$$= \left[\frac{\mathrm{e}^{xy}}{y}\right]_{y^2}^{3y^2+1} + \frac{6y\,\mathrm{e}^{3y^3+y}}{3y^2+1} - \frac{2\,\mathrm{e}^{y^3}}{y} = \left[\frac{\mathrm{e}^{3y^3+y} - \mathrm{e}^{y^3}}{y}\right]_{y^2}^{3y^2+1} + \frac{6y\,\mathrm{e}^{3y^3+y}}{3y^2+1} - \frac{2\,\mathrm{e}^{y^3}}{y}$$

Př. 250 *Nalezněte derivaci funkce*

$$G(y) = \int_{\ln y}^{y} \sqrt{x^2 + y^2} \mathrm{d}x,$$

pro $y > 0$.

Vidíme, že integrovaná funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ je spojitá v každém bodě stejně jako horní ohraničení $g(y) = y$. Toto ohraničení je také diferencovatelné. Parciální derivace

$$f_y(x, y) = \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

není spojitá pouze v bodě $[0, 0]$. Dolní ohraničení $h(y) = \ln y$ je diferencovatelná pro $y > 0$. Vezmeme-li interval $[a, b]$ pro $0 < a < b$ pak $g([a, b]) = [a, b]$ a $h([a, b]) \subset [-K, K]$ pro K dostatečně velké. Poté jsou f a f_y na obdélníku $M = [-K, K] \times [a, b]$ spojité. Vidíme, že počátek v M nikdy neleží. Můžeme zde tedy využít Leibnizův vzorec abychom dostali derivace na intervalu $[a, b]$ jako

$$G'(y) = \int_{\ln y}^{y} \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathrm{d}x + \sqrt{2y^2} - \frac{\sqrt{\ln^2 y + y^2}}{y}.$$

Neboť jsou $b > a > 0$ libovolné, platí tento vzorec pro libovolné $y > 0$.

Př. 251 *Nalezněte derivaci funkce*

$$G(y)=\int_{2y-1}^{\operatorname{sgn} y} x^2+y^2\mathrm{d}x.$$

Vidíme, že dolní ohraničení $h(y)=2y-1$ stejně jako integrovaná funkce $f(x,y)=x^2+y^2$ jsou spojité a mají spojité i (parciální) derivace. Dolní ohraničení zobrazuje libovolný uzavřený interval $[a,b]$ na interval $[2a-1,2b-1]$. Komplikaci v tomto příkladě představuje horní ohraničení $g(y)=\operatorname{sgn} y$, které je spojité a diferencovatelné všude kromě bodu $y=0$. Uvážíme-li tedy $y>0$ zobrazuje g libovolný interval $[a,b]$, kde $0<a<b$ na bod $\{1\}$. Dostaneme tak obdélník $[2a-1,2b-1]\times[a,b]$, kde jsou předpoklady věty splněny a máme

$$G'(y)=\int_{2y-1}^{\operatorname{sgn} y} 2y\mathrm{d}x+(\operatorname{sgn}^2 y+y^2)\cdot 0-2(2y-1)^2-2y^2=\left[y^2\right]_{2y-1}^{\operatorname{sgn} y}-2(2y-1)^2-2y^2$$

Tento vzorec však platí pouze pro $y>0$. Obdobně lze odvodit vzorec pro $y<0$. Avšak obdobně můžeme derivaci získat skrze vyjádření

$$G(y)=\left[\frac{x^3}{3}+xy^2\right]_{2y-1}^{\operatorname{sgn} y}=\frac{\operatorname{sgn}^3 y}{3}+y^2\operatorname{sgn} y-\frac{(2y-1)^3}{3}-(2y-1)y^2,$$

které zderivujeme.

Př. 252 *Nalezněte derivaci funkce*

$$G(y) = \int_{\sin y}^{\cos y} \mathrm{e}^{y\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x,$$

pro $y > 0$.

Dolní a horní ohraničení $g(y) = \cos y$, $h(y) = \sin y$ jsou spojité a diferencovatelné funkce. Stejně tak integrovaná funkce $f(x,y) = \mathrm{e}^{y\sqrt{1-x^2}}$ je spojitá pokud $x^2 \leq 1$. Její parciální derivace je

$$f_y(x,y) = \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{e}^{y\sqrt{1-x^2}},$$

která je také spojitá pokud $x^2 \leq 1$. Neboť ohraničení g, h zobrazují libovolný interval $[a,b]$ do intervalu $[-1,1]$ jsou f a f_y spojité na libovolném obdélníku $M = [-1,1] \times [a,b]$. Proto můžeme využít Leibnizovu formuli

$$G'(y) = \int_{\sin y}^{\cos y} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{e}^{y\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + -\,\mathrm{e}^{y\sqrt{1-\cos^2 y}}\sin y - \mathrm{e}^{y\sqrt{1-\sin^2 y}\cos y}$$

Př. 253 *Nalezněte derivaci funkce*

$$G(y) = \int_{A+y}^{B+y} \frac{\sin yx}{x} \mathrm{d}x,$$

pro $y > 0$.

Vidíme, že horní a dolní ohraničení $g(y) = B + y$, $h(y) = A + y$ jsou spojité a diferencovatelné. Integrovaná funkce

$$f(x, y) = \frac{\sin yx}{x}$$

je nespojitá v bodech $[0, y]$ a její parciální derivace

$$f_y(x, y) = \cos yx$$

je spojitá v každém bodě. Ohraničení g, h zobrazují libovolný interval $[c, d]$ na intervaly $[A + c, A + d]$ a $[B + c, B + d]$. Tedy dohromady do intervalu $[A + c, B + d]$. Dostáváme tak obdélník $[A + c, B + d] \times [c, d]$. Můžeme však využít Leibnizův vzorec jen v bodech, kde $0 \notin [A + c, B + d]$. Poté máme

$$\begin{aligned}
G'(y) &= \int_{A+y}^{B+y} \cos yx \mathrm{d}x + \frac{\sin(By + y^2)}{B + y} - \frac{\sin(Ay + y^2)}{A + y} = \\
&= \left[\frac{\sin yx}{y}\right]_{A+y}^{B+y} + \frac{\sin(By + y^2)}{B + y} - \frac{\sin(Ay + y^2)}{A + y} = \\
&= \frac{\sin(By + y^2)}{y} - \frac{\sin(Ay + y^2)}{y} + \frac{\sin(By + y^2)}{B + y} - \frac{\sin(Ay + y^2)}{A + y} = \\
&= \frac{\sin(By + y^2)}{y} - \frac{\sin(Ay + y^2)}{y} + \frac{\sin(By + y^2)}{B + y} - \frac{\sin(Ay + y^2)}{A + y} =
\end{aligned}$$

Př. 254 *Nalezněte derivaci funkce*

$$G(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+yx)}{x} \mathrm{d}x,$$

pro $y > 0$.

Vidíme, že dolní a horní ohraničení $g(y) = y$ a $h(y) = 0$ jsou spojité a diferencovatelné. Integrovaná funkce

$$f(x,y) = \frac{\ln(1+yx)}{x}$$

je nespojitá v bodech $[0, y]$ a pokud $1 + yx \leq 0$. Parciální derivace

$$f_y(x,y) = \frac{1}{1+yx}$$

je nespojitá pro $1+yx \neq 0$. Zvolíme-li libovolný interval $[c, d]$, kde $0 < c < d$. Ohraničení zobrazují tento interval do intervalu $[0, d]$. Avšak tyto narážejí na situaci, kdy je funkce f nespojitá. Rozdělíme tedy funkci $G(y)$ pro nějaké $\varepsilon > 0$ na

$$G(y) = \int_0^\varepsilon \frac{\ln(1+yx)}{x} \mathrm{d}x + \int_\varepsilon^y \frac{\ln(1+yx)}{x} \mathrm{d}x,$$

Tyto dvě části vyšetříme zvlášť. První integrál má konstantní hranice a na množině $[0, \varepsilon] \times [c, d]$ jsou nyní funkce f a f_y spojité. Druhý integrál analyzujeme stejným způsobem jako v první části, tentokrát jsou však funkce f a f_y na vyšetřované množině $[\varepsilon, d] \times [c, d]$ spojité a můžeme použít Leibnizovu formuli. Dostáváme

$$\begin{aligned} G'(y) &= \int_0^\varepsilon \frac{1}{1+yx} \mathrm{d}x + \int_\varepsilon^y \frac{1}{1+yx} \mathrm{d}x + \frac{\ln(1+y^2)}{y} - \frac{\ln(1+\varepsilon y)}{\varepsilon} \cdot 0 = \\ &= \left[\frac{\ln(1+yx)}{y} \right]_0^y + \frac{\ln(1+y^2)}{y} = \frac{2\ln(1+y^2)}{y} \end{aligned}$$

Př. 255 *Nalezněte derivaci funkce*

$$G(y) = \int_0^{y^2} \mathrm{d}x \int_{x-y}^{x+y} \sin\left(x^2 + z^2 - y^2\right) \mathrm{d}z,$$

pro $y > 0$.

Vidíme, že funkce $G(y)$ je součinem dvou funkcí $G(y) = K(y) \cdot L(y)$, kde

$$\begin{aligned} K(y) &= \int_0^{y^2} \mathrm{d}x, \\ L(y) &= \int_{x-y}^{x+y} \sin\left(x^2 + z^2 - y^2\right) \mathrm{d}z \end{aligned}$$

Musíme tedy nalézt derivace těchto funkcí, načež využijeme obvyklou Leibnizovu formuli $G' = K' \cdot L + K \cdot L'$.

1. Nalezneme derivaci $K'(y)$. Integrovaná funkce $f(x, y) = 1$ je spojitá na libovolném obdélníku a horní a dolní ohraničení jsou spojité a diferencovatelné. Dostaneme

   $$K'(y) = \int_0^{y^2} 0\mathrm{d}x + 1 \cdot 2y - 1 \cdot 0 = 2y$$

   Toto vidíme rovnou, pokud zintegrujeme $K(y) = \int_0^{y^2} \mathrm{d}x = y^2$ a následně vše zderivujeme.

2. Nalezneme derivaci $L'(y)$. Integrovaná funkce je spojitá, má spojité parciální derivace, stejně tak ohraničení integrálu jsou spojité a diferencovatelné. Můžeme tedy použít Leibnizovu formuli, abychom dostali

$$\begin{aligned} L'(y) &= -\int_{x-y}^{x+y} 2y \cos\left(x^2 + z^2 - y^2\right) \mathrm{d}z + \sin\left(x^2 + z^2 - (x+y)^2\right) - \sin\left(x^2 + z^2 - (x-y)^2\right) = \\ &= -2\int_{x-y}^{x+y} y \cos\left(x^2 + z^2 - y^2\right) \mathrm{d}z + \sin\left(z^2 - 2xy - y^2\right) - \sin\left(z^2 + 2xy - y^2\right) \end{aligned}$$

Finální derivaci dostaneme jejich kombinací.

Př. 256 *Nalezněte $n-$tou derivaci $G^{(n)}(y)$ funkce*

$$G(y) = \int_0^y (x+y)f(x)\mathrm{d}x,$$

kde funkce $f(x)$ má všechny derivace spojité.

Vidíme, že ohraničující funkce jsou spojité a diferencovatelné. Stejně tak integrovaná funkce $g(x,y) = (x+y)f(x)$ je spojitá na libovolném obdélníku a její parciální derivace je

$$g_y(x,y) = f(x),$$

která je také spojitá na libovolném obdélníku. Můžeme tak použít Leibnizovu formuli abychom dostali

$$G'(y) = \int_0^y f(x)\mathrm{d}x + g(y,y)\cdot 1 - g(0,y)\cdot 0 = yf(x) + 2yf(y) = 3yf(y)$$

Budeme-li nyní derivovat $G'(y)$ dále, dostaneme obecnou derivaci jako

$$(G'(y))^{(n)} = 3\left(nf^{(n-1)}(y) + yf^{(n)}(y)\right)$$

Chceme-li tak přesně $n-$tou derivaci, dostaneme snadno ze vzorce

$$G^{(n)}(y) = 3\left((n-1)f^{(n-2)}(y) + yf^{(n-1)}(y)\right)$$

Př. 257 *Nalezněte $n-$tou derivaci $G^{(n)}(y)$ funkce*

$$G(y) = \int_0^y f(x)(y-x)^{n-1}\mathrm{d}x,$$

kde funkce $f(x)$ má všechny derivace spojité.

Vidíme, že ohraničující funkce jsou spojité a diferencovatelné. Stejně tak integrovaná funkce $g(x, y) = f(x)(y-x)^{n-1}$ je spojitá na libovolném obdélníku a její parciální derivace je pro $n > 1$

$$g_y(x, y) = (n-1)f(x)(y-x)^{n-2},$$

dostaneme tak derivaci z Leibnizova vzorce

$$\begin{aligned} G'(y) &= \int_0^y (n-1)f(x)(y-x)^{n-2}\mathrm{d}x + f(y)(y-y)^{n-1}\cdot 1 - f(0)(y-0)^{n-1}\cdot 0 = \\ &= (n-1)\int_0^y f(x)(y-x)^{n-2}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Je-li však $n = 1$ máme naopak $g(x, y) = f(x)$, a proto je $g_y(x, y) = 0$ a

$$G'(y) = \int_0^y 0\mathrm{d}x + g(y, y)\cdot 1 - g(0, y)\cdot 0 = f(y)$$

Podobně lze získat druhou derivaci pokud platí $n > 2$ jako

$$\begin{aligned} G''(y) &= (n-1)(n-2)\int_0^y f(x)(y-x)^{n-3}\mathrm{d}x + (n-1)f(y)(y-y)^{n-2}\cdot 1 - (n-1)f(0)(y-0)^{n-2}\cdot 0\mathrm{d}x = \\ &= (n-1)(n-2)\int_0^y f(x)(y-x)^{n-3}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Avšak je-li zase $n = 2$ máme očividně $g'(x, y) := (n-1)f(x)(y-x)^{n-2} = f(x)$ a znovu dostáváme

$$G''(y) = \int_0^y 0\mathrm{d}x + g'(y, y)\cdot 1 - g'(0, y)\cdot 0 = f(y)$$

Vidíme, že pro obecné n je

$$G^{(n-1)} = (n-1)(n-2)\dots 1\int_0^y f(x)(y-x)^{n-1-(n-1)}\mathrm{d}x = (n-1)!\int_0^y f(x)\mathrm{d}x$$

Následně je $g^{(n-1)}(x, y) = f(x)$, a tudíž

$$G^{(n)} = (n-1)!\int_0^y 0\mathrm{d}x + (n-1)!f(y) - (n-1)!f(0)\cdot 0 = (n-1)!f(y)$$

Př. 258 *Vypočtěte integrál*

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

pomocí vztahu

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2y^2}\mathrm{d}y$$

Převedeme vyšetřovaný integrál podle zadané rovnosti do tvaru

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^1\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Zaměníme pořadí integračních proměnných a dostaneme integrál

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left| \begin{array}{c} x=\sin t \\ dx = \cos t\mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^1\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{(1+y^2\sin^2 t)\sqrt{1-\sin^2 t}}\mathrm{d}t\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1+y^2\sin^2 t)}\mathrm{d}t\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^1\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(\cos^2 t+(y^2+1)\sin^2 t)}\mathrm{d}t\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1+(y^2+1)\operatorname{tg}^2 t)}\frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t\mathrm{d}y =$$

$$= \left| \begin{array}{c} s=\operatorname{tg} t \\ ds = \frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int_0^1\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+(y^2+1)s^2)}\mathrm{d}s\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{1+y^2}s)}{\sqrt{1+y^2}}\right]_0^{\infty}\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}} - 0\mathrm{d}y =$$

$$= \left| \begin{array}{c} y=\sinh u \\ \mathrm{d}y = \cosh u\mathrm{d}u \\ \sinh 0 = \frac{\mathrm{e}^0-\mathrm{e}^{-0}}{2} = 0 \\ \sinh 0 = \frac{\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1}}{2} \end{array} \right| = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1}}{2}} \frac{\cosh u}{\sqrt{1+\sinh^2 u}}\mathrm{d}u = |\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1| =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1}}{2}} \frac{\cosh u}{\sqrt{\cosh^2 u}}\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1}}{2}} 1\mathrm{d}u = [u]_0^{\frac{\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1}}{2}} = \frac{\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1}}{2}$$

Př. 259 *Vypočtěte integrál derivováním podle proměnné y*

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2y\cos x + y^2)\mathrm{d}x$$

Nejprve se podíváme na situaci, kdy je integrovaná funkce $f(x, y) = \ln(1-2y\cos x+y^2)$ nespojitá. Chceme tedy vyřešit nerovnost $1 - 2y\cos x + y^2 < 0$ vzhledem k y, když víme, že $x \in [0, \pi]$. Determinant polynomu je

$$D = 4\cos^2 x - 4 = -4\sin^2 x$$

Avšak pro $x \in [0, \pi]$ je nutně $D \leq 0$. V případě $x = 0$ nebo $x = \pi$ dostáváme funkce $\ln(1 \pm y)^2$. Uvážíme tedy nejprve situaci na intervalu $y \in (-1, 1)$ čímž vidíme, že na obdélnících $[0, \pi] \times [c, d]$, kde $-1 < c < d < 1$ je $f(x, y)$ spojitá. Parciální derivace

$$f_y(x, y) = \frac{2y - 2\cos x}{1 - 2y\cos x + y^2}$$

je zde pak také spojitá. Derivujeme tedy

$$\begin{aligned}
F'(y) &= \int_0^\pi \frac{2y - 2\cos x}{1 - 2y\cos x + y^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{y}\int_0^\pi \frac{1 + y^2 - 2y\cos x + y^2 - 1}{1 - 2y\cos x + y^2}\mathrm{d}x = \\
&= \frac{\pi}{y} - \frac{y^2 - 1}{y}\int_0^\pi \frac{1}{y^2 + 1 - 2y\cos x}\mathrm{d}x = |\text{ univerzální substituce }| = \\
&= \frac{\pi}{y} - \frac{y^2 - 1}{y}\int_0^\infty \frac{1}{y^2 + 1 - 2y\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1 + t^2}\mathrm{d}t = \\
&= \frac{\pi}{y} - \frac{y^2 - 1}{y}\int_0^\infty \frac{2}{(y^2 + 1)(t^2 + 1) + y^2t^2 + 1 - 2y + 2yt^2}\mathrm{d}t = \\
&= \frac{\pi}{y} - \frac{y^2 - 1}{y}\int_0^\infty \frac{2}{t^2(y + 1)^2 + (y - 1)^2}\mathrm{d}t = \\
&= \frac{\pi}{y} - 2\frac{y^2 - 1}{y}\left[\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{y+1}{y-1}t\right)}{(y - 1)(y + 1)}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{y} - \frac{2}{y}\frac{\pi}{2} = 0
\end{aligned}$$

Vidíme tedy, že $F(y) = C$ je konstantní. Dosadíme-li do funkce

$$C = F(0) = \int_0^\pi \ln(1 - 2y\cos x + y^2)\mathrm{d}x = \int_0^\pi \ln 1\mathrm{d}x = \int_0^\pi 0\mathrm{d}x = 0$$

Proto platí, že $F(y) = 0$ pro $y \in (-1, 1)$. Pro $y > 1$ nebo $y < -1$ dostaneme stejnou situaci, neboť $F'(y)$ vyjde stejně.

Př. 260 *Pomocí záměny pořadí integrace spočtěte integrál*

$$\int_0^1 \frac{x^B - x^A}{\ln x} \mathrm{d}x$$

Všimneme si vztahu

$$\frac{x^B - x^A}{\ln x} = \left[\frac{x^y}{\ln x}\right]_A^B = \int_A^B x^y \mathrm{d}y$$

a dosadíme jej do vzorce abychom dostali

$$\int_0^1 \frac{x^B - x^A}{\ln x} = \int_0^1 \int_A^B x^y \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_A^B \int_0^1 x^y \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$
$$= \int_A^B \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_0^1 \mathrm{d}y = \int_A^B \frac{1}{y+1} \mathrm{d}y = [\ln|y+1|]_A^B =$$
$$= \ln|B+1| - \ln|A+1|$$

Př. 261 *Vypočtěte integrál*

$$\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^B - x^A}{\ln x}\mathrm{d}x$$

Všimneme si vztahu

$$\frac{x^B - x^A}{\ln x} = \left[\frac{x^y}{\ln x}\right]_A^B = \int_A^B x^y \mathrm{d}y$$

Dostaneme dosazením

$$\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\int_A^B x^y \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_A^B\int_0^1)x^y \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left|\begin{array}{c} x = \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{d}x = -\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \end{array}\right| =$$
$$= -\int_A^B\int_\infty^0 \mathrm{e}^{-ty}\sin t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}y = \int_A^B\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t(y+1)}\sin t\mathrm{d}t\mathrm{d}y = |\text{2x per partes}| =$$
$$= \int_A^B \frac{1}{(y+1)^2} - \frac{1}{(y+1)^2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t(y+1)}\sin t\mathrm{d}t\mathrm{d}y$$

Proto máme dohromady, že

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t(y+1)}\sin t\mathrm{d}t = \frac{1}{(y+1)^2}\frac{(y+1)^2}{(y+1)^2+1} = \frac{1}{(y+1)^2+1}$$

Tudíž samozřejmě máme

$$\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^B - x^A}{\ln x}\mathrm{d}x = \int_A^B \frac{1}{(y+1)^2+1}\mathrm{d}y = [\operatorname{arctg}(y+1)]_A^B =$$
$$= \operatorname{arctg}(B+1) - \operatorname{arctg}(A+1) = \operatorname{arctg}\frac{B-A}{1+(A+1)(B+1)}$$

Př. 262 *Vyjádřete $E''(y)$ funkce*

$$E(y) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - y^2 \sin^2 x} \mathrm{d}x,$$

pro $y \in (0,1)$

Vidíme, že za podmínky $y \in (0,1)$ je integrovaná funkce $f(x,y) = \sqrt{1 - y^2 \sin^2 x}$ spojitá. Její parciální derivace je

$$f_y(x,y) = -\frac{y \sin^2 x}{\sqrt{1 - y^2 \sin^2 x}}$$

Opět z podmínky $y \in (0,1)$ plyne, že i tato derivace je spojitá. Rovnou spočítáme i druhou derivaci

$$f_{yy}(x,y) = -\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1 - y^2 \sin^2 x}} - \frac{y^2 \sin^4 x}{\sqrt{\left(1 - y^2 \sin^2 x\right)^3}} = \frac{-\sin^2 x(1 - y^2 \sin^2 x) - y^2 \sin^4 x}{\sqrt{\left(1 - y^2 \sin^2 x\right)^3}} =$$
$$= -\frac{\sin^2 x}{\sqrt{\left(1 - y^2 \sin^2 x\right)^3}}$$

I tato parciální derivace je za podmínky $y \in (0,1)$ spojitá. Můžeme tedy zaměnit pořadí integrace a derivace a máme

$$E'(y) = -\int_0^{\pi/2} \frac{y \sin^2 x}{\sqrt{1 - y^2 \sin^2 x}} \mathrm{d}x,$$
$$E''(y) = -\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{\left(1 - y^2 \sin^2 x\right)^3}} \mathrm{d}x.$$

Př. 263 *Vyjádřete $F''(y)$ funkce*

$$F(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - y^2 \sin^2 x}} \mathrm{d}x$$

pro $y \in (0, 1)$

Vidíme, že za podmínky $y \in (0,1)$ je integrovaná funkce $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2\sin^2 x}}$ spojitá. Její parciální derivace je

$$f_y(x,y) = \frac{y \sin^2 x}{\sqrt{\left(1 - y^2 \sin^2 x\right)^3}}$$

Opět z podmínky $y \in (0,1)$ plyne, že i tato derivace je spojitá. Rovnou spočítáme i druhou derivaci

$$\begin{aligned} f_{yy}(x,y) &= \frac{\sin^2 x}{\sqrt{\left(1 - y^2 \sin^2 x\right)^3}} + \frac{3y^2 \sin^4 x}{\sqrt{\left(1 - y^2 \sin^2 x\right)^5}} = \\ &= \frac{\sin^2 x \left(1 - y^2 \sin^2 x\right) + 3y^2 \sin^4 x}{\sqrt{\left(1 - y^2 \sin^2 x\right)^5}} = \frac{\sin^2 x - y^2 \sin^4 x + 3y^2 \sin^4 x}{\sqrt{\left(1 - y^2 \sin^2 x\right)^5}} = \\ &= \frac{\sin^2 x + 2y^2 \sin^4 x}{\sqrt{\left(1 - y^2 \sin^2 x\right)^5}} \end{aligned}$$

I tato parciální derivace je za podmínky $y \in (0,1)$ spojitá. Můžeme tedy zaměnit pořadí integrace a derivace a máme

$$\begin{aligned} F'(y) &= \int_0^{\pi/2} \frac{y \sin^2 x}{\sqrt{\left(1 - y^2 \sin^2 x\right)^3}} \mathrm{d}x, \\ F''(y) &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x + 2y^2 \sin^4 x}{\sqrt{\left(1 - y^2 \sin^2 x\right)^5}} \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Př. 264 *Ukažte, že funkce*

$$E(y) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - y^2 \sin^2 x} \mathrm{d}x$$
$$F(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - y^2 \sin^2 x}} \mathrm{d}x$$

splňují vztahy

$$E'(y) = \frac{E(y) - F(y)}{y}$$
$$E''(y) = -\frac{F'(y)}{y}$$

V předchozím příkladě jsme již spočetli $E'(y)$ a $E''(y)$. Počítáme

$$\frac{E(y) - F(y)}{y} = \frac{1}{y} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - y^2 \sin^2 x} - \frac{1}{\sqrt{1 - y^2 \sin^2 x}} \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{y} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - y^2 \sin^2 x - 1}{\sqrt{1 - y^2 \sin^2 x}} \mathrm{d}x = - \int_0^{\pi/2} \frac{y \sin^2 x}{\sqrt{1 - y^2 \sin^2 x}} \mathrm{d}x = E'(y)$$

Derivací tohoto vztahu a jeho opětovným využitím dostaneme

$$E''(y) = \frac{(E'(y) - F'(y))y - (E(y) - F(y))}{y^2} = \frac{yE'(y) - yF'(y) - yE'(y)}{y^2} = -\frac{yF'(y)}{y^2} = -\frac{F'(y)}{y}$$

Př. 265 *Ukažte, že funkce $E(y), F(y)$ splňují*

$$(1-y^2)F' = E' + yF$$

Využijte k tomuto vztahů

$$F(y) = \frac{\pi}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\left[\frac{(2i-1)!!}{2^i i!}\right]^2 y^{2i},$$
$$E(y) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{(2i-1)!!}{2^i i!}\right]^2 \frac{y^{2i}}{2i-1}.$$

Začneme nalezením poloměru konvergence což dostaneme nalezením limity pro řadu $F(y)$ jako

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2i+1)!!}{2^{i+1}(i+1)!}\right]^2\left[\frac{2^i i!}{(2i-1)!!}\right]^2 =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(2i+1)^2}{4(i+1)^2} = 1.$$

Tedy poloměr konvergence je $R = 1$. Obdobný výsledek bychom dostali pro řadu $E(y)$. Můžeme tedy na oboru konvergence zaměnit pořadí derivace a sumace. Také využijeme faktu, že na jeho vnitřku řada konverguje absolutně. Dostáváme

$$E'(y) + yF(y) = \frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{(2i-1)!!}{2^i i!}\right]^2\frac{2iy^{2i-1}}{2i-1} + \frac{\pi}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\left[\frac{(2i-1)!!}{2^i i!}\right]^2 y^{2i+1} =$$
$$= -\frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{(2i-1)!!}{2^i i!}\right]^2\frac{2iy^{2i-1}}{2i-1} + \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(2k-3)!!}{2^{k-1}(k-1)!}\right]^2 y^{2k-1} =$$
$$= -\frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{(2i-1)!!}{2^i i!}\right]^2\left(-\frac{2i}{2i-1} + \frac{4i^2}{(2i-1)^2}\right)y^{2i-1} =$$
$$= \frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{(2i-1)!!}{2^i i!}\right]^2\left(\frac{-2i(2i-1)+4i^2}{(2i-1)^2}\right)y^{2i-1} =$$
$$= \frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{(2i-1)!!}{2^i i!}\right]^2\left(\frac{2i}{(2i-1)^2}\right)y^{2i-1}$$

Druhou stranu rovnosti můžeme rozepsat jako

$$
\begin{aligned}
(1-y^2)F'(y) &= \frac{\pi}{2}(1-y^2)\sum_{i=1}^{\infty} 2i\left[\frac{(2i-1)!!}{2^i i!}\right]^2 y^{2i-1} = \\
&= \frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{\infty} 2i\left[\frac{(2i-1)!!}{2^i i!}\right]^2 y^{2i-1} - \frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{\infty} 2i\left[\frac{(2i-1)!!}{2^i i!}\right]^2 y^{2i+1} = \\
&= \frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{\infty} 2i\left[\frac{(2i-1)!!}{2^i i!}\right]^2 y^{2i-1} - \frac{\pi}{2}\sum_{i=2}^{\infty} 2(k-1)\left[\frac{(2k-3)!!}{2^{k-1}(k-1)!}\right]^2 y^{2k-1} = \\
&= \frac{\pi}{2}\frac{2}{4}y + \frac{\pi}{2}\sum_{i=2}^{\infty}\left(2i - \frac{8i^2(i-1)}{(2i-1)^2}\right)\left[\frac{(2i-1)!!}{2^i i!}\right]^2 y^{2i-1} = \\
&= \frac{\pi}{4}y + \frac{\pi}{2}\sum_{i=2}^{\infty}\frac{2i(4i^2-4i+1)-2i(4i^2-4i)}{(2i-1)^2}\left[\frac{(2i-1)!!}{2^i i!}\right]^2 y^{2i-1} = \\
&= \frac{\pi}{4}y + \frac{\pi}{2}\sum_{i=2}^{\infty}\frac{2i}{(2i-1)^2}\left[\frac{(2i-1)!!}{2^i i!}\right]^2 y^{2i-1} = \\
&= \frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2i}{(2i-1)^2}\left[\frac{(2i-1)!!}{2^i i!}\right]^2 y^{2i-1}
\end{aligned}
$$

Neboť se obě strany rovnají, vidíme, že výraz platí. Spolu s využitím předchozího můžeme dále ukázat, že

$$F' = \frac{\frac{E-F}{y} + yF}{1-y^2} = \frac{E-F+y^2F}{y(1-y^2)} = \frac{E-(1-y^2)F}{y(1-y^2)}.$$

Př. 266 *Ukažte, že $E(y)$ řeší rovnici*

$$E''(y) + \frac{1}{y}E'(y) + \frac{E(y)}{1-y^2} = 0,$$

pro $y \in (0,1)$.

S využitím předchozích vzorců můžeme dostat, že

$$\begin{aligned} E'' &= -\frac{F'}{y} \\ E' &= \frac{E-F}{y} \\ F' &= \frac{E+(y^2-1)F}{y(1-y^2)} \end{aligned}$$

Dosazujeme tedy postupně do rovnice

$$\begin{aligned} &E''(y) + \frac{1}{y}E'(y) + \frac{E(y)}{1-y^2} = -\frac{F'}{y} + \frac{E-F}{y^2} + \frac{E}{1-y^2} = \\ &= -\frac{E+(y^2-1)F}{y^2(1-y^2)} + \frac{E-F}{y^2} + \frac{E}{1-y^2} = \frac{-E-(y^2-1)F+(E-F)(1-y^2)+Ey^2}{y^2(1-y^2)} = \\ &= \frac{-E-y^2F+F+E-F-y^2E+y^2F+Ey^2}{y^2(1-y^2)} = 0 \end{aligned}$$

Př. 267 *Ukažte, že $F(y)$ řeší rovnici*

$$\big(y(1-y^2)F'(y)\big)' - yF(y) = 0,$$

pro $y \in (0,1)$.

I tentokrát využijeme vztahů

$$\begin{aligned} E'' &= -\frac{F'}{y} \\ E' &= \frac{E-F}{y} \\ F' &= \frac{E+(y^2-1)F}{y(1-y^2)} \end{aligned}$$

Dostaneme postupně

$$\begin{aligned} &\big(y(1-y^2)F'(y)\big)' - yF(y) = \big(E+(y^2-1)F\big)' - yF(y) = E' + 2yF + (y^2-1)F' - yF = \\ &= \frac{E-F}{y} + 2yF - \frac{E+(y^2-1)F}{y} - yF = \frac{E-F-E-(y^2-1)F+y^2F}{y} = 0 \end{aligned}$$

Př. 268 *Ukažte, že platí*

$$\int_0^y tF(t)\mathrm{d}t = E(y) - (1-y^2)F(y),$$

pro $y \in (0,1)$.

Celou rovnici nejprve zderivujeme čímž dostaneme

$$yF(y) = E'(y) + 2yF(y) + (y^2-1)F'(y).$$

Využijeme-li však vztahu

$$(1-y^2)F' = E' + yF$$

dostaneme

$$E' + 2yF + (y^2-1)F' = E' + 2yF - E' - yF = yF.$$

Zintegrujeme-li tedy tento výraz znovu, dostaneme hledaný integrál.

Další rovnosti vztahující se k Eliptickým integrálům můžete nalézt v knize [**?**].

Př. 269 *Nalezněte extrémy parametrického integrálu*

$$\int_a^x \sin t \mathrm{d}t$$

pro $x \in [a, \infty)$.

K nalezení extrémů funkce obvykle využíváme derivace a stacionární body. Budeme tedy chtít derivovat funkci

$$F(x) = \int_a^x \sin t \mathrm{d}t.$$

Snadno si rozmyslíme, že vzhledem ke spojitosti vystupujících funkcí můžeme snadno derivovat $F(x)$ vzorcem

$$F'(x) = \int_a^x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin t \mathrm{d}t + \sin x \cdot (x)' - \sin a (a)' = sinx$$

Hledáme-li tedy stacionární body dostaneme je na množině $k\pi$, pro $k \in \mathbb{Z}$. Zdali se skutečně jedná o extrémy můžeme ověřit pomocí druhých derivací

$$F''(x) = \cos x$$

Vidíme tedy jasně, že v bodech $2k\pi > a$ má funkce lokální maximum a pro $\pi + 2k\pi > a$ má funkce lokální minimum. Navíc Si snadno rozmyslíme, že se nejedná o globální maximum.

Př. 270 *Nalezněte extrémy parametrického integrálu*

$$\int_0^{x^2} 2tx - \sqrt{t}\mathrm{d}t$$

pro $x \in [0, \infty)$.

Opět vidíme, že chceme derivovat funkci

$$F(x) = \int_0^{x^2} 2tx + \sqrt{t}\mathrm{d}t$$

Vidíme, že integrovaná funkce $2tx + \sqrt{t}$ je spojitá na množině $[0, \infty) \times \mathbb{R}$. Navíc pro libovolné

$$x \in (0, \sqrt{b}) \text{ platí } 0 < g(x) < b,$$

kde $g(x) = x^2$. Vzhledem k libovolnosti b můžeme tedy nalézt derivaci na intervalu $(0, \infty)$. Máme ze vzorce

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^{x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2tx - \sqrt{t}\right)\mathrm{d}t + \left(2x^3 - \sqrt{x^2}\right)\left(x^2\right)' - \left(2 \cdot 0 \cdot x - \sqrt{0}\right)(0)' = \\ &= \int_0^{x^2} 2t\mathrm{d}t + 4x^4 - 2x^2 = \left[t^2\right]_0^{x^2} + 4x^4 - 2x^2 = x^4 + 4x^4 - 2x^2 = 5x^4 - 2x^2 \end{aligned}$$

Nyní budeme chtít nalézt stacionární body tohoto výrazu

$$x^2\left(5x^2 - 2\right) = 0$$

Vidíme, že stacionární body se nacházejí v bodech

$$0, \ \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

Avšak nula je na okraji vyšetřovaného intervalu a chceme jen záporné hodnoty. Zajímá nás tedy pouze jeden stacionární bod. Nalezneme druhou derivaci

$$F''(x) = 20x^3 - 4x$$

a dosadíme

$$F''\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right) = 20\frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{5}} - 4\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = 8\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{5}} - 4\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = 4\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} > 0$$

Jedná se tedy o lokální minimum. Vzhledem ke znaménku $F'(x)$ si také můžeme uvědomit, že se na intervalu $[0, \infty)$ jedná o globální minimum. Dále si můžeme všimnout, že

$$F(0) = \int_0^0 \sqrt{t}\mathrm{d}t = 0.$$

Zde se jedná o lokální maximum, neboť vzhledem ke tvaru funkce $F'(x)$ vidíme, že následně funkce klesá.

Př. 271 *Nalezněte tečnu ke křivce funkce*

$$F(x) = \int_{x^2}^{e^x} \frac{x}{1+t^2} \mathrm{d}t$$

v bodě $[0, F(0)]$.

K nalezení tečny využijeme obvyklého vzorce

$$t : y = F'(x_0)(x - x_0) + F(x_0).$$

Máme

$$F(0) = \int_0^1 \frac{0}{1+t^2} \mathrm{d}t = \int_0^1 0 \mathrm{d}t = 0.$$

Dále si uvědomíme, že funkce vystupující v integrálu jsou všechny funkce spojité. Proto máme ze vzorce

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_{x^2}^{e^x} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{x}{1+t^2} \mathrm{d}t + \frac{x}{1+e^{2x}} \left(e^x\right)' - \frac{x}{1+x^4} \left(x^2\right)' = \\ &= \int_{x^2}^{e^x} \frac{1}{1+t^2} \mathrm{d}t + \frac{x}{1+e^{2x}} e^x - \frac{2x^2}{1+x^4} \\ F'(0) &= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \mathrm{d}t + \frac{0}{1+e^0} e^0 - \frac{0}{1+0^4} = [\operatorname{arctg} t]_0^1 = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Tečna je tedy

$$t : y = \frac{\pi}{4} x.$$

Př. 272 *Nalezněte plochu pod grafem funkce*

$$F(x) = \int_0^{\pi} x \sin t \mathrm{d}t$$

pro $x \in [0,1]$.

Chceme tedy počítat integrál

$$\int_0^1 \left| \int_0^{\pi} x \sin t \mathrm{d}t \right| \mathrm{d}x.$$

Na intervalu $[0,\pi]$ je $\sin t$ kladný a stejně tak máme $x > 0$ proto upravíme integrál na

$$\int_0^1 \int_0^{\pi} x \sin t \mathrm{d}t \mathrm{d}x = \int_0^1 x \mathrm{d}x \int_0^{\pi} \sin t \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \left[-\cos t\right]_0^{\pi} = 1.$$

Př. 273 *Spočtěte objem tělesa, které vznikne rotací funkce*

$$F(x) = \int_0^1 xt\mathrm{d}t,$$

okolo osy x *na intervalu* $[0,1]$.

Z teorie integrálů víme, že tento objem spočteme jako integrál

$$\pi \int_0^1 F^2(x)\mathrm{d}x = \pi \int_0^1 \left(\int_0^1 xt\mathrm{d}t \right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_0^1 x^2\mathrm{d}x \int_0^1 t\mathrm{d}t \int_0^1 t\mathrm{d}t = \frac{\pi}{12}$$

7 Nevlastní parametrické integrály-neohraničená množina

Následující věty a definice lze nalézt v knize [**?**].

Nechť $f(x,y)$ je spojitou funkcí na množině $A \leq x < \infty$, $C < y < D$. Konvergentní integrál

$$\int_A^\infty f(x,y)\mathrm{d}x = \lim_{B\to\infty} \int_A^B f(x,y)\mathrm{d}x$$

nazveme stejnoměrně konvergentním integrálem na intervalu I, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje číslo N takové, že pro každé $n \geq N$ a $y \in I$ platí

$$\left|\int_n^\infty f(x,y)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

Věta 274 *Integrál*

$$\int_A^\infty f(x,y)\mathrm{d}x$$

je stejnoměrně konvergentní na $[C,D]$, pokud existuje funkce $F(x)$ taková, že

$$|f(x,y)| \leq F(x) \text{ pro } x \in [A,\infty) \text{ a } y \in [C,D]$$
$$\int_A^\infty F(x)\mathrm{d}x < \infty$$

Definice 1 *Řekneme, že funkce $g(x,y) \to G(y)$ na intervalu I pro $x \to \infty$ pokud pro každé $y \in I$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existuje K takové, že pro všechna $x \geq K$ je*

$$|G(y) - g(x,y)| < \varepsilon.$$

Definice 2 *Řekneme, že funkce $g(x,y) \rightrightarrows G(y)$ na intervalu I pro $x \to \infty$ pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje K takové, že pro všechna $x \geq K$ a $y \in I$ je*

$$|G(y) - g(x,y)| < \varepsilon.$$

Věta 275 *Předpokládejme, že funkce $f(x,y)$ a $g(x,y)$ jsou integrovatelné pro každé $y \in I$ na každém $[A,B] \subset [A,\infty)$. Integrál*

$$\int_A^\infty f \cdot g\mathrm{d}x$$

konverguje na I stejnoměrně pokud $g(x,y)$ je monotonní funkce na intervalu $[A,\infty)$ pro každé $y \in I$ a dále

- ***(Abelova)** existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že $\left|\int_A^B f\mathrm{d}x\right| < K$, pro libovolné $B \in [A,\infty)$, $y \in I$ (tj. integrál je stejnoměrně ohraničený) a $g(x,y) \rightrightarrows 0$ na I pro $x \to \infty$.*
- ***(Dirichletova)** integrál $\int_A^\infty f\mathrm{d}x$ konverguje stejnoměrně na I a existuje konstanta $K \in \mathbb{R}$ taková, že $|g(x,y)| < K$ pro každé $x \in [A,\infty)$ a $y \in I$ (tj. funkce g je stejnoměrně ohraničená).*

Všimněme si, že stejnoměrná ohraničenost zde splývá s ohraničeností na množině v $\mathbb{R}^2$. POuze vyšetřujeme obvyklou ohraničenost funkce

$$F(x,y) = \left|\int_A^t f(t,y)\mathrm{d}t\right|$$

a $g(x,y)$.

Věta 276 *Nechť funkce $f(x,y)$ je spojitá na množině $[A,\infty)\times[C,D]$ a integrál*

$$\int_A^\infty f(x,y)\mathrm{d}x$$

konverguje pro všechna $y\in(C,D)$. Pokud integrál diverguje pro $y=C$ nebo pro $y=D$, potom integrál nekonverguje stejnoměrně na intervalu (C,D).

Je-li integrál

$$\int_A^\infty f(x,y)\mathrm{d}x=\lim_{B\to\infty}\int_A^B f(x,y)\mathrm{d}x$$

stejnoměrně konvergentní na intervalu I, pak je na tomto intervalu funkce

$$F(y)=\int_A^\infty f(x,y)\mathrm{d}x$$

spojitá. Tedy

$$\lim_{y\to C}F(y)=\int_A^\infty f(x,C)\mathrm{d}x.$$

Věta 277 *Nechť $f(x,y)$ je integrovatelná na $[A,\infty)$ na libovolném intervalu $[N,\infty)$, pro N dostatečně velké. Nechť $f(x,y)\rightrightarrows F(x)$ na libovolném intervalu $[A,B]$ pro $y\to\infty$ a dále nechť je $\int_A^\infty f(x,y)\mathrm{d}x$ stejnoměrně konvergentní na intervalu $[N,\infty)$. Za těchto předpokladů je pak*

$$\lim_{y\to\infty}\int_A^\infty f(x,y)\mathrm{d}x=\int_A^\infty F(x)\mathrm{d}x.$$

Věta 278 *Nechť funkce $f(x,y)$ je spojitá na obdélníku $[A,\infty)\times[C,D]$ a integrál $\int_A^\infty f(x,y)\mathrm{d}x$ konverguje stejnoměrně na intervalu $[C,D]$. Potom je funkce*

$$F(y)=\int_A^\infty f(x,y)\mathrm{d}x$$

integrovatelná na intervalu $[C,D]$ a platí

$$\int_C^D\int_A^\infty f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_A^\infty\int_C^D f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Věta 279 *Nechť funkce $f(x,y)$ a $f_y(x,y)$ jsou spojité na obdélníku $[A,\infty)\times[C,D]$ a integrály $\int_A^\infty f(x,y)\mathrm{d}x$, $\int_A^\infty f_y(x,y)\mathrm{d}x$ konvergují stejnoměrně na intervalu $[C,D]$. Potom funkce*

$$F(y)=\int_A^\infty f(x,y)\mathrm{d}x$$

splňuje

$$F'(y)=\int_A^\infty\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_A^\infty f_y(x,y)\mathrm{d}x.$$

Př. 280 *Rozhodněte na kterém intervalu konverguje integrál*

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-xy}}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

stejnoměrně.

Uvažme nejprve situaci, kdy $y \geq 0$. Potom můžeme integrovanou funkci můžeme ohraničit jako

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{-xy}}{1+x^2}\right| \leq \frac{\mathrm{e}^0}{1+x^2},$$

pro $x \in [0,\infty)$. Kde však uvážíme, že

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = [\operatorname{arctg} x]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$

Proto vidíme, že integrál konverguje na intervalu $[0,\infty)$ stejnoměrně. Pro $y < 0$ budeme situaci vyšetřovat skrze

$$\int_B^\infty \frac{\mathrm{e}^{-xy}}{1+x^2}\mathrm{d}x \geq \int_B^\infty \frac{\mathrm{e}^{-By}}{1+x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-By}\,[\operatorname{arctg} x]_B^\infty = \mathrm{e}^{-By}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} B\right)$$

Nadále budeme chtít počítat limitu tohoto výrazu pomocí L'hospitalova pravidla pro $y < 0$ a dostaneme

$$\lim_{B\to\infty} \frac{-\frac{1}{1+B^2}}{y\,\mathrm{e}^{yB}} = |z = -y| = \frac{1}{z}\frac{\mathrm{e}^{zB}}{1+B^2} = \infty$$

Odsud vidíme, že funkce nekonverguje stejnoměrně, neboť tento zbytek by musel mít libovolně malou hodnotu.

Př. 281 *Rozhodněte na kterém intervalu konverguje integrál*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(yx)^2}}{1+x^2} \mathrm{d}x$$

stejnoměrně.

Rozmysleme si, že platí

$$\mathrm{e}^{-(yx)^2} \leq \mathrm{e}^0 = 1$$

pro libovolné y a libovolné x. Můžeme tak ohraničit

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(yx)^2}}{1+x^2} \mathrm{d}x \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x,$$

kterýžto integrál je však již konvergentní. Dle Weierstrassova kritéria je tak tento integrál stejnoměrně konvergentní na celém $\mathbb{R}$.

Př. 282 *Určete pro která y integrál*

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$$

konverguje stejnoměrně.

Všimneme si, že můžeme ohraničit integrál

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}x \le \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = 1$$

pro libovolné $y \in \mathbb{R}$. Tedy dle Weierstraasova kritéria je integrál stejnoměrně konvergentní na celém $\mathbb{R}$. Můžeme ilustrovat, že

$$\int_B^\infty \frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}x \le \int_B^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{B}.$$

Tedy pro libovolné $\varepsilon > 0$ snadno nalezneme dostatečně velké B, aby bylo

$$\int_B^\infty \frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}x \le \frac{1}{B} < \varepsilon,$$

pro libovolné y.

Př. 283 *Určete interval na kterém integrál*

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x$$

konverguje stejnoměrně.

Nejdříve se chceme podívat, pro která y integrál konverguje. Můžeme rovnou integrovat

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-xy}}{y}\right]_0^\infty = -\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xy}}{y} + \frac{1}{y}.$$

Hned vidíme, že je-li $y < 0$ pak integrál diverguje. Proto budeme uvažovat stejnoměrnou konvergenci pouze na intervalu $[0, \infty)$. Uvažme dále pro $y > 0$ integrál

$$\int_K^\infty \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x = -\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xy}}{y} + \frac{\mathrm{e}^{-By}}{y} = \frac{\mathrm{e}^{-By}}{y}.$$

Aby integrál konvergoval stejnoměrně na množině I, chceme aby pro libovolné $\varepsilon > 0$ bylo pro všechny B dostatečně velké a libovolné $y \in I$ aby

$$\frac{\mathrm{e}^{-By}}{y} < \varepsilon.$$

Všimneme si však, že pro $y_1 < y_2$ je

$$\frac{\mathrm{e}^{-By_1}}{y_1} > \frac{\mathrm{e}^{-By_2}}{y_2}.$$

Vidíme tedy, že je-li $I = [A, \infty)$, musí být

$$\frac{\mathrm{e}^{-BA}}{A} < \varepsilon$$

je-li však $I = (0, \infty)$, vidíme, že funkce

$$\frac{\mathrm{e}^{-By}}{y}$$

diverguje na tomto intervalu k nekonečnu a proto zde nemůže konvergovat stejnoměrně. Vidíme, že integrál konverguje na libovolném intervalu $[A, \infty)$, kde $A > 0$.

Př. 284 *Určete interval na kterém integrál*

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x$$

konverguje stejnoměrně.

Všimneme si, že platí

$$\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x \le \int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x \le \int_1^\infty \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x.$$

V předchozím příkladě jsme však viděli, že tento integrál konverguje stejnoměrně na libovolném intervalu $[A,\infty)$, pro $A > 0$. Proto můžeme ohraničit

$$\int_B^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x \le \int_B^\infty \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x\varepsilon$$

a jistě nalezneme B, aby tato nerovnost byla splněna.

Je-li $y < 0$ vidíme, že $lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{e}^{-xy} > 0$ a protože není splněna nutná podmínka konvergence, integrál diverguje. Situace je však komplikovanější pro $y = 0$. Mohli bychom se podívat, zda integrál konverguje v krajním bodě $y = 0$. V tomto případě však máme

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x,$$

což je konvergentní integrál (například podle Abelova kritéria pro nevlastní integrály na $\mathbb{R}$). Nelze tedy použít věty, která by nám vyřadila integrál z úvahy krajní bod. Můžeme si rozmyslet, že na intervalu $I = [0,\infty)$ nelze použít ani Dirichletova kritéria ani Abelova kritéria. Je-li však $y \ge 0$ víme, že

$$\mathrm{e}^{-xy} \le \mathrm{e}^0 = 1$$

a tedy

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x \le \int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

Integrál je sjtenoměrně konvergentní dle weierstrasova kritéria.

Př. 285 *Určete pro které $y \geq 0$ je integrál*

$$\int_1^\infty \frac{\sin yx}{x^y} \mathrm{d}x$$

stejnoměrně konvergentní.

Všimneme si, že můžeme ohraničit integrovanou funkci jako

$$\int_1^\infty \left|\frac{\sin yx}{x^y}\right| \mathrm{d}x \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^y} \mathrm{d}x = \begin{cases} [\ln|x|]_1^\infty, & y = 1, \\ \left[-\frac{1}{yx^{y-1}}\right]_1^\infty, & y \neq 1 \end{cases}.$$

Snadno si tozmyslíme, že pro $y \leq 1$ je majorantní integrál divergentní a pro $y > 1$ majorantní integrál konverguje. Tedy pro $y > 1$ integrál konverguje stejnoměrně.

Dále si můžeme uvědomit, že pro $y = 0$ je

$$\int_1^\infty \frac{\sin yx}{x^y} \mathrm{d}x = \int_1^\infty 1 \mathrm{d}x = \infty.$$

Tedy na intervalu $(0, D)$ nemůže integrál konvergovat stejnoměrně. Avšak pro pevné $y \in (0, 1)$ je integrál

$$\int_1^\infty \frac{\sin yx}{x^y} \mathrm{d}x$$

konvergentní dle Abelova kritéria pro neparametrické integrály v $\mathbb{R}$. Musíme tedy dořešit pouze intervaly $[C, 1]$, pro $C > 0$. Na tomto intervalu však platí, že

$$\frac{1}{x^y} \leq \frac{1}{x^C},$$

a proto

$$\frac{1}{x^y} \rightrightarrows 0, \text{ pro } x \to \infty$$

Navíc máme, že

$$\left|\int_0^B \sin xy \mathrm{d}x\right| = \left|\left[\frac{\sin xy}{y}\right]_0^B\right| = \left|\frac{\sin By}{y}\right| \leq \frac{1}{C}.$$

Integrál tak na tomto intervalu splňuje podmínky Abelova kritéria a je tedy stejnoměrně konvergentní.

Př. 286 *Určete obor konvergence integrálu*

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^y + x^2} \mathrm{d}x$$

Všimneme si, že můžeme ohraničit

$$\left| \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^y + x^2} \mathrm{d}x \right| \leq \left| \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^y} \mathrm{d}x \right|,$$

proto dle předchozího příkladu vidíme, že na intervalech $[C, \infty)$, pro $C > 0$ integrál konverguje stejnoměrně. Budeme chtít opět vyšetřit situaci pro $y = 0$. Zde však vidíme, že

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^y + x^2} \mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{\sin x}{1 + x^2} \mathrm{d}x$$

Tento integrál je však konvergentní (opět například pomocí Abelova kritéria). Nicméně pro $y \in [0, \infty)$ a $x \in [1, \infty)$ je

$$\frac{1}{x^y + x^2} \leq \frac{1}{1 + x^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Tentokrát můžeme Abelovo kritérium použít rovnou na intervalu $[0, \infty)$. Ani toto ohraničení však není dostatečné, neboť funkce

$$\frac{1}{x^y + x^2}$$

je ohraničená pro $y > -2$ a stejnoměrně ohraničená na intervalu $[C, \infty)$ pro libovolné $C > -2$.

Př. 287 *Spočtěte*
$$\lim_{y\to\infty}\int_0^\infty f(x,y)\mathrm{d}x,$$
kde
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{y}, & x\in[0,y],\\ 0, & x>y.\end{cases}$$

První ze všeho si všimneme, že platí $f(x,y)\rightrightarrows 0$ pro $y\to\infty$, neboť je
$$f(x,y)\le\frac{1}{y}$$
a pro libovolné $\varepsilon>0$ nalezneme takové N, že pro všechny $y\ge N$ a libovolné x je
$$f(x,y)\le\frac{1}{y}<\varepsilon.$$

Navíc počítáme
$$\lim_{y\to\infty}\int_0^\infty f(x,y)\mathrm{d}x=\lim_{y\to\infty}\int_0^y\frac{1}{y}\mathrm{d}x=\lim_{y\to\infty}\left[\frac{x}{y}\right]_0^y=\lim_{y\to\infty}1=1$$
Nicméně pokud bychom zaměnili pořadí limity a integrace dostaneme vzhledem k $f(x,y)\rightrightarrows 0$, že
$$\lim_{y\to\infty}\int_0^\infty f(x,y)\mathrm{d}x=0.$$
Je třeba si uvědomit, že integrál
$$\int_0^\infty f(x,y)\mathrm{d}x$$
nekonverguje stejnoměrně na $[N,\infty)$, neboť pro $B<y$ je vždy
$$\int_B^\infty f(x,y)\mathrm{d}x=1-\frac{B}{y}.$$
Avšak pro libovolné $\varepsilon>0$ a libovolné B nalezneme na intervalu $[N,\infty)$ takové y, že tato hodnota nebude menší než ε.

Zde vidíme, že ve větě o záměně limity a integrálu nestačí, aby byla funkce pouze stejnoměrně konvergentní.

Př. 288 *Určete*

$$\lim_{y\to 0}\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-xy}}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

Již jsme ukázali, že tento integrál stejnoměrně konverguje na intervalu $[0,\infty)$. Výsledný integrál je tak spojitou funkcí vzhledem k proměnné y na tomto intervalu a můžeme zaměnit pořadí limity a integrace, abychom dostali

$$\lim_{y\to 0}\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-xy}}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{0}}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Př. 289 *Určete*

$$\lim_{y\to\infty}\int_1^\infty \frac{1}{y^2+x^2}\mathrm{d}x.$$

Již jsme ukázali, že tento integrál je stejnoměrně konvergentní na celém $\mathbb{R}$. Dále si všimneme, že pro $y \in [N,\infty)$ je

$$\frac{1}{y^2+x^2} \leq \frac{1}{y^2} \leq \frac{1}{N^2}$$

a tedy pro libovolné $\varepsilon > 0$ nalezneme takové N, aby tato hodnota byla menší pro libovolné x a y z uvažovaných intervalů. Což tedy znamená, že $\frac{1}{y^2+x^2} \rightrightarrows 0$ a máme

$$\lim_{y\to\infty}\int_1^\infty \frac{1}{y^2+x^2}\mathrm{d}x = \int_1^\infty 0\mathrm{d}x = 0$$

Př. 290 *Určete hodnoty funkce*

$$F(y) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(xy)}{x(1+x^2)} \mathrm{d}x,$$

pro $y > -1$.

První ze všeho si všimneme, že funkce

$$\frac{\operatorname{arctg}(xy)}{x}$$

je ohraničená. Neboť pro $y = 0$ se jedná o nulovou funkci a pro $y \neq 0$ máme

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg}(xy)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+(xy)^2}}{1} = 1.$$

Dále máme, že funkce $\frac{\operatorname{arctg}(x,y)}{x}$ je ohraničená a integrál

$$\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

konverguje a nezávisí ani na proměnné y, tedy konverguje stejnoměrně. Tudíž dle Dirichletova kritéria tento integrál konverguje stejnoměrně. Integrovaná funkce

$$f(x,y) = \frac{\operatorname{arctg}(xy)}{x(1+x^2)}$$

je navíc spojitá všude kromě kraje intervalu přes který integrujeme. Máme

$$f_y(x,y) = \frac{x}{x(1+x^2)(1+(xy)^2)},$$

která je také spojitá pro $x > 0$. Dále platí, že

$$\int_0^\infty f_y(x,y) \mathrm{d}x \leq \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Tedy i tento integrál je stejnoměrně konvergentní. Můžeme tedy podle věty počítat

$$\begin{aligned} F'(y) &= \int_0^\infty f_y(x,y) \mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)(1+(xy)^2)} \mathrm{d}x = \frac{1}{1-y^2} \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} - \frac{y^2}{1+(xy)^2} \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{1-y^2} \left[\operatorname{arctg} x - y \operatorname{arctg}(xy)\right]_0^\infty = \frac{1}{1-y^2} \left(\frac{\pi}{2} - y\frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+y}. \end{aligned}$$

Můžeme tedy zpětně integrovat čímž dostaneme

$$F(y) = \frac{\pi}{2} \ln|1+y| + C.$$

Dosadíme-li

$$F(0) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(0)}{x(1+x^2)} \mathrm{d}x = 0 = \frac{\pi}{2} \ln|1+0| + C = C$$

a tedy funkce

$$F(y) = \frac{\pi}{2} \ln |1 + y|$$

na intervalu $y \in (-1, 1)$. Musíme si ještě rozmyslet, že pro

$$F'(\pm 1) = \int_0^\infty \frac{1}{(1 + x^2)^2} \mathrm{d}x = \left[\frac{\operatorname{arctg} x}{2} + \frac{x}{2x^2 + 2} \right]_0^\infty = \frac{\pi}{4}$$

Tedy $F'(y)$ je spojitá pro $y = 1$ a tedy máme vyjádření pro $F(y)$ na intervalu $(-1, \infty)$.

Př. 291 *Určete hodnotu integrálu*

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$$

Zavedeme pomocný integrál

$$F(y) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{e}^{-xy} \,\mathrm{d}x$$

O tomto integrálu víme, že integruje stejnoměrně pro $y \geq 0$ (podobně jako v příkladu 285). Navíc integrovaná funkce je spojitá pro $x > 0$ (v dalším jakoby uvážíme její spojité rozšíření a budeme ji brát spojitou i pro $x = 0$) a máme

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{e}^{-xy} = -\sin x \,\mathrm{e}^{-xy},$$

což je opět spojitá funkce pro $x \geq 0$. Máme

$$F'(y) = -\int_0^\infty \sin x \,\mathrm{e}^{-xy} \,\mathrm{d}x = \left[\frac{(y \sin(x) + \cos(x))}{y^2 + 1} \,\mathrm{e}^{-xy} \right]_0^\infty = -\frac{0 + 1}{1 + y^2} = -\frac{1}{1 + y^2}$$

Zintegrujeme-li zpátky toto vyjádření, dostaneme

$$F(y) = -\operatorname{arctg} y + C$$

Neboť je $F(y)$ spojitou funkcí proměnné y, je

$$\lim_{y \to \infty} F(y) = \int_0^\infty \lim_{y \to \infty} \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{e}^{-xy} \,\mathrm{d}x = 0.$$

Navíc platí také

$$\lim_{y \to \infty} F(y) = \lim_{y \to \infty} -\operatorname{arctg} y + C = -\frac{\pi}{2} + C$$

a tedy je $C = \frac{\pi}{2}$. Uvážíme-li naopak ze spojitosti, že

$$\lim_{y \to 0^+} F(y) = \int_0^\infty \lim_{y \to 0^+} \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{e}^{-xy} \,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$$

a také že

$$\lim_{y \to 0^+} F(y) = \lim_{y \to 0^+} -\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

máme výslednou hodnotu hledaného integrálu.

8 Křivkový integrál 1.druhu

Je-li funkce $f(x, y, z)$ definovaná a spojitá v bodech hladké křivky C, která je daná jako $x = \alpha(t)$, $y = \beta(t)$, $z = \gamma(t)$, pro $t \in [A, B]$, pak křivkový integrál prvního druhu počítáme jako

$$\int_C f(x, y, z)\mathrm{d}s = \int_A^B f(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))\sqrt{(\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2 + (\gamma'(t))^2}\mathrm{d}t$$

Křivka C daná jako $x = \alpha(t)$, $y = \beta(t)$, $z = \gamma(t)$, pro $t \in [A, B]$ se nazývá hladká, pokud α, β, γ mají na $[A, B]$ spojité derivace a

$$(\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2 + (\gamma'(t))^2 > 0$$

pro každé $t \in [A, B]$.

Máme-li křivku danou skrze funkci $f(x)$, můžeme dvourozměrnou křivku parametrizovat jako $x = t$ a $y = f(t)$.

Délku křivky C dostaneme jako křivkový integrál prvního druhu

$$\int_C \mathrm{d}s.$$

Hmotnost křivky jejíž hustota je dána funkcí $\rho(x, y)$ spočteme jako integrál

$$\int_C \rho\mathrm{d}s.$$

Těžiště křivky jejíž hustota je dána funkcí $\rho(x, y)$ získáme skrze stacionární momenty

$$S_x = \int_C y\rho\mathrm{d}s,$$
$$S_y = \int_C x\rho\mathrm{d}s.$$

a souřadnice těžiště jsou pak

$$\left[\frac{S_x}{m}, \frac{S_y}{m}\right],$$

kde m je její hmotnost.

Př. 292 *Pro každou křivku nalezněte dvě parametrizace pro*

- *úsečku* AB*, kde* $A = [-1, 6], B = [2, -1]$.
- *horní polovinu kružnice* $x^2 + y^2 = 16$.
- *levou část elipsy* $x^2 + 3y^2 = 12$.
- *parabolu* $y = -x^2 + 2$*, pro* $-1 \le x \le 2$.
- *prostorovou křivku splňující* $x^2 + y^2 + z^2 = 16, x \ge 0, z \ge 0, y = \sqrt{3}x$.
- *křivku implicitně danou jako* $x^2 - 8x + y^2 + 4y + 4 = 0$.
- $x^{4/3} + y^{4/3} = A^{2/3}$*, pro* $A > 0$.
- *hyperbolu* $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$.
- *řetězovkou* $y = A \cosh \frac{x}{A}$.
- *lemniskatou* $\left(x^2 + y^2\right)^2 = A^2 \left(x^2 - y^2\right)$.
- *cykloidou* $x = A(t - \sin t)$*,* $y = A(1 - \cos t)$.

Pro jednotlivé body máme

- Hledáme parametrický popis úsečky AB, body A, B udávají vektor $v = (2 - (-1), -1 - 6) = (3, -7)$. Dostáváme tak parametrický popis $x = -1 + 3t$, $y = 6 - 7t$, pro $t \in [0, 1]$ pokud začínáme v bodě A, obrátíme-li znaménko vektoru v dostaneme parametrizaci $x = 2 - 3t$, $y = -1 + 7t$, pro $t \in [0, 1]$ a dostaneme parametrizaci začínající v bodě B. Další parametrizace dostaneme, pokud volíme $t \in [a, b]$.

- Víme, že horní půlkružnici dostaneme jako funkci $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$. Dostaneme tak parametrizaci $x = t$, $y = \sqrt{16 - t^2}$, pro $t \in [-4, 4]$. Naopak použijeme-li polární souřadnice, dostaneme parametrizaci $x = 4 \cot t$, $y = 4 \sin t$, pro $t \in [0, \pi]$.

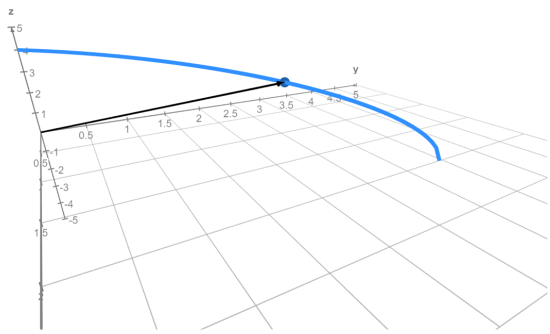
- I zde můžeme vyjádřit z rovnice $x^2 + 3y^2 = 12$ proměnnou y, pak bychom dostali horní, nebo dolní polovinu elipsy. Pokud vyjádříme z rovnice x, dostaneme levou, nebo pravou část elipsy. Dostáváme tak parametrizaci $x = \sqrt{12 - 3t^2}$, $y = t$, pro $t \in [-2, 2]$. Pokud však použijeme zobecněné polární souřadnice, dostaneme obdobně $x = \sqrt{12} \cos t$, $y = 2 \sin t$, pro $t \in [\pi/2, 3\pi/2]$.

- Neboť máme funkci $f(x) = -x^2 + 2$, dostaneme jednoduše $x = t$, $y = -t^2 + 2$, pro $t \in [-1, 2]$. Pokud chceme nalézt druhou parametrizaci, stačí například upravit $x = -t$, $y = -t^2 + 2$, pro $t \in [-2, 1]$. Můžeme však upravit x ještě více, například volbou $x = \ln t$, $y = -\ln^2 t + 2$, pro $t \in [\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}^2]$, nebo $x = t - 2$, $y = -(t - 2)^2 + 2$, pro $t \in [1, 4]$.

- I zde se hned nabízí jednoduchá varianta $x = t$, $y = \sqrt{3}t$, $z = \sqrt{16 - 4t^2}$. Nyní potřebujeme už jen určit interval pro t. Z nerovnosti $x \ge 0$ vidíme, že křivka začne pro $t = 0$, dokud křivka nedorazí na půdorysnu, tj. dokud nenastane $z = 0$, což platí pro $t = 2$. Tedy dostaneme $t \in [0, 2]$. Druhou parametrizaci získáme pomocí sférických souřadnic. Volíme tedy $x = \rho \cos \varphi \sin \theta$, $y = \rho \sin \varphi \sin \theta$, $z = \rho \sin \theta$. Neboť se pohybujeme na sféře, bude poloměr konstantní (po dosazení do rovnice sféry dostáváme $\rho^2 = 16$). Neboť se jedná o část poledníku, bude také φ konstantní, což můžeme určit z obrázku, nebo po dosazení

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{3}x \\ \rho \sin\varphi \sin\theta &= \sqrt{3}\rho\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi &= \sqrt{3}\cos\varphi \\ \operatorname{tg}\varphi &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

Odkud vidíme, že $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Nakonec z nerovnosti $0 \le z = \rho\sin\theta$ určíme $\theta \in [0, \pi/2]$. Samotnou křivku můžeme vykreslit jako:



- Vidíme, že se jedná patrně o kružnici, nebo elipsu. Rovnici $x^2 - 8x + y^2 + 4y + 4 = 0$ tedy musíme upravit na čtverec, dostáváme

  $$x^2 - 8x + y^2 + 4y + 4 = x^2 - 8x + 16 + y^2 + 4y + 4 + 4 - 16 - 4 = (x-4)^2 + (y+2)^2 - 16$$

  Jedná se tedy o kružnici s poloměrem 4 a středem $[4, -2]$. Parametrizujeme ji pomocí polárních souřadnic jako

  $$\begin{aligned} x + 4 &= 4\cos t \\ y - 2 &= 4\sin t, \end{aligned}$$

  pro $t \in [0, 2\pi]$. Čímž dostáváme první parametrizaci. Druhou parametrizaci dostaneme například jako

  $$\begin{aligned} x + 4 &= 4\cos(-t) = 4\cos t \\ y - 2 &= 4\sin(-t) = -4\sin t, \end{aligned}$$

  stále pro $t \in [0, 2\pi]$. Což dává parametrizaci s opačnou orientací. Třetí orientaci získáme, pokud zaměníme sinus a cosinus v parametrizaci. Dostaneme

  $$\begin{aligned} x + 4 &= 4\sin t \\ y - 2 &= 4\cos t, \end{aligned}$$

  pro $t \in [0, 2\pi]$. Neboť však platí, že $\cos x = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, jedná se o stejnou parametrizaci jako v předchozím případě, jen interval přes který parametrizujeme by se posunul.

- Křivka připomíná rovnici kružnice, pokud bychom parametrizovali křivku jako $x = A\cos t$, $y = A\sin t$, dostaneme po dosazení

$$A^{2/3}\sqrt[3]{\cos^2 t} + A^{2/3}\sqrt[3]{\sin^2 t} = A^{2/3} \Rightarrow \sqrt[3]{\cos^2 t} + \sqrt[3]{\sin^2 t} = 1$$

Zde bychom chtěli podobně jako u kružnice využít goniometrické jedničky, ale tu nelze použít. Chtěli bychom se zbavit ve výrazu třetí mocniny. Vidíme tak, že pokud použijeme $x = A\cos^3 t$, $y = A\sin^3 t$, dostaneme stejně

$$A^{2/3}\cos^2 t + A^{2/3}\sin^2 t = A^{2/3} \Rightarrow \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

Máme tedy hledanou parametrizaci pro $t \in [0, 2\pi]$. Další parametrizaci dostaneme opět jako $x = A\cos^3(-t)$, $y = A\sin^3(-t)$ pro $t \in [0, 2\pi]$.

- Chceme-li parametrizovat hyperbolu, zkusíme nejprve použít obvyklou eliptickou parametrizaci

$$\begin{aligned} x &= A\cos t, \\ y &= B\sin t, \end{aligned}$$

čímž po dosazení dostaneme

$$\frac{A^2\cos^2 t}{A^2} - \frac{B^2\sin^2 t}{B^2} = \cos^2 t - \sin^2 t$$

Vidíme, že tento výraz není roven nule. Avšak přivede nás to na myšlenku, že můžeme k parametrizaci využít hyperbolické funkce, čímž dostaneme

$$\begin{aligned} x &= A\cosh t, \\ y &= B\sinh t, \end{aligned}$$

pro $t \in (-\infty, \infty)$. Dosazením snadno získáme, že parametrizace splňuje naši rovnici, neboť platí vzorec

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1.$$

Uvědomme si však, že tato parametrizace odpovídá pouze jednomu rameni hyperboly, neboť $\cosh x > 0$. Druhé rameno hyperboly získáme jako jeho překlopením přes osu y, což odpovídá druhé části parametrizace

$$\begin{aligned} x &= -A\cosh t, \\ y &= B\sinh t, \end{aligned}$$

pro $t \in (-\infty, \infty)$. Další parametrizaci dostaneme, vezmeme-li

$$\begin{aligned} x &= \pm A\cosh t, \\ y &= -B\sinh t, \end{aligned}$$

pro $t \in (-\infty, \infty)$. Neboť je však $sinh(x)$ lichá funkce, odpovídá tato druhá parametrizace první parametrizaci, akorát v opačném směru.

Další parametrizaci hyperboly dostaneme, pokud uvážíme rovnost $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Můžeme psát

$$1 = \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 t} = \frac{1}{\sin^2 t} - \mathrm{tg}^2\, t,$$

což vede na parametrizaci

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{\sin t},\\
y &= \operatorname{tg} t.
\end{aligned}
$$

Opět si musíme uvědomit, že zde máme dva intervaly pro t a to jsou $t \in (-\pi/2, \pi/2)$, $(\pi/2, 3\pi/2)$, abychom dostali dvě nesouvislé ramena.

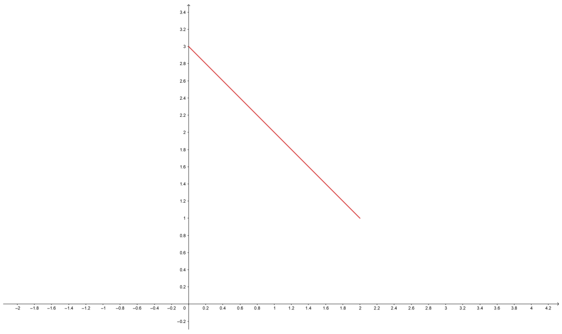
- První parametrizaci řetězovky získáme snadno jako $x = t$ a $y = A \cosh \frac{t}{A}$, pro $t \in (\infty, \infty)$. Avšak u řetězovky $y = A \cosh \frac{x}{A}$ je užitečné si také uvědomit, že lze tato rovnice přepsat jako
$$y = A \cosh \frac{x}{A} = A \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{A}} - \mathrm{e}^{-\frac{x}{A}}}{2}$$
Můžeme tak vhodně zvolit také parametrizaci $x = A \ln t$ což nám po dosazení dává
$$y = \frac{A}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right).$$
Rozsah pro parametr t se upraví vzhledem k oboru hodnot na $t \in (0, \infty)$.

- U komplikovanějších výrazů může s parametrizací pomoci, pokud prostě pohledáme mezi známými parametrizacemi. S trochou práce zjistíme, že Lemniskata je daná parametricky jako
$$
\begin{aligned}
x &= \frac{A \cos t}{1 + \sin^2 t}\\
y &= \frac{A \sin t \cos t}{1 + \sin^2 t}
\end{aligned}
$$
Tento vzorec bychom asi jen těžko odhadovali. Snadno nalezneme druhou parametrizaci, pokud zavedeme transformaci $t = -x$, která vede na parametrizaci v opačném směru.

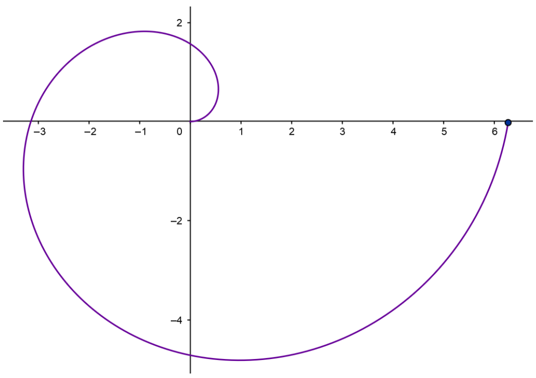
- Uvedená cykloida je sama o sobě již parametrizována jako $x = A(t - \sin t)$, $y = A(1 - \cos t)$, pro $t \in (-\infty, \infty)$. K nalezení další parametrizace můžeme použít transformaci pro t, která nezmění množinu přes kterou parametrizujeme. Můžeme volit například
$$
\begin{aligned}
x &= A(t^3 - \sin t^3)\\
y &= A(1 - \cos t^3)
\end{aligned}
$$
Část cykloidy můžeme získat také parametrickým vyjádřením jako
$$x = A \arccos \frac{A - y}{A} - \sqrt{y(2A - y)},$$
což můžeme ověřit dosazením
$$
\begin{aligned}
&A \arccos \frac{A - y}{A} - \sqrt{y(2A - y)} = A \arccos \cos t - \sqrt{(A - A\cos t)(A + A \cos t)} =\\
&= At - A\sqrt{1 - \cos^2 t} = At - A \sin t,
\end{aligned}
$$
pro $t \in [0, \pi]$.

Př. 293 *Nakreslete průmět křivky C do půdorysny xy, kde křivka C ke*

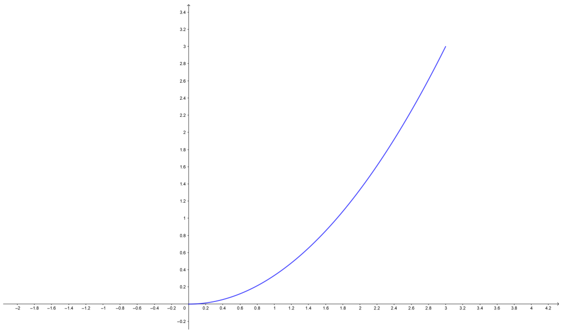
- *daná jako $x = t + 1$, $y = 2 - t$, $z = 3t$, pro $t \in [-1, 1]$.*
- *daná jako $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, pro $t \in [0, 2\pi]$.*
- *daná jako $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$, pro $t \in [0, 1]$.*
- *daná jako $y = 2\arcsin\frac{x}{2}$, $z = \ln\frac{2-x}{2+x}$, pro $x \in [0, 2]$..*
- Chceme-li vykreslit průmět do půdorysny křivky, která je dána parametricky, zapomeneme třetí souřadnici a vykreslíme křivku pouze pro x a y. Jedná se tedy o přímku $x = t + 1$, $y = 2 - t$, můžeme převést $t = x - 1$ a dosadit
$$y = 2 - t = 2 - (x - 1) = 3 - x$$
z omezení $t \in [-1, 1]$ pak dostaneme $x \in [0, 2]$. Dostaneme



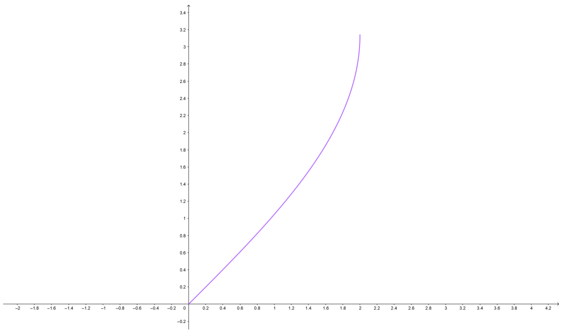
- Zapomeneme-li třetí souřadnici, dostaneme křivku $x = t\cos t$, $y = t\sin t$ dosadíme-li do vyjádření
$$x^2 + y^2 = t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t = t^2$$
vidíme, že body křivky leží vždy na kružnici s poloměrem t. Vykreslíme tedy tuto kružnici se zvětšujícím se poloměrem



- Zapomeneme-li třetí souřadnici, dostaneme křivku $x = 3t$, $y = 3t^2$, pro $t \in [0, 1]$. Tu nejsnáze vykreslíme, pokud vyjádříme $t = \frac{x}{3}$ a dosadíme
$$y = 3t^2 = 3\frac{x^2}{9} = \frac{x^2}{3}.$$
Navíc pro $t \in [0, 1]$ je platí z $x = 3t$, že $x \in [0, 3]$. Vykreslíme nyní snadno



- Tentokrát není křivka daná parametricky. Nejsnáze ji však spočteme, pokud si uvědomíme, že v půdorysně ji máme zadanou již daným vyjádřením $y = 2 \arcsin \frac{x}{2}$. Druhé vyjádření pak ovlivňuje pouze jak vysoko se křivka nachází. Vykreslíme tedy



Př. 294 *Parametrizujte křivku, která vznikne průnikem válce* $x^2+y^2 = 2x$ *a koule* $x^2+y^2+z^2 = 4$*, pro* $z \geq 0$

Budeme chtít využít faktu, že můžeme vyjádřit $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Navíc můžeme různě vyjádřit $y = \pm\sqrt{2x - x^2}$ čímž bychom mohli dojít k parametrizaci křivky přes její dvě části volbou $x = t$ a dosazením do vyjádření. Nicméně můžeme také využít polárních souřadnic

$$\begin{aligned} x - 1 &= \rho \cos t \\ y &= \rho \sin t \end{aligned}$$

Dosadíme do rovnice $x^2 + y^2 = 2x$ čímž získáme spolu s malou úpravou na čtverec

$$\rho^2 \cos^2 t + \rho^2 \sin^2 t = 1$$

Tedy je $\rho = 1$ a máme parametrizaci $x = 1 + \cos t$, $y = \sin t$, $z = \sqrt{2 - 2\cos t}$, pro $t \in [0, 2\pi]$.

Př. 295 *Vypočtěte integrál*

$$\int_C x + y\mathrm{d}s \qquad \textit{pro} \qquad C \textit{ obvod trojúhelníka } A = [0,0], B = [0,2], C = [1,0]$$

Křivka C je dána třemi po částech hladkými křivkami $C_1 : x = t, y = 0$, $C_2 : x = 1 - t, y = 2t$, $c_3 : x = 0, y = 2 - 2t$, pro $t \in [0,1]$. Dostaneme tak integrál

$$\int_0^1 t\sqrt{1} + (1+t)\sqrt{4+1} + (2-2t)\sqrt{4}\mathrm{d}t = \int_0^1 (\sqrt{5}-3)t + (\sqrt{5}+4)\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{\sqrt{5}-3}{2} + \sqrt{5} + 4 = \frac{3\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{2}$$

Př. 296 *Spočtěte integrál*

$$\int_C \frac{x^2}{5}\mathrm{d}s,$$

kde C je křivka daná jako $y = \ln x^2$ spojující body $[\mathrm{e}, 2]$ *a* $[1, 0]$.

Parametrizujeme křivku snadno jako $x = t$ a $y = \ln t^2$, pro $t \in [1, \mathrm{e}]$. Máme tedy $x' = 1$ a $y' = \frac{2}{t}$. Dosadíme takto do vzorce

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{t^2}{5}\sqrt{1+\frac{4}{t^2}}\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{t}{5}\sqrt{t^2+4}\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} s = 4+t^2 \\ \mathrm{d}s = 2t\mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{10}\int_5^{4+\mathrm{e}^2} \sqrt{s}\mathrm{d}s = \frac{1}{10}\left[\frac{2\sqrt{s^3}}{3}\right]_5^{4+\mathrm{e}^2} = \frac{1}{15}\left(\sqrt{(4+\mathrm{e}^2)^3} - \sqrt{5^3}\right)$$

Př. 297 *Spočtěte integrál*

$$\int_C x + y \mathrm{d}s \qquad \textit{pro} \qquad C : x = 5t + 2, y = 1 - 3t, z = 2 + t,$$

pro $t \in [1, 3]$.

Křivka je daná jednoduše parametricky, můžeme tedy hned dosadit do vzorce, abychom dostali

$$\int_1^3 (5t + 2 + 1 - 3t) \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 1^2} \mathrm{d}t = \sqrt{35} \int_1^3 2t + 3 \mathrm{d}t = \sqrt{35} \left[t^2 + 3t\right]_1^3 = \sqrt{35}(9 + 9 - 1 - 3) = 14\sqrt{35}.$$

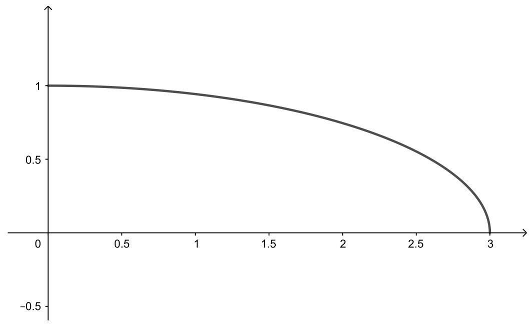
Př. 298 *Vypočtěte integrál*

$$\int_C xy\mathrm{d}s \qquad \textit{pro} \qquad C: \frac{x^2}{9} + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0$$

Zvolíme parametrizaci C jako $x = 3\cos t$, $y = \sin t$, pro $t \in [0, \pi/2]$ a počítáme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t \sin t \sqrt{9sin^2 t + \cos^t}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t \sin t \sqrt{8\sin^2 t + 1}\mathrm{d}t =$$
$$= \left| \begin{array}{c} z = 8\sin^2 t + 1 \\ \mathrm{d}z = 16 \sin t \cos t \mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{3}{16} \int_1^9 \sqrt{z}\mathrm{d}z = \frac{1}{8}\left[\sqrt{z^3}\right]_1^9 = \frac{13}{4}$$

Křivku zobrazíme jako



Př. 299 *Vypočtěte integrál*

$$\int_C (5 - x^2 + 3y^2 - 2xy)\mathrm{d}s \qquad pro \qquad C: x^2 + y^2 = 4$$

Křivku C parametrizujeme $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, pro $t \in [0, 2\pi]$ a počítáme

$$\int_0^{2\pi} (5 - 4\cos^2 t + 12\sin^2 t - 8\sin t\cos t)\sqrt{4\cos^2 t + 4\sin^2 t}\mathrm{d}t =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} 5 - 4\cos 2t + 16\sin^2 t - 4\sin 2t\mathrm{d}t =$$

$$= 2\left[5t - 2\sin 2t + 2\cos 2t\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} 8(1 - \cos 2t)\mathrm{d}t = 20\pi + 8\left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= 20\pi + 16\pi = 36\pi$$

Př. 300 *Spočtěte*

$$\int_C \frac{1+x}{1+y^2}\mathrm{d}s \qquad pro \qquad C: x = 2t, y = t,$$

pro $t \in [0,1]$.

Rovnou můžeme dosadit do vzorce jako

$$\int_0^1 \frac{1+2t}{1+t^2}\sqrt{4+1}\mathrm{d}t = \sqrt{5}\int_0^1 \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t =$$
$$= \sqrt{5}\left[\ln|1+t^2| - \operatorname{arctg} t\right]_0^1 = \sqrt{5}\left(\ln 2 - \frac{\pi}{4} - \ln 1 + \operatorname{arctg} 0\right) = \sqrt{5}\left(\ln 2 - \frac{\pi}{4}\right)$$

Př. 301 *Vypočtěte*

$$\int_C 5x^2 + 5y^2 + 6z^2 \mathrm{d}s \qquad \textit{pro} \qquad C : x = 2\sin t, y = 2\cos t, z = 3t,$$

pro $t \in [0, 2\pi]$.

Vidíme, že křivka je šroubovicí a snadno spočteme derivace parametrizace jako

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x &= 2\cos t, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y &= -2\sin t, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} z &= 3. \end{aligned}$$

Dosadíme tak do vzorce a počítáme

$$\begin{aligned} &\int_C 5x^2 + 5y^2 + 6z^2 \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \left(20\sin^2 t + 20\cos^2 t + 54t^2\right) \sqrt{4\cos^2 t + 4\sin^2 t + 9} \mathrm{d}t = \\ &= \sqrt{13} \int_0^{2\pi} 20 + 54t^2 \mathrm{d}t = \sqrt{13} \left(40\pi + 54 \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi}\right) = \\ &= \sqrt{13} \left(40\pi + 144\pi^3\right) \end{aligned}$$

Př. 302 *Vypočtěte*

$$\int_C 3x^2 + y\mathrm{d}s,$$

kde křivka C je lomená čára od bodu $[2,2]$ *přes bod* $[3,3]$ *do bodu* $[4,2]$.

Budeme chtít parametrizovat křivku a neboť je daná po částech, dostaneme ji přes dvě parametrizace jako

$$\begin{aligned} x &= 2+t, \\ y &= 2+t, \end{aligned}$$

pro $t \in [0,1]$ a její druhou část jako

$$\begin{aligned} x &= 3+t, \\ y &= 3-t, \end{aligned}$$

pro $t \in [0,1]$. Dostaneme tak integrál

$$\begin{aligned} &\int_0^1 3(2+t)^2 + 2 + t\sqrt{1+1}\mathrm{d}t + \int_0^1 3(3+t)^2 + 3 - t\sqrt{1+1}\mathrm{d}t = \\ &= \sqrt{2}\int_0^1 3(4+4t+t^2) + 3(9+6t+t^2) + 5\mathrm{d}t = 3\sqrt{2}\left[13t + 5t^2 + \frac{2t^3}{3}\right]_0^1 + 5\sqrt{2} = \\ &= \sqrt{2}\,(39+12+2+5) = 58\sqrt{2} \end{aligned}$$

Př. 303 *Vypočtěte*

$$\int_C 3\sqrt{x^2+y^2} - 2z\mathrm{d}s \qquad \mathit{pro} \qquad x = t\cos t, y = t\sin t, z = t,$$

pro $t \in [0, \pi]$.

Křivka je zadaná parametricky, můžeme tedy počítat

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x = \cos t - t\sin t,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y = \sin t + t\cos t,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}z = 1.$$

Následně dosadíme do vzorce

$$\int_0^\pi \left(3\sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t} - 2t\right)\sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^\pi (3t - 2t)\sqrt{\cos^2 t - 2t\cos t\sin t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + 2t\cos t\sin t + t^2\cos^2 t + 1}\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^\pi t\sqrt{2+t^2}\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} s = 2+t^2 \\ \mathrm{d}s = 2t\mathrm{d}t \end{array} \right| =$$
$$= \frac{1}{2}\int_2^{2+\pi^2} \sqrt{s}\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\left[\frac{2\sqrt{s^3}}{3}\right]_2^{2+\pi^2} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{(2+\pi)^3} - \sqrt{8}\right)$$

Př. 304 *Vypočtěte*

$$\int_C y\,\mathrm{e}^{xz}\,\mathrm{d}s,$$

kde křivka C je přímka spojující počátek s bodem $[-1, 2, 1]$.

Začneme parametrizací křivky. Dostaneme

$$\begin{aligned} x &= -1 + t, \\ y &= 2 - 2t, \\ z &= 1 - t, \end{aligned}$$

pro $t \in [0, 1]$. Dosadíme-li tuto parametrizaci do integrálu, dostaneme

$$\int_0^1 (2 - 2t)\,\mathrm{e}^{(t-1)(2-2t)}\,\sqrt{1 + 4 + 1}\mathrm{d}t.$$

Vidíme, že integrovaný výraz je poněkud komplikovaný a jeho integrace nebude jednoduchá. Pokud bychom zvolili rozumnější parametrizaci

$$\begin{aligned} x &= -t, \\ y &= 2t, \\ z &= t, \end{aligned}$$

pro $t \in [0, 1]$, dostaneme

$$\int_0^1 2t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\sqrt{1 + 4 + 1}\mathrm{d}t = \left|s = t^2\right| = \sqrt{6}\int_0^1 \mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s = \sqrt{6}\left[-\,\mathrm{e}^{-s}\right]_0^1 = \sqrt{6}\left(-\,\mathrm{e}^{-1} + 1\right).$$

Př. 305 *Vypočtěte*

$$\int_C y^2 \mathrm{d}s \qquad \textit{pro} \qquad x = 3t - 3\sin t, y = 3 - 3\cos t$$

pro $t \in [0, \pi]$.

Křivku máme danou parametricky, máme tedy

$$x' = 3 - 3\cos t,$$
$$y' = 3\sin t$$

a dosadíme

$$\int_0^\pi (3 - 3\cos t)^2 \sqrt{(3 - 3\cos t)^2 + 9\sin^2 t}\mathrm{d}t = 9\int_0^\pi (1 - \cos t)^2 3\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\mathrm{d}t =$$
$$= 27\sqrt{2}\int_0^\pi (1 - \cos t)^2 \sqrt{1 - \cos t}\mathrm{d}t = \left| 1 - \cos t = 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \right| =$$
$$= 27 \cdot 8 \int_0^\pi \sin^5\left(\frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t = 27 \cdot 8 \int_0^\pi \sin\left(\frac{t}{2}\right)\left(1 - \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2 \mathrm{d}t =$$
$$= 27 \cdot 8 \cdot 2\left[-\frac{\cos^5 \frac{t}{2}}{5} + \frac{2\cos^3 \frac{t}{2}}{3} - \cos\frac{t}{2}\right]_0^\pi = 27 \cdot 16\left(+\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1\right) = 27 \cdot 16\left(\frac{2}{15}\right) = \frac{9 \cdot 32}{5}$$

Př. 306 *Spočtěte*

$$\int_C \frac{4x+y^2}{5}\mathrm{d}s \qquad pro \qquad x=\cos t + t\sin t, y = \sin t - t\cos t$$

pro $t\in[-\pi,\pi]$.

Využijeme zadanou parametrizaci a počítáme

$$\begin{aligned} x' &= -\sin t + \sin t + t\cos t = t\cos t,\\ y' &= \cos t - \cos t + t\sin t = t\sin t. \end{aligned}$$

Následně dosadíme do vzorce

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} \frac{4\cos t + 4t\sin t + (\sin t - t\cos t)^2}{5}\sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t}\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{5}\int_{-\pi}^{\pi}(4\cos t + 4t\sin t + (\sin^2 t - 2t\cos t\sin t + t^2\cos^2 t))t\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{5}\int_{-\pi}^{\pi}(4t\cos t + 4t^2\sin t + t\sin^2 t - 2t^2\cos t\sin t + t^3\cos^2 t)\mathrm{d}t = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Neboť všechny integrované funkce jsou liché a integrujeme přes symetrický interval.

Př. 307 *Spočtěte*

$$\int_C \frac{z^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}s \qquad \textit{pro} \qquad x = 3\cos t, y = 3\sin t, z = 2t$$

pro $t \in [0, \pi]$.

Převedeme integrál pomocí vzorce do tvaru

$$\int_0^\pi \frac{4t^2}{9\cos^2 t + 9\sin^2 t}\sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 4}\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{4\sqrt{13}}{9}\int_0^\pi t^2 \mathrm{d}t = \frac{4\sqrt{13}}{9}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^\pi = \frac{4\sqrt{13}\pi^3}{27}$$

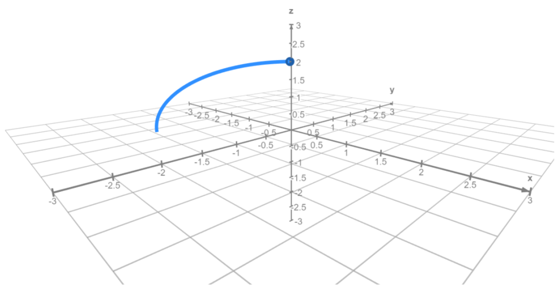
Př. 308 *Vypočtěte integrál*

$$\int_C \sqrt{2y^2+z^2}\mathrm{d}s \qquad \textit{pro} \qquad C: x^2+y^2+z^2=4, x=y, x\leq 0, z\geq 0$$

Vyšetřovaná křivka leží na sféře, použijeme tedy sférické souřadnice. Z rovnice sféry vidíme, že $\rho = 2$, z rovnosti $y = x$ navíc vidíme, že $\varphi = \frac{\pi}{4}$ nebo $\frac{\pi}{4}+\pi$. Z nerovnosti $x \leq 0$ však vidíme, že je to ta druhá varianta, tedy $\varphi = \frac{5}{4}\pi$. Neboť $z \geq 0$, máme navíc $\theta \in [0, \pi/2]$ a dostáváme tedy parametrizaci $x = -\sqrt{2}\sin t$, $y = -\sqrt{2}\sin t$, $z = 2\cos t$. Počítáme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{8\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2\cos^2 t + 4\sin^2 t}\sqrt{4\frac{1}{2}\cos^2 t + 4\frac{1}{2}\cos^t + 4\sin^2 t}\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4}\sqrt{4}\mathrm{d}t = 4\frac{\pi}{2} = 2\pi$$

Křivku můžeme zobrazit jako



Př. 309 *Vypočtěte integrál*

$$\int_C \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s \qquad \textit{pro} \qquad C: x = A\cosh t, y = A\sinh t, \ \textit{pro}\ t \in [0,t_0], A > 0$$

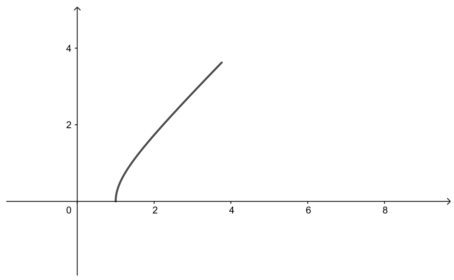
Nejprve připomeňme, že $(\sinh t)' = \cosh t$, $(\cosh t)' = \sinh t$ a $\cosh t = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}$. Dostáváme tedy

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t_0} A^2 \sinh t \cosh t \sqrt{A^2\sinh^2 t + A^2\cosh^2 t}\mathrm{d}t = |\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1| = \\
&= A^3 \int_0^{t_0} \sinh t \cosh t \sqrt{2\cosh^2 t - 1}\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} z = 2\cosh^2 t - 1 \\ \mathrm{d}z = 4\cosh t \sinh t \mathrm{d}t \end{array} \right| = \\
&= \frac{A^3}{4} \int_1^{\cosh 2t_0} \sqrt{z}\mathrm{d}z = \frac{A^3}{4}\left[\frac{2}{3}\sqrt{z^3}\right]_1^{\cosh 2t_0} = \frac{A^3}{6}\left(\cosh^{2/3} 2t_0 - 1\right)
\end{aligned}$$

Zde využijeme odvození

$$2\cosh^2 t - 1 = 2\frac{(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})^2}{4} - 1 = \frac{\mathrm{e}^{2t} + 2\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-2t} - 2}{2} = \frac{\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-2t}}{2} = \cosh 2t$$

Zkoumaná křivka vypadá pro $A = 1$ a $t_0 = 2$ jako



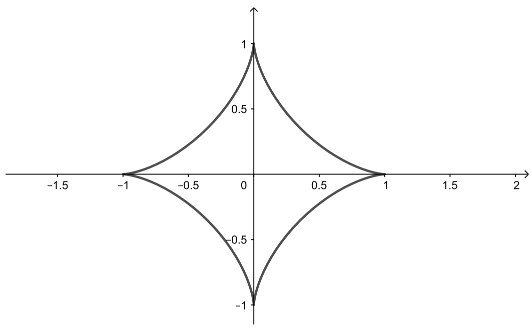
Př. 310 *Vypočtěte integrál*

$$\int_C x^{4/3} + y^{4/3} \mathrm{d}s \qquad \mathit{pro} \qquad C : x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

Parametrizaci asteroidy získáme jako $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, pro $t \in [0, 2\pi]$. Dostáváme tak integrál

$$\begin{aligned}
&a^{4/3} \int_0^{2\pi} \cos^4 t + \sin^4 t \sqrt{9a^2(\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t)} \mathrm{d}t = \\
&= 3a^{7/3} \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) |\cos t \sin t| \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} \mathrm{d}t = \\
&= 12a^{7/3} \int_0^{\pi/2} (\cos^4 t + \sin^4 t) \cos t \sin t \mathrm{d}t = \\
&= \left| \begin{array}{c} z = \sin t \\ \mathrm{d}z = \cos t \mathrm{d}t \end{array} \right| = 12a^{7/3} \int_0^1 ((1 - t^2)^2 + t^4) t \mathrm{d}t = \\
&= 12a^{7/3} \int_0^1 t - 2t^3 + 2t^5 \mathrm{d}t = 12a^{7/3} \left[\frac{t^2}{2} - 2\frac{t^4}{4} + 2\frac{t^6}{6} \right]_0^1 = \\
&= 12a^{7/3} \frac{1}{3} = 4a^{7/3}
\end{aligned}$$

Asteroida pro $A = 1$ vypadá jako



Př. 311 *Vypočtěte integrál*

$$\int_C y^2 \mathrm{d}s \qquad \textit{pro} \qquad C: x = At - A\sin t, y = A - A\cos t,\ \textit{pro}\ t \in [0, 2\pi]$$

Počítáme

$$\int_0^{2\pi} A^2(1-\cos t)^2 \sqrt{2A^2 - 2A^2\cos t}\mathrm{d}t = \left|\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1-\cos t}{2}\right| =$$
$$= \sqrt{2}A^3 \int_0^{2\pi} \left(2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{5/2} \mathrm{d}t = |\sin t \text{ je na } [0,\pi] \text{ kladný}| =$$
$$= 2^3A^3 \int_0^{2\pi} \sin^5\left(\frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} z = \cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ \mathrm{d}z = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t \end{array} \right| =$$
$$= -2^4A^3 \int_1^{-1} \left(1 - \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2 \mathrm{d}z = 2^4A^3 \int_{-1}^{1} (1-z^2)^2 \mathrm{d}z =$$
$$= |\text{integral sude funkce}| = 2^5A^3 \int_0^1 1 - 2z^2 + z^4 \mathrm{d}z =$$
$$= 2^5A^3 \left[z - 2\frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5}\right]_0^1 = 2^5A^3\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right)$$

Př. 312 *Vypočtěte integrál*

$$\int_C x^2 + y^2 \mathrm{d}s \qquad \textit{pro} \qquad C : x = r(\cos t + t \sin t), y = r(\sin t - t \cos t) \ \textit{pro} \ t \in [0, 2\pi]$$

Počítáme

$$r^2 \int_0^{2\pi} (\cos t + t \sin t)^2 + (\sin t - t \cos t)^2 \sqrt{r^2 t^2 \cos^2 t + r^2 t^2 \sin^2 t} \mathrm{d}t =$$

$$= r^3 \int_0^{2\pi} \left[\cos^2 t + 2t \cos t \sin t + t^2 \sin^2 t + \sin^2 t - 2t \sin t \cos t + t^2 \cos^2 t\right] t\mathrm{d}t =$$

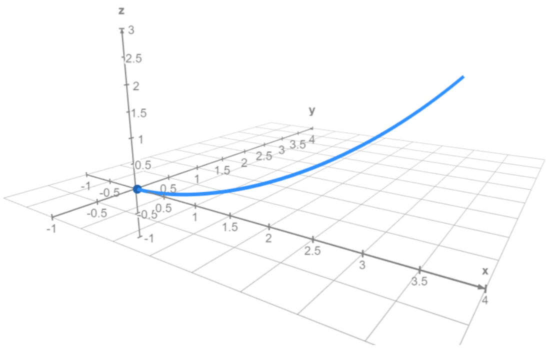
$$= r^3 \int_0^{2\pi} (1 + t^2) t\mathrm{d}t = r^3 \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}\right]_0^{2\pi} = 2\pi^2 r^3 \left(1 + 2\pi^2\right)$$

Př. 313 *Vypočtěte délku křivky $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$ od bodu $[0,0,0]$ do bodu $[3,3,2]$.*

Vidíme hned, že parametrizujeme křivku pro $t \in [0,1]$. Počítáme tedy integrál

$$\int_C 1\mathrm{d}s = \int_0^1 \sqrt{9 + 36t^2 + 36t^4}\mathrm{d}t = 3\int_0^1 \sqrt{(1+2t^2)^2}\mathrm{d}t = 3\int_0^1 1 + 2t^2\mathrm{d}t =$$
$$= 3\left[t + \frac{2t^3}{3}\right]_0^1 = 3\left(1 + \frac{2}{3}\right) = 5$$

Zkoumaná křivka vypadá jako

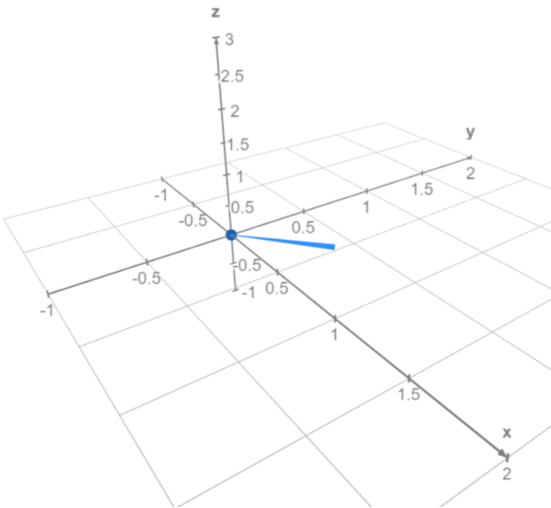


Př. 314 *Vypočtěte délku křivky* $x = \mathrm{e}^{-t}\cos t$, $y = \mathrm{e}^{-t}\sin t$, $z = \mathrm{e}^{-t}$ *pro* $t \in [0, \infty)$.

Počítáme

$$\begin{aligned}
\int_C 1\mathrm{d}s &= \int_0^\infty \sqrt{\mathrm{e}^{-2t}(\cos t + \sin t)^2 + \mathrm{e}^{-2t}(\cos t - \sin t)^2 + \mathrm{e}^{-2t}}\mathrm{d}t = \\
&= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\sqrt{\cos^2 t + 2\cos t \sin t + \sin^2 t + \cos^2 t - 2\cos t \sin t + \sin^2 t + 1}\mathrm{d}t = \\
&= \sqrt{3}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{3}\left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^\infty = \sqrt{3}\left(1 - \lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-t}\right) = \sqrt{3}
\end{aligned}$$

Zkoumaná křivka vypadá jako

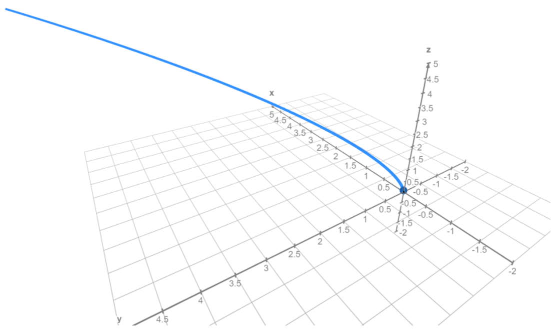


Př. 315 *Vypočtěte délku křivky* $(x-y)^2 = (x+y)$*,* $x^2-y^2 = \frac{9}{8}z$ *od bodu* $[0,0,0]$*, k bodu* $[x_0, y_0, z_0]$.

Nejdříve musíme zvolit vhodnou parametrizaci, zavedeme vhodně transformaci $u = x - y$, $v = x + y$, čímž dostaneme křivku danou jako $u^2 = v$, $uv = \frac{9}{8}z^2$. Ze které odvodíme vhodnou parametrizaci například jako $u = t$, $v = t^2$, $z = \frac{2\sqrt{2}t^{3/2}}{3}$. Dále vyjádříme $x = \frac{t+t^2}{2}$ a $y = \frac{t^2-t}{2}$. Následně potřebujeme určit interval pro t, dostáváme $t = u = x - y$ a tedy $t \in [0, x_0 - y_0]$. Počítáme

$$\int_C 1\mathrm{d}s = \int_0^{x_0-y_0} \sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2t}\right)^2}\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^{x_0-y_0} \sqrt{2t^2+2t+\frac{1}{2}}\mathrm{d}t = \int_0^{x_0-y_0} \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}t\right)^2}\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{x_0-y_0} 1 + 2t\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[t+t^2\right]_0^{x_0-y_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_0 - y_0 + (x_0-y_0)^2\right)$$

Vyšetřovaná křivka vypadá jako



Př. 316 *Vypočtěte délku křivky* $x^2 + y^2 = Az$, $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\frac{z}{A}$ *od bodu* $[0,0,0]$, *k bodu* $[x_0, y_0, z_0]$.

Nejdříve musíme nalézt parametrizaci křivky. Vzhledem k tvaru rovnice $x^2 + y^2 = Az$ vidíme, že válcové souřadnice nás mohou přivést na správnou cestu. Z první rovnice máme $\rho^2 = Az$ a z druhé máme $\frac{z}{A} = \operatorname{arctg}\frac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi}$, z čehož plyne $z = A\varphi$. Pokud tedy volíme $\rho = t$ dostaneme parametrizaci $x = t\cos\frac{t^2}{A^2}$, $y = t\sin\frac{t^2}{A^2}$, $z = \frac{t^2}{A}$, pro $t \in \left[0, \sqrt{Az_0}\right]$.

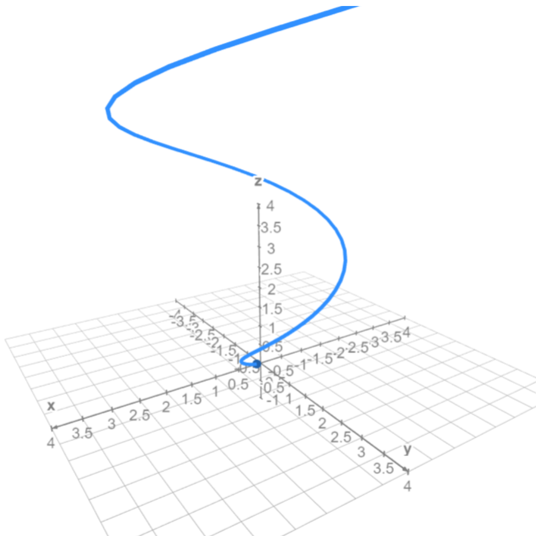
$$\int_C 1\mathrm{d}s = \int_0^{\sqrt{Az_0}} \sqrt{\left(\cos\frac{t^2}{A^2} - 2\frac{t^2}{A^2}\sin\frac{t^2}{A^2}\right)^2 + \left(\sin\frac{t^2}{A^2} + 2\frac{t^2}{A^2}\cos\frac{t^2}{A^2}\right)^2 + \frac{4t^2}{A^2}}\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{\sqrt{Az_0}} \sqrt{\cos^2\frac{t^2}{A^2} + 4\frac{t^4}{A^4}\sin^2\frac{t^2}{A^2} + \sin^2\frac{t^2}{A^2} + 4\frac{t^4}{A^4}\cos^2\frac{t^2}{A^2} + \frac{4t^2}{A^2}}\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{\sqrt{Az_0}} \sqrt{1 + \frac{4t^2}{A^2} + \frac{4t^4}{A^4}}\mathrm{d}t = \int_0^{\sqrt{Az_0}} \sqrt{\left(1 + \frac{2t^2}{A^2}\right)^2}\mathrm{d}t = \left[t + \frac{2t^3}{3A^2}\right]_0^{\sqrt{Az_0}} =$$

$$= \sqrt{Az_0} + \frac{2\sqrt{z_0^3}}{3\sqrt{A}}$$

Vyšetřovaná křivka pro $A = 1$ vypadá jako



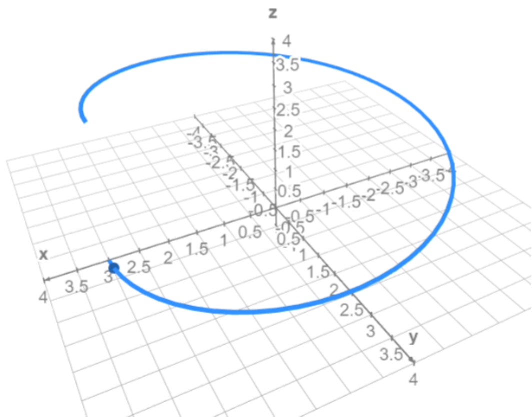
Př. 317 *Vypočtěte integrál*

$$\int_C x^2 + y^2 + z^2 \mathrm{d}s \qquad \textit{pro} \qquad C : x = A\cos t, y = A\sin t, z = Bt, t \in [0, 2\pi]$$

Počítáme

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \left(A^2\cos^2 t + A^2\sin^2 t + B^2t^2\right)\sqrt{A^2\sin^2 t + A^2\cos^2 t + B^2}\mathrm{d}t = \\
&= \int_0^{2\pi} \left(A^2 + B^2t^2\right)\sqrt{A^2+B^2}\mathrm{d}t = \sqrt{A^2+B^2}\left[A^2t + \frac{B^2t^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \\
&= \sqrt{A^2+B^2}\left(2A^2\pi + \frac{8B^2\pi^3}{3}\right)
\end{aligned}$$

Pro $A = 3$, $B = \frac{1}{2}$ vypadá šroubovice jako Vyšetřovaná křivka pro $A = 1$ vypadá jako



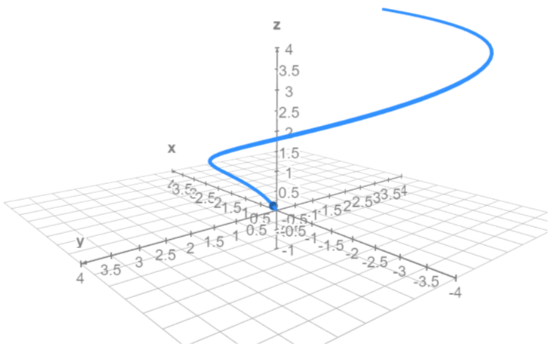
Př. 318 *Vypočtěte integrál*

$$\int_C z \mathrm{d}s \qquad \textit{pro} \qquad C : x = t\cos t, y = t\sin t, z = t, t \in [0, t_0]$$

Počítáme

$$\int_0^{t_0} t\sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^{t_0} t\sqrt{\cos^2 t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + t^2\cos^2 t + 1}\mathrm{d}t = \int_0^{t_0} t\sqrt{2 + t^2}\mathrm{d}t =$$
$$= \left| \begin{array}{c} z = 2 + t^2 \\ \mathrm{d}z = 2t\mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_2^{2+t_0^2} \sqrt{z}\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}z^{3/2}\right]_2^{2+t_0^2} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{(2+t_0^2)^3} - \sqrt{8}\right)$$

Vyšetřovaná křivka vypadá jako



Př. 319 *Vypočtěte integrál*

$$\int_C z\mathrm{d}s \quad \textit{pro} \quad C: x^2+y^2=z^2, y^2=Ax, \textit{ od bodu } [0,0,0] \textit{ do bodu } [A,A,A\sqrt{2}]$$

která vede ob dobu $[0,0,0]$ *do bodu* $[A,A,A\sqrt{2}]$, $A>0$.

Nejdříve musíme nalézt vhodnou parametrizaci, volíme $x=t$ a $y=\pm\sqrt{At}$, neboť však musí platit $A=\pm\sqrt{A^2}$ dostáváme $y=\sqrt{At}$. Ze stejného důvodu platí také $z=\sqrt{t^2+At}$ a víme, že $t\in[0,A]$. Nejdříve počítáme

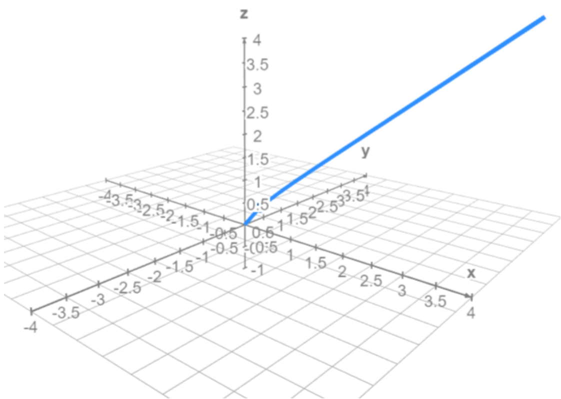
$$(x')^2+(y')^2+(z')^2 = 1+\frac{A}{4t}+\frac{(2t+A)^2}{4t(t+A)} = \frac{4t^2+4At+A^2+At+4t^2+4At+A^2}{4t(t+A)} =$$
$$= \frac{2A^2+9At+8t^2}{4t(t+A)}$$

Dostáváme tedy integrál

$$\frac{1}{2}\int_0^A \sqrt{t(t+A)}\sqrt{\frac{2A^2+9At+8t^2}{t(t+A)}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^A \sqrt{2A^2+9At+8t^2}\mathrm{d}t$$

Pod odmocninou se nachází kvadratický polynom, jeho kořeny jsou $t_{1,2}=\frac{-9A\pm\sqrt{81A^2-64A^2}}{16}=A\frac{-9\pm\sqrt{17}}{16}$. Nadále bychom aplikovali vhodnou Eulerovu substituci.

Vyšetřovaná křivka vypadá pro $A=1$ jako



Př. 320 *Vypočtěte délku čtyřúhelníku spojujícího body* $[0,0]$, $[1,0]$, $[0,1]$, $[2,2]$.

Vidíme, že tento čtyřúhelník můžeme parametrizovat přes 4 úsečky. Dostaneme

$$\begin{array}{cc} C_1 : x = 0, & C_3 : x = 1 + t, \\ y = t, & y = 2t, \\ C_2 : x = 2t, & C_4 : x = t, \\ y = 1 + t, & y = 0, \end{array}$$

vždy pro $t \in [0,1]$. Délku pak můžeme spočíst jedním integrálem

$$l = \int_0^1 1 \cdot \sqrt{1} + 1 \cdot \sqrt{4+1} + 1 \cdot \sqrt{1+4} + 1 \cdot \sqrt{1} \mathrm{d}t = 2(1+\sqrt{5}) \int_0^1 \mathrm{d}t = 2(1+\sqrt{5}).$$

Př. 321 *Vypočtěte délku elipsy*

$$9x^2 + 4y^2 = 36,$$

pro $y \geq 0$.

Abychom spočetli délku, potřebujeme parametrizovat elipsu, což získáme obvyklou transformací

$$x = 2\cos t,$$
$$y = 3\sin t.$$

A z omezení $3\sin t \geq 0$ vidíme, že $t \in [0, \pi]$. Délku křivky pak spočítáme jako

$$2\int_0^{\pi/2} 1\sqrt{4\sin^2 t + 9\cos^2 t}\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi/2} 1\sqrt{9 - 5\sin^2 t}\mathrm{d}t =$$
$$= 6\int_0^{\pi/2} 1\sqrt{1 - \frac{5}{9}\sin^2 t}\mathrm{d}t$$

Nyní vidíme, že se jedná o hodnotu eliptického integrálu

$$E\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right),$$

který jsme si uváděli v kapitole o parametrických integrálech. Zde vidíme, odkud získal tento integrál své jméno. Víme, že můžeme integrál vyjádřit jako

$$E(y) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^2 \frac{y^{2n}}{1-2n}$$

Dosadíme tedy do tohoto odhadu

$$E\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^2 \frac{5^n}{(1-2n)9^n}$$

Vezmeme-li sumu

$$\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^2 \frac{5^n}{(2n-1)9^n}$$

vidíme, že tato suma má kladné členy a proto můžeme brát

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}(n+1)^2(n!)^2}\right)^2 \frac{5^{n+1}}{(2n+1)9^{n+1}}\left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right)^2 \frac{(2n-1)9^n}{5^n} =$$
$$= \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{(n+1)^2}\frac{5\left(n-\frac{1}{2}\right)}{9} \leq \frac{5}{9}$$

Můžeme tedy odhadnout chybu řady jako

$$R_n \leq |a_n|\frac{5}{9(1-5/9)} = |a_n|\frac{5}{4}$$

Prvních deset členů posloupnosti a_n je

$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
0.1388888889	0.0144675926	0.0033489798	0.0010174852	0.0003561198
$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$	$n = 10$
$1.360180e-04$	$5.513201e-05$	$2.333060e-05$	$1.020114e-05$	$4.576344e-06$

Vidíme tedy, že chceme-li chybu menší než $0,001$, stačí volit $n = 5$.

Př. 322 *Vypočtěte délku paraboly*

$$y = \frac{x^2}{2},$$

pro $x \in [-\pi/4, \pi/4]$.

Parametrizujeme křivku jednoduše jako $x = t$ a $y = \frac{t^2}{2}$. Počítáme

$$\int_{-1}^{1} 1\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg} s \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2 s}\mathrm{d}s \end{array} \right| = \int_{t=-1}^{t=1} \frac{1}{\cos^2 s}\sqrt{1+\frac{\sin^2 s}{\cos^2 s}}\mathrm{d}s =$$

$$= \int_{t=-1}^{t=1} \frac{1}{\cos^2 s}\sqrt{\frac{\cos^2 s+\sin^2 s}{\cos^2 s}}\mathrm{d}s = \int_{t=-1}^{t=1} \frac{1}{\cos^3 s}\mathrm{d}s = \int_{t=-1}^{t=1} \frac{\cos s}{(1-\sin^2 s)^2}\mathrm{d}s =$$

$$= \left[\frac{\sin s}{2\cos^2 s}\right]_{t=-1}^{t=1} + \frac{1}{2}\int_{t=-1}^{t=1} \frac{1}{\cos s}\mathrm{d}s = \left| \begin{array}{c} u = \frac{\sin s+1}{\cos s} \\ \mathrm{d}u = \frac{\cos^2 s+\sin^2 s+\sin s}{\cos^2 s} = \frac{u}{\cos s}\mathrm{d}s \end{array} \right| =$$

$$= \left[\frac{\sin s}{2\cos^2 s}\right]_{t=-1}^{t=1} + \frac{1}{2}\int_{t=-1}^{t=1} \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \left[\frac{\sin s}{2\cos^2 s}\right]_{t=-1}^{t=1} + [\ln|u|]_{t=-1}^{t=1} =$$

$$= \left[\frac{\sin s}{2\cos^2 s}\right]_{t=-1}^{t=1} + \left[\ln\left|\frac{\sin s+1}{\cos s}\right|\right]_{t=-1}^{t=1} = \left[\frac{\sin s}{2\cos^2 s} + \ln\left|\frac{\sin s+1}{\cos s}\right|\right]_{-\operatorname{tg} 1}^{\operatorname{tg} 1}.$$

Nyní bychom museli použít kalkulačku. Také je potřeba zamyslet, jak řešit daný integrál. Pro výpočet integrálu

$$\int \frac{\cos s}{(1-\sin^2 s)^2}\mathrm{d}s$$

Můžeme použít nabízející se substituci a rozkládat na parciální zlomky. My jsme se v tomto případě rozhodli použít redukční formuli

$$\int \frac{1}{\cos^n x}\mathrm{d}x = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^{n-2} x},$$

kterou lze použít pro $n > 1$. Také můžeme funkci sekans uvažovat jako základní funkci a tedy používat vzorec

$$\int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x = \int \mathrm{sec}x\mathrm{d}x = \ln|\operatorname{tg} x + \mathrm{sec}x| + C$$

a vynechat několik kroků výpočtu.

Př. 323 *Vypočtěte délku sinusoidy*

$$y = \sin x,$$

pro $x \in [0, \pi]$.

Opět parametrizujeme funkci $x = t$ a $y = \sin t$ a dosadíme do vzorce

$$\int_0^\pi 1\sqrt{1 + \cos^2 t}\mathrm{d}t = \int_0^\pi \sqrt{2 - \sin^2 t}\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int_0^\pi \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 t}\mathrm{d}t$$

Opět se jedná o eliptický integrál a hledáme hodnotu

$$2\sqrt{2}E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Nyní můžeme využít tabulované hodnoty, kde nalezneme, že

$$E\left(\frac{1}{1,42}\right) \approx 1,352688327$$

Délku můžeme tedy aproximovat jako

$$\int_0^\pi 1\sqrt{1 + \cos^2 t}\mathrm{d}t \approx 3,82598.$$

Př. 324 *Vypočtěte délku přirozeného logaritmu*

$$y = \ln x,$$

pro $x \in [1, 3]$.

Vidíme, že můžeme křivku parametrizovat jako $x = t$ a $y = \ln t$. Stejně tak můžeme však křivku parametrizovat jako $y = t$ a $x = \mathrm{e}^t$. Rozhodneme se pro jednu z těchto parametrizací a dostaneme

$$\int_1^3 1\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\mathrm{d}t = \int_1^3 \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} s = \sqrt{t^2+1} \\ \mathrm{d}s = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t = \frac{t}{s}\mathrm{d}t \\ t^2 = s^2 - 1 \end{array} \right| =$$
$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{10}} \frac{s^2}{t^2}\mathrm{d}s = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{10}} \frac{s^2-1+1}{s^2-1}\mathrm{d}s = [s]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{10}} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{s-1} + \frac{-1}{s+1}\mathrm{d}s =$$
$$= \sqrt{10} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\left[\ln|s-1| - \ln|s+1|\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{10}} = \sqrt{10} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1} - \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

Př. 325 *Vypočtěte hmotnost křivky, která vznikne průnikem válce $x^2 + y^2 = 4$ a parabolického válce $z = \frac{x^2}{2}$ s hustotou danou jako $\rho(x, y, z) = x^2 - y^2$.*

Křivku můžeme parametrizovat různými způsoby. První parametrizaci dostaneme nadvakrát přes $x = t$, $y = \pm\sqrt{4 - t^2}$ a $z = \frac{t^2}{2}$, pro $t \in [-2, 2]$. Druhou parametrizaci dostaneme skrze polární souřadnice jako $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = 2\cos^2 t$, pro $t \in [0, 2\pi]$. Zvolíme jednu z těchto parametrizací a dosadíme do vzorce

$$\int_0^{2\pi} \left(4\cos^2 t - 4\sin^2 t\right) \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + 16\cos^2 t \sin^2 t}\,\mathrm{d}t =$$
$$= 8\int_0^{2\pi} \cos(2t)\sqrt{1 + 4\cos^2 t \sin^2 t}\,\mathrm{d}t = 8\int_0^{2\pi} \cos(2t)\sqrt{1 + \sin^2 2t}\,\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} s = \sin 2t \\ \mathrm{d}s = 2\cos 2t\mathrm{d}t \end{array} \right| =$$
$$= 4\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + s^2}\,\mathrm{d}s$$

Tento integrál dostaneme jako 4 násobek délky oblouku paraboly $y = \frac{x^2}{2}$ na intervalu $[0, 2\pi]$, jak můžeme zjistit také z příkladu 322. Počítáme tedy

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + s^2}\,\mathrm{d}s = \left| \begin{array}{c} s = \sinh u \\ \mathrm{d}s = \cosh u\mathrm{d}u \end{array} \right| = \int_0^{\operatorname{arcsinh}(2\pi)} \cosh u\sqrt{1 + \sinh^2 u}\,\mathrm{d}u =$$
$$= \int_0^{\sinh(2\pi)} \cosh u\sqrt{\cosh^2 u}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\operatorname{arcsinh}(2\pi)} \cosh^2 u\,\mathrm{d}u = \int_0^{\operatorname{arcsinh}(2\pi)} \left(\frac{\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u}}{2}\right)^2 \mathrm{d}u =$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\operatorname{arcsinh}(2\pi)} \mathrm{e}^{2u} + 2 + \mathrm{e}^{-2u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\left[\frac{\mathrm{e}^{2u}}{2} + 2u - \frac{\mathrm{e}^{-2u}}{2}\right]_0^{\operatorname{arcsinh}(2\pi)} =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{e}^{2\operatorname{arcsinh}(2\pi)}}{2} + 2\operatorname{arcsinh}(2\pi) - \frac{\mathrm{e}^{-2\operatorname{arcsinh}(2\pi)}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) =$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{2\operatorname{arcsinh}(2\pi)}}{8} + \frac{\operatorname{arcsinh}(2\pi)}{2} - \frac{\mathrm{e}^{-2\operatorname{arcsinh}(2\pi)}}{8}$$

Hodnotu $\operatorname{arcsinh} x$ nyní musíme zjistit. Jedná se o inverzi k hyperbolickému sinu, máme tedy $\operatorname{arcsinh}(2\pi) \approx 2.537298$. Snadno tak dopočítáme hledanou hodnotu.

Př. 326 *Spočtěte hmotnost křivky, která vznikne průnikem válce $x^2+y^2=4$ a roviny $x+z=2$, $x \geq 0$, za předpokladu že máme její hustotu $\rho(x,y,z)=x$.*

Křivku můžeme parametrizovat různými způsoby. První parametrizaci dostaneme nadvakrát přes $x=t$, $y=\pm\sqrt{4-t^2}$ a $z=2-t$, pro $t \in [-2,2]$. Druhou parametrizaci dostaneme skrze polární souřadnice jako $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $z=2-2\cos t$, pro $t \in [0,\pi]$. Zvolíme jednu z těchto parametrizací a dosadíme do vzorce

$$\int_0^\pi 2\sin t\sqrt{4\sin^2 t+4\cos^2 t+4\sin^2 t}\mathrm{d}t = 4\int_0^\pi \sin t\sqrt{1+\sin^2 t}\mathrm{d}t = 8\int_0^{\pi/2} \sin t\sqrt{1+\sin^2 t}\mathrm{d}t =$$

$$= 8\int_0^{\pi/2} \sin t\sqrt{2-\cos^2 t}\mathrm{d}t = -8\int_1^0 \sqrt{2-s^2}\mathrm{d}t = 8\int_0^1 \sqrt{2-s^2}\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} s=\sqrt{2}\sin u \\ \mathrm{d}s=\sqrt{2}\cos u \end{array} \right| =$$

$$= 8\sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \cos u\sqrt{2-2\sin^2 u}\mathrm{d}t = 16\int_0^{\pi/4} \cos^2 u\mathrm{d}t = 16\int_0^{\pi/4} \frac{1+\cos 2u}{2}\mathrm{d}t =$$

$$= 8\left[u+\frac{\sin 2u}{2}\right]_0^{\pi/4} = 8\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) = 2\pi+4$$

Př. 327 *Nalezněte hmotnost křivky, která je dána jako $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, pro $t \in [0, 2\pi]$ a její hustota je $\rho(x, y, z) = 1 + x + z$.*

Můžeme rovnou dosadit do vzorce a máme

$$\int_0^{2\pi} (1 + \cos t + t) \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} \mathrm{d}t = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} 1 + \cos t + t \mathrm{d}t =$$

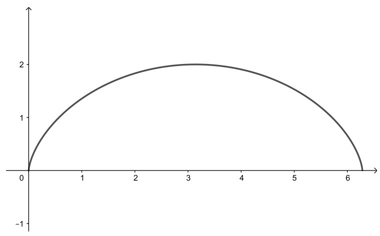
$$= \sqrt{2} \left[t + \sin t + \frac{t^2}{2} \right]_0^{2\pi} = \sqrt{2} \left(2\pi + \frac{4\pi^2}{2} \right) = 2\sqrt{2} \left(\pi + \pi^2 \right)$$

Př. 328 *Určete délku cykloidy, která je dána parametricky jako $x = At - A\sin t$, $y = A - A\cos t$, pro $t \in [0, 2\pi]$.*

Abychom určili délku křivky, musíme spočítat $\int_C 1\mathrm{d}s$, přes danou křivku C. Dostaneme integrál

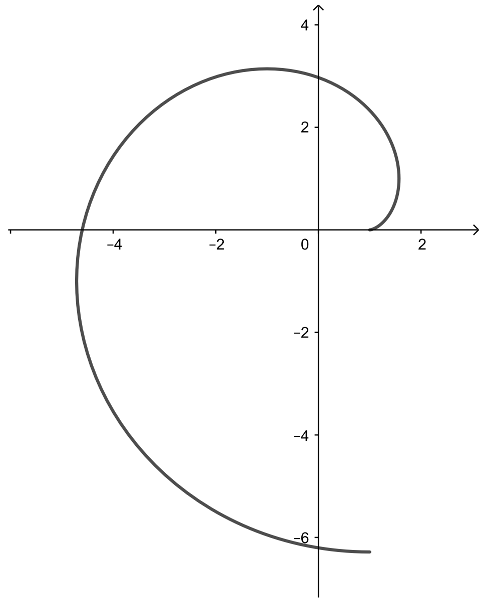
$$\int_0^{2\pi} 1\sqrt{(A - A\cos t)^2 + A^2\sin^2 t}\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{A^2 - 2A^2\cos t + A^2\cos t + A^2\sin^2 t}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{2A^2 - 2A^2\cos t}\mathrm{d}t =$$
$$\left|\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1-\cos t}{2}\right| = \sqrt{2}A\int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t =$$
$$= |\sin t \text{ je na } [0,\pi] \text{ kladný}| = 2A\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t =$$
$$= 2A\left[-2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = 4A(-\cos\pi + \cos 0) = 8A$$

Pro $A = 1$ cykloida vypadá jako



Př. 329 *Určete délku evolventy, kružnice dané parametricky jako* $x = r(\cos t + t \sin t)$, $y = r(\sin t - t \cos t)$, *pro* $t \in [0, 2\pi]$.

Pro jisté r vypadá křivka jako:



Počítáme

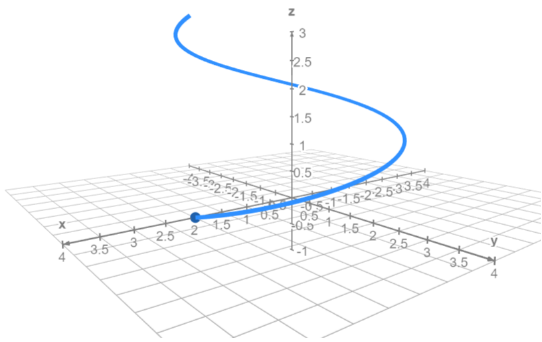
$$\int_0^{2\pi} 1\sqrt{r^2(-\sin t + \sin t + t\cos t)^2 + r^2(\cos t - \cos t + t \sin t)^2}\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{2\pi} r\sqrt{t^2(\cos^2 t + \sin^2 t)}\mathrm{d}t = r\int_0^{2\pi} t\mathrm{d}t = r\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 2r\pi^2$$

Př. 330 *Určete délku jednoho závitu šroubovice, která je dána rovnicemi $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{3}{2\pi}t$, pro $t \in [0, 2\pi]$.*

Počítáme

$$\int_0^{2\pi} 1\sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{9}{4\pi^2}}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1\sqrt{4 + \frac{9}{4\pi^2}}\mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{4 + \frac{9}{4\pi^2}} =$$
$$= \sqrt{16\pi^2 + 9}$$

Závit šroubovice vypadá jako

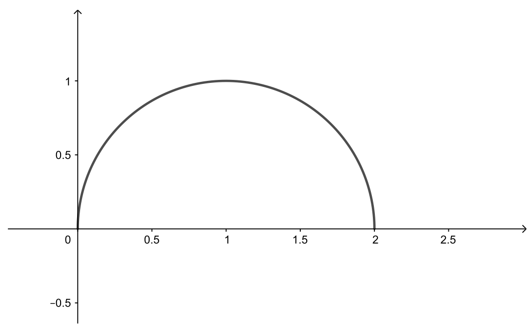


Př. 331 *Určete hmotnost části kružnice $x^2 + y^2 = 2x$, $y \geq 0$, je-li její délková hustota přímo úměrná vzdálenosti bodu od počátku.*

Úpravou na čtverec zjistíme, že křivka popisuje horní část kružnice s poloměrem 1 a středem $[1, 0]$. Tato křivka je tedy dána parametrizací $x = \cos t + 1$, $y = \sin t$, pro $t \in [0, \pi]$. Vzdálenost bodu $[x, y]$ od počátku je dána funkcí $\sqrt{x^2 + y^2}$, což udává hustotu bodu $[x, y]$. Abychom zjistili hmotnost křivky, počítáme

$$\int_C \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s = \int_0^\pi \sqrt{(\cos t+1)^2+\sin^2 t}\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^\pi \sqrt{2+2\cos t}\mathrm{d}t = \left|\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1+\cos t}{2}\right| = \sqrt{2}\int_0^\pi \sqrt{2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t =$$
$$= |\cos t \text{ je na } [0,\pi/2] \text{ kladný}| = 2\int_0^\pi \cos\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t = 2\left[2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^\pi = 4$$

Křivka vypadá jako



Př. 332 *Vypočtěte hmotnost křivky $x = A\cos t$, $y = B\sin t$, pro $t \in [0, 2\pi]$, $A > B > 0$, jejíž hustota je dána funkcí $h(x,y) = |y|$.*

Počítáme hmotnost elipsy, kterou získáme skrze křivkový integrál prvního druhu. Elipsu máme danou parametricky, stačí počítat integrál

$$
\begin{aligned}
&\int_C h(x,y)\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} |B\sin t|\sqrt{A^2\sin^2 t + B^2\cos^2 t}\mathrm{d}t = \\
&= 2\int_0^{\pi} B\sin t\sqrt{A^2 + (B^2 - A^2)\cos^2 t}\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} \frac{A}{\sqrt{A^2-B^2}}\sin z = \cos t \\ \frac{A}{\sqrt{A^2-B^2}}\cos z\mathrm{d}z = -\sin t\mathrm{d}t \end{array} \right| = \\
&= -2B\int_{-\arcsin C}^{\arcsin C} \frac{A}{\sqrt{A^2-B^2}}\sqrt{A^2-B^2}\cos z\sqrt{\frac{A^2}{A^2-B^2} - \frac{A^2}{A^2-B^2}\sin^2 z}\mathrm{d}z = \\
&= \frac{2BA^2}{\sqrt{A^2-B^2}}\int_{-\arcsin C}^{\arcsin C} \cos z\sqrt{\cos^2 z}\mathrm{d}z = \frac{2BA^2}{\sqrt{A^2-B^2}}\left[\frac{z}{2} + \frac{\sin 2z}{4}\right]_{-\arcsin C}^{\arcsin C} = \\
&= \frac{2BA^2}{\sqrt{A^2-B^2}}\left(\arcsin C + \frac{\sin 2\arcsin C}{2}\right) = \frac{2BA^2}{\sqrt{A^2-B^2}}\left(\arcsin C + C\sqrt{1-C^2}\right)
\end{aligned}
$$

Kde máme $C = \frac{\sqrt{A^2-B^2}}{A}$ a využíváme rovnosti $\sin(2\arcsin C) = \frac{C\sqrt{1-C^2}}{2}$.

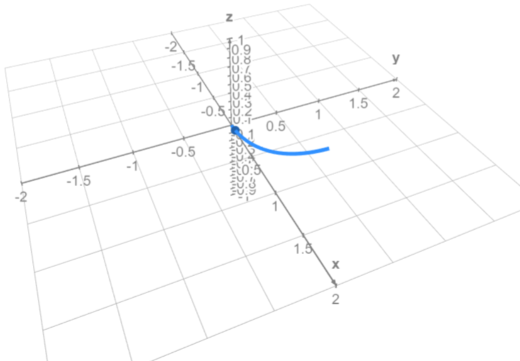
Př. 333 *Vypočtěte hmotnost křivky $x = At$, $y = \frac{A}{2}t^2$, $z = \frac{A}{3}t^3$ pro $t \in [0,1]$, $A > 0$, jejíž hustota je dána funkcí $h(x,y) = \sqrt{\frac{2y}{A}}$.*

Počítáme integrál

$$
\begin{aligned}
&\int_C h(x,y)\mathrm{d}s = \int_0^1 \sqrt{\frac{2A}{2A}t^2}\sqrt{A^2 + A^2t^2 + A^2t^4}\mathrm{d}t = A\int_0^1 t\sqrt{1+t^2+t^4}\mathrm{d}t = \\
&= \left| \begin{array}{c} z = t^2 \\ \mathrm{d}z = 2t\mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{A}{2}\int_0^1 \sqrt{1+z+z^2}\mathrm{d}z = \\
&= \frac{A}{2}\left[\frac{3\ln|2\sqrt{z^2+z+1}+2z+1| + (4z+2)\sqrt{z^2+z+1}}{8}\right]_0^1 = \\
&= \frac{A}{16}\left(3\ln(2\sqrt{3}+3) + 6\sqrt{3} - 3\ln 3 - 2\right)
\end{aligned}
$$

Integrál pod odmocninou lze získat více způsoby. Jeho vyřešení však není triviální.

Vyšetřovaná křivka vypadá pro $A = 1$ jako



Př. 334 *Spočtěte hmotnost funkce $f(x) = \cosh x$, je-li její hustota*

- $\rho_1(x, y) = 1.$
- $\rho_2(x, y) = \frac{1}{y^3}.$

Křivku parametrizujeme jednoduše jako $x = t$ a $y = \cosh t$, pro $t \in (-\infty, \infty)$. Poté platí $x' = 1$ a $y' = \sinh t$. Máme tedy integrál

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \sqrt{1 + \sinh^2 t} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\cosh^2 t} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \cosh t \mathrm{d}t = \\ &= [\sinh t]_{-\infty}^{\infty} = \lim_{t \to \infty} \sinh t - \lim_{t \to -\infty} \sinh t = \infty\end{aligned}$$

Podle očekávání vidíme, že nekonečná křivka s rovnoměrnou hustotou má také nekonečnou váhu. Druhá možnost nám dává

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh^3 t} \cdot \sqrt{1 + \sinh^2 t} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh^2 t} \mathrm{d}t = \left[\frac{\sinh t}{\cosh t}\right]_{-\infty}^{\infty} = \\ &= \lim_{t \to \infty} \frac{\sinh t}{\cosh t} - \lim_{t \to -\infty} \frac{\sinh t}{\cosh t} = 2 \lim_{t \to \infty} \frac{\sinh t}{\cosh t} = 2 \lim_{t \to \infty} \tanh t = 2 \lim_{t \to \infty} \frac{\mathrm{e}^{2t} - 1}{\mathrm{e}^{2t} + 1} = 2\end{aligned}$$

Zde využíváme vztahů pro hyperbolický tangens. Můžeme tento vzorec získat také pokud uvážíme, že

$$\begin{aligned}\sinh x &= \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \\ \cosh x &= \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}.\end{aligned}$$

Př. 335 *Nalezněte těžiště čtyřúhelníku spojujícího body* $[0,0]$, $[1,0]$, $[0,1]$, $[2,2]$, *je-li hustota křivky dána jako* $\rho(x,y) = x + y$.

Vidíme, že tento čtyřúhelník můžeme parametrizovat přes 4 úsečky. Dostaneme

$$\begin{aligned} C_1 : x &= 0, & C_3 : x &= 1+t, \\ y &= t, & y &= 2t, \\ C_2 : x &= 2t, & C_4 : x &= t, \\ y &= 1+t, & y &= 0, \end{aligned}$$

vždy pro $t \in [0,1]$. Začneme výpočtem hmotnosti křivky, počítáme

$$\begin{aligned} m &= \int_0^1 (0+t)\cdot\sqrt{1} + (2t+1+t)\cdot\sqrt{4+1} + (1+t+2t)\cdot\sqrt{1+4} + (t+0)\cdot\sqrt{1}\mathrm{d}t = \\ &= 2\int_0^1 t + (3t+1)\sqrt{5} = 2\int_0^1 t + (3t+1)\sqrt{5}\mathrm{d}t = 2\left[\frac{t^2}{2} + 3\sqrt{5}\frac{t^2}{2} + \sqrt{5}t\right]_0^1 = \\ &= 2\left(\frac{1}{2} + 3\sqrt{5}\frac{1}{2} + \sqrt{5}\right) = 2\frac{1+5\sqrt{5}}{2} = 1 + 5\sqrt{5} \end{aligned}$$

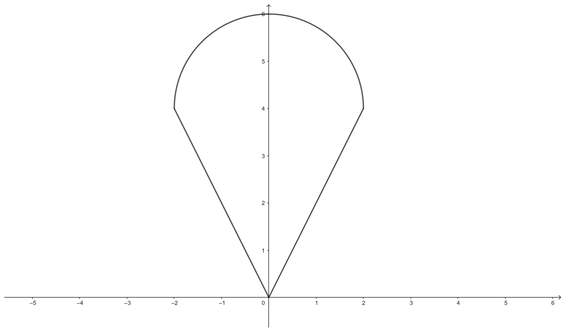
Následně potřebujeme spočíst statické momenty

$$\begin{aligned} S_x &= \int_C y\rho\mathrm{d}s = \int_0^1 t\cdot t\sqrt{1} + (1+t)\cdot(3t+1)\sqrt{4+1} + 2t\cdot(1+3t)\sqrt{1+4} + 0\cdot t\sqrt{1}\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^1 t^2 + (3t+1+3t^2+t+2t+6t^2)\sqrt{5}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3} + (3t^2+t+3t^3)\sqrt{5}\right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{3} + 7\sqrt{5} \\ S_y &= \int_C x\rho\mathrm{d}s = \int_0^1 0\cdot t\sqrt{1} + 2t\cdot(3t+1)\sqrt{4+1} + (1+t)\cdot(1+3t)\sqrt{1+4} + t\cdot t\sqrt{1}\mathrm{d}t = \\ &= \cdots = \frac{1}{3} + 7\sqrt{5} \end{aligned}$$

S těmito momenty pak spočteme souřadnice těžiště

$$T = \left[\frac{S_x}{m}, \frac{S_y}{m}\right] = \left[\frac{\frac{1}{3}+7\sqrt{5}}{1+5\sqrt{5}}, \frac{\frac{1}{3}+7\sqrt{5}}{1+5\sqrt{5}}\right]$$

Př. 336 *Spočtěte těžiště draka, který je nakreslen na obázku.*



jehož hustota lineárně roste směrem k vrchu.

Budeme chtít popsat křivku parametricky a vidíme, že se drak skládá z půlkružnice o poloměru 2. Jeho další části jsou pak tvořeny přímkami. Dostaneme parametrizaci

$$\begin{array}{ccc} C_1 : x = 2\cos t, & C_2 : x = t, & C_3 : x = t, \\ y = 2\sin t, & y = 2t, & y = -2t, \\ \text{pro } t \in [0, \pi] & \text{pro } t \in [0, 2] & \text{pro } t \in [-2, 0] \end{array}$$

Abychom nalezli těžiště, potřebujeme spočíst její hmotnost. Hustota křivky je dána jako $\rho(x, y) = Ay$, kde A je neznámá kladná konstanta. Počítáme tedy hmotnost

$$\begin{aligned} m_1 &= \int_0^\pi 2A\sin t\sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}\mathrm{d}t = 8A\int_0^\pi \sin t\mathrm{d}t = 8A\left[-\cos t\right]_0^\pi = 16A\pi^2 \\ m_2 &= \int_0^2 2At\sqrt{1+4}\mathrm{d}t = \sqrt{5}\left[At^2\right]_0^2 = 4\sqrt{5}A \\ m_3 &= \int_{-2}^0 -2At\sqrt{1+4}\mathrm{d}t = \sqrt{5}\left[-At^2\right]_{-2}^0 = 4\sqrt{5}A \end{aligned}$$

Celkovou hmotnost tedy dostaneme jako

$$m = m_1 + m_2 + m_3 = 16A\pi^2 + 8\sqrt{5}A$$

Nyní už zbývá dopočítat jen statické momenty

$$\begin{aligned} S_x &= \int_C y\rho(x,y)\mathrm{d}s = \int_0^\pi 4A\sin^2 t\sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}\mathrm{d}t + \int_0^2 4At^2\sqrt{5}\mathrm{d}t + \int_{-2}^0 4At^2\sqrt{5}\mathrm{d}t = \\ &= 16A\left[-\frac{\sin 2x - 2x}{4}\right]_0^\pi + 4A\sqrt{5}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 + 4A\sqrt{5}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-2}^0 = 8A\pi + \frac{32}{3}A\sqrt{5} + \frac{32}{3}A\sqrt{5} = \\ &= 8A\pi + \frac{64}{3}A\sqrt{5} \\ S_y &= \int_C x\rho(x,y)\mathrm{d}s = \int_0^\pi 4A\sin t\cos t\sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}\mathrm{d}t + \int_0^2 2At^2\sqrt{5}\mathrm{d}t - \int_{-2}^0 2At^2\sqrt{5}\mathrm{d}t = \\ &= 8A\int_0^\pi \sin 2t\mathrm{d}t + 2A\sqrt{5}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 t^2\mathrm{d}t - 2A\sqrt{5}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-2}^0 = 8A\left[-\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^\pi = 0 \end{aligned}$$

Těžiště má tedy souřadnice

$$T = \left[\frac{8A\pi + \frac{64}{3}A\sqrt{5}}{16A\pi^2 + 8\sqrt{5}A}, 0\right] = \left[\frac{\pi + \frac{8}{3}\sqrt{5}}{2\pi^2 + \sqrt{5}}, 0\right].$$

9 Křivkový integrál 2.druhu

Jsou-li funkce $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ spojité ve všech bodech křivky C parametrizované jako $x = \alpha(t)$, $y = \beta(t)$, $z = \gamma(t)$, pro $t \in [A, B]$, pak křivkový integrál druhého druhu můžeme psát jako

$$\begin{aligned}&\int_C P(x, y, z)\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\mathrm{d}y + R(x, y, z)\mathrm{d}z = \\ &= \int_A^B P(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))\alpha'(t) + Q(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))\beta'(t) + R(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Je-li $P(x, y, z)\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\mathrm{d}y + R(x, y, z)\mathrm{d}z$ diferenciál nějaké funkce na množině V, pak pokud je C křivka ležící ve V, tak

$$\int_C P(x, y, z)\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\mathrm{d}y + R(x, y, z)\mathrm{d}z = F(B) - F(A),$$

kde A je počáteční bod C a B je koncový bod C.

Je-li V souvislá množina a P, Q, R mají spojité parciální derivace, pak funkce $F(x, y, z)$ existuje, pokud

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}P(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x}Q(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial z}P(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x}R(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial z}Q(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial y}R(x, y, z)\end{aligned}$$

Př. 337 *Vypočtěte integrál*

$$\int_C -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y \qquad \textit{pro} \qquad C : x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0,$$

kde C je orientovaná po směru ručiček.

Jedná se o část kružnice s poloměrem 2, parametrizujeme tedy křivku jako $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, pro $t \in [0, \pi/2]$. Vidíme, že tato parametrizace je opačná oproti orientaci křivky. Dostáváme integrál

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} -2\sin t(-2\sin t) + 2\cos t 2\cos t \mathrm{d}t = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\mathrm{d}t = -4\,[4t]_0^{\frac{\pi}{2}} = -2\pi$$

Př. 338 *Spočtěte integrál*

$$\int_C 3\mathrm{d}y,$$

kde $C : x^2 + y^2 = 4,\ y \geq 0$ *orientovaná od bodu* $[-2, 0]$ *k bodu* $[2, 0]$.

Začneme tím, že parametrizujeme kružnici jako $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, pro $t \in [0, \pi]$. Tato parametrizace začíná pro $t = 0$ v bodě $[2, 0]$. Tedy je tato parametrizace nesouhlasná s orientací křivky, dostáváme integrál

$$-\int_0^\pi 0 \cdot (-2\sin t) + 3 \cdot 2\cos t\mathrm{d}t = -6\int_0^\pi \cos t\mathrm{d}t = -6\left[\sin t\right]_0^\pi = 0$$

Př. 339 *Spočtěte integrál*

$$\int_C 2\mathrm{d}x,$$

kde $C : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, $y \geq 0$ *orientovaná od bodu* $[-2, 0]$ *k bodu* $[2, 0]$.

Nejprve parametrizujeme křivku obvyklou parametrizací pro elipsy $x = 2\cos t$, $y = 3\sin t$, pro $t \in [0, \pi]$. Tato parametrizace pro $t = 0$ začíná v bodě $[2, 0]$. Vidíme tedy, že zvolená parametrizace není souhlasná s orientací. Dostáváme integrál

$$-\int_0^\pi 2 \cdot (-2\sin t) + 0 \cdot (2\cos t)\mathrm{d}t = 4\int_0^\pi \sin t\mathrm{d}t = 4\left[-\cos t\right]_0^\pi = 8$$

Př. 340 *Spočtěte integrál*

$$\int_C x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y,$$

kde $C : y = \frac{x^2}{2}$, *orientovaná od bodu* $[-2, 2]$ *k bodu* $[2, 2]$.

Chceme parametrizovat křivku nejsnazší parametrizací $x = t$, $y = \frac{t^2}{2}$, pro $t \in [-2, 2]$. Tato parametrizace začíná pro $t = -2$ v bodě $[-2, 2]$. Proto je tato parametrizace souhlasná s orientací křivky. Počítáme

$$\int_{-2}^{2} t \cdot 1 + \frac{t^2}{2} \cdot t\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8}\right]_{-2}^{2} = \frac{4}{2} + \frac{16}{8} - \frac{4}{2} - \frac{16}{8} = 0$$

Př. 341 *Spočtěte integrál*

$$\int_C y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y,$$

kde $C : y = \mathrm{e}^{x/2} + \mathrm{e}^{-x/2}$, *začínající pro* $x = 2$ *a končící pro* $x = -2$.

Nejdříve parametrizujeme křivku nejsnazší parametrizací $x = t$, $y = \mathrm{e}^{t/2} + \mathrm{e}^{-t/2}$, pro $t \in [-2, 2]$. Vidíme, že tato parametrizace nesouhlasí s orientací křivky. Dostaneme

$$- \int_{-2}^{2} \left(\mathrm{e}^{t/2} + \mathrm{e}^{-t/2}\right) \cdot 1 + t \cdot \left(\frac{\mathrm{e}^{x/2} - \mathrm{e}^{-x/2}}{2}\right) = |\text{základní vzorec a per partes }| =$$

$$= - \left[2\,\mathrm{e}^{t/2} - 2\,\mathrm{e}^{-t/2} + (t-2)\,\mathrm{e}^{t/2} + (t-2)\,\mathrm{e}^{-t/2}\right]_{-2}^{2} = -2\,\mathrm{e}^{1} + 2\,\mathrm{e}^{-1} + 2\,\mathrm{e}^{-1} - 2\,\mathrm{e}^{1} - 4\,\mathrm{e}^{-1} - 4\,\mathrm{e}^{1} = 0$$

Př. 342 *Vypočtěte integrál*

$$\int_C \left(x - \frac{1}{y}\right) \mathrm{d}y \qquad pro \qquad C : y = x^2, 1 \leq x \leq 2,$$

kde $[1, 1]$ *je počátečním bodem.*

Křivka je daná explicitně, parametrizujeme ji tedy jednoduše jako $x = t$, $y = t^2$, pro $t \in [1, 2]$. Počítáme

$$\int_1^2 \left(t - \frac{1}{t^2}\right) 2t\mathrm{d}t = \left[\frac{2t^3}{3} - 2\ln|t|\right]_1^2 = \frac{16}{3} - \ln 2^2 - \frac{2}{3} + 0 = \frac{14}{3} - \ln 4$$

Př. 343 *Vypočtěte integrál*

$$\int_C x^2 \mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z \qquad \textit{pro} \qquad C : x^2 + y^2 = z^2, z = 1, x \geq 0, y \geq 0,$$

kde počáteční bod má nejmenší vzdálenost od osy x.

Vidíme, že se jedná o kružnici ve výšce 1 nad prvním kvadrantem. Libovolný bod křivky tak bude mít od osy x vzdálenost větší než 1, díky trojúhelníkové nerovnosti. Avšak bod ležící nad osou x má vzdálenost pouze 1, jedná se tedy o počáteční bod. Volíme parametrizaci $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 1$, pro $t \in [0, \pi/2]$. Vidíme, že křivka je orientovaná souhlasně. Počítáme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t(-\sin t) + \sin t \cos t + 1 \cdot 0\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t - \cos^2 t) \sin t\mathrm{d}t =$$
$$= \left| \begin{array}{c} u = \cos t \\ \mathrm{d}u = -\sin t\mathrm{d}t \end{array} \right| = -\int_1^0 u - u^2 \mathrm{d}u = \left[\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

Př. 344 *Vypočtěte integrál*

$$\int_C (xy - y^2)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y \qquad \textit{pro} \qquad C : y^2 = 4x, 0 \leq x \leq 1,$$

kde křivka je orientovaná zprava doleva.

Křivku je dána explicitně, parametrizujeme ji tedy jako $y = t$, $x = \frac{t^2}{4}$, pro $t \in [0, 2]$. Vidíme, že křivka je orientovaná od bodu $[1, 2]$ do bodu $[0, 0]$. Máme tedy nesouhlasnou parametrizaci. Počítáme

$$-\int_0^2 \left(\frac{t^3}{4} - t^2\right)\frac{2t}{4} + \frac{t^2}{4} \cdot 1\mathrm{d}t = -\left[\frac{t^5}{40} - \frac{t^4}{8} + \frac{t^3}{12}\right]_0^2 = -\left(\frac{32 - 80}{40} + \frac{2}{3}\right) =$$
$$= \frac{8}{15}$$

Př. 345 *Vypočtěte integrál*

$$\int_C y\mathrm{d}x + 2x\mathrm{d}y \qquad \textit{pro} \qquad C : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, y \geq 0,$$

kde křivka je orientovaná tak, že počáteční bod má největší $x-$ovou souřadnici.

Jedná se o horní část elipsy, kterou parametrizujeme jako $x = \cos t$, $y = 2\sin t$, pro $t \in [0, \pi]$ a křivka je parametrizovaná souhlasně. Počítáme

$$\int_0^\pi 2\sin t(-\sin t) + 2\cos t \cdot 2\cos t\mathrm{d}t = \int_0^\pi 2\cos^2 t - 2 + 4\cos^2 t\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^\pi 6\cos^2 t - 2\mathrm{d}t = \int_0^\pi 3(1 + \cos 2t) - 2\mathrm{d}t = \left[t + \frac{3\sin 2t}{2}\right]_0^\pi = \pi$$

Př. 346 *Vypočtěte integrál*

$$\int_C y(x^2+1)\mathrm{d}x + x(y^2-1)\mathrm{d}y$$

kde C je hranice oblasti $M : x^2+y^2-2x \leq 0, y \geq 0$ a je orientovaná kladně.

Křivku máme danou jako $x^2+y^2-2x=0$ pro $y \geq 0$. Úpravou na čtverec dostaneme $(x-1)^2+y^2=1$ a tedy se jedná o kružnici se středem $[1,0]$ a poloměrem 1. Parametrizaci dostaneme jako $x = 1+\cos t$, $y = \sin t$, pro $t \in [0,\pi]$. Křivka je pak parametrizovaná souhlasně. Počítáme

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \sin t[(1+\cos t)^2+1](-\sin t) + (1+\cos t)(\sin^2 t - 1)\cos t\mathrm{d}t = \\
&= \int_0^\pi -\sin^2 t(2+2\cos t+\cos^2 t) - (1+\cos t)\cos^2 t\cos t\mathrm{d}t = \\
&= \int_0^\pi (\cos^2 t-1)(2+2\cos t+\cos^2 t) - \cos^3 t - \cos^4 t\mathrm{d}t = \\
&= \int_0^\pi \cos^3 t + \cos^2 t - 2\cos t - 2\mathrm{d}t = \\
&= \int_0^\pi \cos^3 t - 2\cos t\mathrm{d}t + \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} - 2t\right]_0^\pi = \left[-\frac{3t}{2}\right]_0^\pi = -\frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

Neboť $\int_0^\pi \cos^3 t - 2\cos t\mathrm{d}t = 0$, neboť funkce je „lichá“ přes bod $x = \frac{\pi}{2}$ a tedy plocha nad grafem i pod grafem je na $[0,\pi]$ stejná.

Př. 347 *Vypočtěte integrál*

$$\int_C (x^2+y^2)\mathrm{d}x + (xy-y^2)\mathrm{d}y$$

kde C je hranice oblasti $M : x^2+y^2 \leq 5$ a je orientovaná kladně.

Křivku máme danou jako $x^2+y^2=5$. Jedná se o kružnici s poloměrem $\sqrt{5}$, parametrizujeme ji tedy jako $x=\sqrt{5}\cos t$, $y=\sqrt{5}\sin t$, pro $t\in[0,2\pi]$ a křivka je parametrizovaná souhlasně. Počítáme

$$\int_0^{2\pi} (5\cos^2 t + 5\sin^2 t)(-\sqrt{5}\sin t) + (5\sin t\cos t - 5\sin^2 t)\sqrt{5}\cos t\mathrm{d}t =$$

$$= 5\sqrt{5}\,[\cos t]_0^{2\pi} + 5\sqrt{5}\int_0^{2\pi} \sin t\cos^2 t - \sin^2 t\cos t\mathrm{d}t = 0 + 5\sqrt{5}\cdot 0 = 0$$

Kde integrál $\int_0^{2\pi} \sin t\cos^2 t - \sin^2 t\cos t dt$ můžeme jednotlivě spočítat pomocí dvou substitucí, nebo si všimneme, že se jedná opět o funkce „liché“ přes střed intervalu.

Př. 348 *Vypočtěte integrál*

$$\int_C y^2 \mathrm{d}x - x^2 \mathrm{d}y$$

kde C je úsečka od bodu $[0,1]$ *k bodu* $[1,0]$.

Parametrizujeme úsečku jako $x = t$, $y = 1 - t$, pro $t \in [0,1]$c čímž dostaneme souhlasnou parametrizaci. Počítáme

$$\int_0^1 (1-t)^2 \cdot 1 - t^2 \cdot (-1)\mathrm{d}t = \int_0^1 1 - 2t + 2t^2 \mathrm{d}t = \left[t - t^2 + \frac{2t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Př. 349 *Vypočtěte integrál*

$$\int_C (x^2 - 2xy)\mathrm{d}x + (y^2 - 2xy)\mathrm{d}y$$

kde C je parabola $y = x^2$ pro $-1 \leq x \leq 1$ orientovaná zleva doprava.

Křivka je daná explicitně, parametrizujeme tedy křivku jako $x = t$, $y = t^2$, pro $t \in [-1, 1]$. Tato parametrizace je souhlasná s orientací křivky a dostáváme

$$\int_{-1}^{1} (t^2 - 2t^3) \cdot 1 + (t^4 - 2t^3)2t\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} 2t^5 - 4t^4 - 2t^3 + t^2\mathrm{d}t =$$
$$= \left[\frac{2t^6}{6} - \frac{4t^5}{5} - \frac{2t^4}{4} + \frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{2}{6} - \frac{4}{5} - \frac{2}{4} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{2}{6} + \frac{4}{5} - \frac{2}{4} - \frac{1}{3}\right) =$$
$$= -\frac{14}{15}$$

Př. 350 *Vypočtěte integrál*

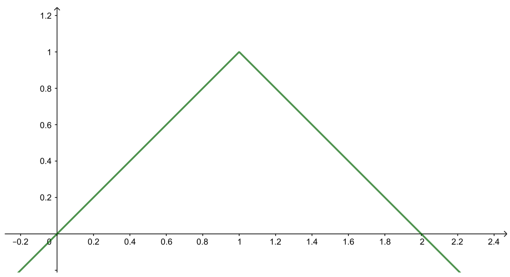
$$\int_C (x^2+y^2)\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\mathrm{d}y$$

kde C je křivka $y = 1 - |1-x|$ pro $0 \le x \le 2$ orientovaná zleva doprava.

Nejdříve parametrizujeme křivku jako $x = t$, $y = t$, pro $t \in [0,1]$ a $x = t$, $y = 2-t$, pro $t \in [1,2]$. Tato parametrizace je souhlasná s orientací, dostáváme

$$\int_0^1 (t^2+t^2)1 + (t^2-t^2)1\mathrm{d}t + \int_1^2 (t^2+(2-t)^2)1 + (t^2-(2-t)^2)(-1)\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^1 2t^2\mathrm{d}t + \int_1^2 (2t^2-4t+4)-(4t-4)\mathrm{d}t = \left[\frac{2t^3}{3}\right]_0^1 + \int_1^2 2t^2-8t+8\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{2}{3} + \left[\frac{2t^3}{3} - 4t^2 + 8t\right]_1^2 = \frac{2}{3} + \left(\frac{16}{3} - 16 + 16 - \frac{2}{3} + 4 - 8\right) = \frac{4}{3}$$

Funkce popisující křivku vypadá jednoduše jako



Př. 351 *Vypočtěte integrál*

$$\int_C (x+y)\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}y$$

kde C je elipsa $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$ orientovaná proti směru ručiček.

Parametrizujeme křivku C jako $x = A\cos t$, $y = B\sin t$, pro $t \in [0, 2\pi]$. Tato parametrizace není souhlasná s orientací. Počítáme

$$\begin{aligned}
&-\int_0^{2\pi} (A\cos t + B\sin t)(-A\sin t) + (A\cos t - B\sin t)B\cos t\mathrm{d}t = \\
&= -\int_0^{2\pi} -(A^2+B^2)\sin t\cos t + AB(\cos^2 t - \sin^2 t)\mathrm{d}t = \\
&= -\int_0^{2\pi} -\frac{A^2+B^2}{2}\sin 2t + AB\cos 2t\mathrm{d}t = \\
&= \frac{A^2+B^2}{4}\left[-\cos 2t\right]_0^{2\pi} - \frac{AB}{2}\left[\sin 2t\right]_0^{2\pi} = \frac{A^2+B^2}{4}(-1+1) - \frac{AB}{2}(0+0) = 0
\end{aligned}$$

Druhou možností je všimnout si, že $\frac{\partial}{\partial y}(x+y) = 1 = \frac{\partial}{\partial x}(x-y)$. Tedy se jedná o diferenciál nějaké funkce $F(x,y)$, proto přes uzavřenou křivku dostaneme, že integrál je 0.

Př. 352 *Vypočtěte integrál*

$$\int_C (2A - y)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$$

kde C *je oblouk cykloidy* $x = A(t - \sin t)$, $y = A(1 - \cos t)$, *pro* $t \in [0, 2\pi]$, $A > 0$.

Počítáme

$$\int_0^{2\pi} (2A - A + A\cos t)(A - A\cos t) + A(t - \sin t)A\sin t\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^{2\pi} A^2 - A^2\cos^2 t + A^2 t\sin t - A^2\sin^2 t\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} A^2 - A^2 + A^2 t\sin t\mathrm{d}t =$$
$$= |\text{per partes}| = A^2\left[\sin t - t\cos t\right]_0^{2\pi} = -2A^2\pi$$

Př. 353 *Vypočtěte integrál*

$$\int_C \frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x - \frac{x-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

kde C je kružnice $x^2+y^2=A^2$ orientovaná proti směru hodinových ručiček.

Jedná se o kružnici s poloměrem A, volíme tedy parametrizaci $x = A\cos t$, $y = A\sin t$, pro $t \in [0, 2\pi]$, kde parametrizace je souhlasná s orientací křivky

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{A^2}\int_0^{2\pi} A(\cos t + \sin t)(-A\sin t) - A(\cos t - \sin t)A\cos t\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{A^2}A^2\int_0^{2\pi} -\sin t\cos t - \sin^2 t - \cos^2 t + \sin t\cos t\mathrm{d}t = \\
&= -\int_0^{2\pi} 1\mathrm{d}t = -2\pi
\end{aligned}$$

Př. 354 *Vypočtěte integrál*

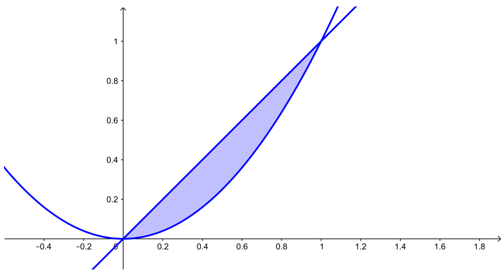
$$\int_C \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \mathrm{d}y - \mathrm{d}x$$

kde C je hranice množiny, která je dána jako $y \leq x$, $y \geq x^2$, orientovaná proti směru hodinových ručiček.

Křivku parametrizujeme po dvou částech, jako $x = t$, $y = t^2$, pro $t \in [0, 1]$, která je souhlasná. Druhou část parametrizujeme jako $x = t$, $y = t$, pro $t \in [0, 1]$, která není souhlasná. Počítáme

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 -1 \cdot 1 + \operatorname{arctg} \frac{t^2}{t} 2t \mathrm{d}t - \int_0^1 -1 \cdot 1 + \operatorname{arctg} \frac{t}{t} \cdot 1 \mathrm{d}t = \\
&= \int_0^1 2t \operatorname{arctg} t - 1 \mathrm{d}t - \int_0^1 -1 + \operatorname{arctg} 1 \mathrm{d}t = |\text{per partes}| = \\
&= \left[2 \frac{t^2 \operatorname{arctg} t + \operatorname{arctg} t - t}{2} - t + t(1 - \operatorname{arctg} 1) \right]_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - 1 = \frac{\pi}{4} - 1
\end{aligned}$$

Křivka je hranicí množiny



Př. 355 *Ověřte, že výraz je totálním diferenciálem nějaké funkce a vypočtěte integrál*

$$\int_C y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y,$$

kde křivka C vede od bodu $A = [-1, 2]$ do bodu $B = [2, 3]$.

Máme $P(x, y) = y$ a $Q(x, y) = x$, kde chceme ověřit, že $\frac{\partial}{\partial y}P(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}Q(x, y)$. Vskutku

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x, y) = 1 = \frac{\partial}{\partial x}Q(x, y)$$

Tedy se jedná o totálním diferenciálem nějaké funkce $F(x, y)$. Hledaný integrál získáme jako $F(B) - F(A)$. Neboť

$$\begin{aligned} F_x(x, y) &= P(x, y) \\ F(x, y) = \int F_x(x, y)\mathrm{d}x &= \int P(x, y)\mathrm{d}x = \int y\mathrm{d}x = xy + C(y), \end{aligned}$$

kde $C(y)$ je neznámá funkce proměnné y. Navíc platí $F_y(x, y) = Q(x, y)$ a tedy

$$\begin{aligned} x + C'(y) = F_y(x, y) &= x \\ C'(y) &= 0 \\ C(y) = \int C'(y)\mathrm{d}y &= \int 0\mathrm{d}y = K, \end{aligned}$$

kde $K \in \mathbb{R}$. Dostáváme tedy $F(x, y) = xy + K$ a proto $F(B) - F(A) = 6 - (-2) = 8$.

Př. 356 *Ověřte, že výraz je totálním diferenciálem nějaké funkce a vypočtěte integrál*

$$\int_C x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y,$$

kde křivka C *vede od bodu* $A = [0, 1]$ *do bodu* $B = [3, -4]$.

Máme $P(x, y) = x$ a $Q(x, y) = y$ a dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial y} P(x, y) = 0 = \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y)$$

Tedy se jedná o totálním diferenciálem nějaké funkce $F(x, y)$. Dostáváme

$$F(x, y) = \int F_x(x, y)\mathrm{d}x = \int P(x, y)\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + C(y),$$

kde $C(y)$ je neznámá funkce proměnné y. Navíc

$$C'(y) = y$$
$$C(y) = \int C'(y)\mathrm{d}y = \int y\mathrm{d}y = \frac{y^2}{2} + K,$$

kde $K \in \mathbb{R}$. Dostáváme tedy $F(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + K$ a proto $F(B) - F(A) = \frac{9}{2} + \frac{16}{2} - \frac{0}{2} - \frac{1}{2} = 4 + 8 = 12$.

Př. 357 *Ověřte, že výraz je totálním diferenciálem nějaké funkce a vypočtěte integrál*

$$\int_C (x+y)\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}y,$$

kde křivka C vede od bodu $A = [0,1]$ do bodu $B = [2,3]$.

Máme $P(x,y) = x + y$ a $Q(x,y) = x - y$ a dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial y} P(x,y) = 1 = \frac{\partial}{\partial x} Q(x,y)$$

Tedy se jedná o totálním diferenciálem nějaké funkce $F(x,y)$. Dostáváme

$$F(x,y) = \int F_x(x,y)\mathrm{d}x = \int P(x,y)\mathrm{d}x = \int x + y\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + xy + C(y),$$

kde $C(y)$ je neznámá funkce proměnné y. Navíc

$$x + C'(y) = x - y$$
$$C(y) = \int C'(y)\mathrm{d}y = \int -y\mathrm{d}y = -\frac{y^2}{2} + K,$$

kde $K \in \mathbb{R}$. Dostáváme tedy $F(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} + K$ a proto $F(B) - F(A) = \frac{4}{2} + 6 - \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 8 - 4 = 4$.

Př. 358 *Ověřte, že výraz je totálním diferenciálem nějaké funkce a vypočtěte integrál*

$$\int_C (x-y)\mathrm{d}x + (y-x)\mathrm{d}y,$$

kde křivka C *vede od bodu* $A = [1, -1]$ *do bodu* $B = [1, 1]$.

Máme $P(x, y) = x - y$ a $Q(x, y) = y - x$ a dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x, y) = -1 = \frac{\partial}{\partial x}Q(x, y)$$

Tedy se jedná o totálním diferenciálem nějaké funkce $F(x, y)$. Dostáváme

$$F(x, y) = \int F_x(x, y)\mathrm{d}x = \int P(x, y)\mathrm{d}x = \int x - y\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - xy + C(y),$$

kde $C(y)$ je neznámá funkce proměnné y. Navíc

$$-x + C'(y) = y - x$$
$$C(y) = \int C'(y)\mathrm{d}y = \int y\mathrm{d}y = \frac{y^2}{2} + K,$$

kde $K \in \mathbb{R}$. Dostáváme tedy $F(x, y) = \frac{x^2}{2} - xy + \frac{y^2}{2} + K = \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 + K$ a proto $F(B) - F(A) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2 = -2$

Př. 359 *Ověřte, že výraz je totálním diferenciálem nějaké funkce a vypočtěte integrál*

$$\int_C \frac{y}{x^2}\mathrm{d}x - \frac{1}{x}\mathrm{d}y,$$

kde křivka C vede od bodu $A = [2, 1]$ do bodu $B = [1, 2]$.

Máme $P(x, y) = \frac{y}{x^2}$ a $Q(x, y) = -\frac{1}{x}$ a dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x, y) = \frac{1}{x^2} = \frac{\partial}{\partial x}Q(x, y)$$

Tedy se jedná o totálním diferenciálem nějaké funkce $F(x, y)$. Dostáváme

$$F(x, y) = \int F_x(x, y)\mathrm{d}x = \int P(x, y)\mathrm{d}x = \int \frac{y}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{y}{x} + C(y),$$

kde $C(y)$ je neznámá funkce proměnné y. Navíc

$$\begin{aligned} -\frac{1}{x} + C'(y) &= -\frac{1}{x} \\ C(y) = \int C'(y)\mathrm{d}y &= \int 0\mathrm{d}y = K, \end{aligned}$$

kde $K \in \mathbb{R}$. Dostáváme tedy $F(x, y) = -\frac{y}{x} + K$ a proto $F(B) - F(A) = -\frac{2}{1} - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$

Př. 360 *Ověřte, že výraz je totálním diferenciálem nějaké funkce a vypočtěte integrál*

$$\int_C \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}y,$$

kde křivka C vede od bodu $A = [1,0]$ do bodu $B = [6,8]$ a neprochází počátkem.

Máme $P(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ a $Q(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ a dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x,y) = -\frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} = \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)$$

Tedy se jedná o totálním diferenciálem nějaké funkce $F(x,y)$. Dostáváme

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int F_x(x,y)\mathrm{d}x = \int P(x,y)\mathrm{d}x = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x = \\ &= \left| \begin{array}{c} t = x^2+y^2 \\ \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \sqrt{t} + C(y) = \sqrt{x^2+y^2} + C(y), \end{aligned}$$

kde $C(y)$ je neznámá funkce proměnné y. Navíc

$$\begin{aligned} \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} + C'(y) &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ C(y) = \int C'(y)\mathrm{d}y &= \int 0\mathrm{d}y = K, \end{aligned}$$

kde $K \in \mathbb{R}$. Dostáváme tedy $F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + K$ a proto $F(B) - F(A) = \sqrt{36+64} - 1 = 9$

Př. 361 *Ověřte, že výraz je totálním diferenciálem nějaké funkce a vypočtěte integrál*

$$\int_C (x^4 + 4xy^3)\mathrm{d}x + (6x^2y^2 - 5y^4)\mathrm{d}y,$$

kde křivka C vede od bodu $A = [-2, -1]$ do bodu $B = [3, 0]$.

Máme $P(x, y) = x^4 + 4xy^3$ a $Q(x, y) = 6x^2y^2 - 5y^4$ a dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x, y) = 12xy^2 = \frac{\partial}{\partial x}Q(x, y)$$

Tedy se jedná o totálním diferenciálem nějaké funkce $F(x, y)$. Dostáváme

$$F(x, y) = \int F_x(x, y)\mathrm{d}x = \int P(x, y)\mathrm{d}x = \int x^4 + 4xy^3\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{x^5}{5} + \frac{4x^2y^3}{2} + C(y) = \frac{x^5}{5} + 2x^2y^3 + C(y),$$

kde $C(y)$ je neznámá funkce proměnné y. Navíc

$$6x^2y^2 + C'(y) = 6x^2y^2 - 5y^4$$
$$C(y) = \int C'(y)\mathrm{d}y = \int -5y^4\mathrm{d}y = -y^5 + K,$$

kde $K \in \mathbb{R}$. Dostáváme tedy $F(x, y) = \frac{x^5}{5} + 2x^2y^3 - y^5 + K$ a proto $F(B) - F(A) = \frac{3^5}{5} - \left(-\frac{32}{5} - 8 + 1\right) = \frac{243+32}{5} + 7 = 62$

Př. 362 *Ověřte, že výraz je totálním diferenciálem nějaké funkce a vypočtěte integrál*

$$\int_C \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right) \mathrm{d}x + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right) \mathrm{d}y,$$

kde křivka C vede od bodu $A = [1, \pi]$ do bodu $B = [2, \pi]$, kde křivka C neprotíná osu y.

Máme $P(x, y) = \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)$ a $Q(x, y) = \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)$ a dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x, y) = -2\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x} = \frac{\partial}{\partial x}Q(x, y)$$

Tedy se jedná o totálním diferenciálem nějaké funkce $F(x, y)$. Dostáváme

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int F_y(x, y)\mathrm{d}x = \int Q(x, y)\mathrm{d}y = \int \sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\mathrm{d}y = \\ &= |\text{per partes}| = -x\cos\frac{y}{x} + y\sin\frac{y}{x} + x\cos\frac{y}{x} + C(x) = y\sin\frac{y}{x} + C(x), \end{aligned}$$

kde $C(x)$ je neznámá funkce proměnné x. Navíc

$$\begin{aligned} -\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x} + C'(x) &= 1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x} \\ C(x) &= \int C'(x)\mathrm{d}x = \int 1\mathrm{d}x = x + K, \end{aligned}$$

kde $K \in \mathbb{R}$. Dostáváme tedy $F(x, y) = y\sin\frac{y}{x} + x + K$ a proto $F(B) - F(A) = \pi\sin\frac{\pi}{2} + 2 - \pi\sin\pi - 1 = \pi + 1$

Př. 363 *Ověřte, že výraz je totálním diferenciálem nějaké funkce a vypočtěte integrál*

$$\int_C \mathrm{e}^x \cos y \mathrm{d}x - \mathrm{e}^x \sin y \mathrm{d}y,$$

kde křivka C vede od bodu $A = [0,0]$ do bodu $B = [M,N]$, kde $M, N \in \mathbb{R}$.

Máme $P(x,y) = \mathrm{e}^x \cos y$ a $Q(x,y) = -\mathrm{e}^x \sin y$ a dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial y} P(x,y) = -\mathrm{e}^x \sin y = \frac{\partial}{\partial x} Q(x,y)$$

Tedy se jedná o totálním diferenciálem nějaké funkce $F(x,y)$. Dostáváme

$$F(x,y) = \int F_x(x,y)\mathrm{d}x = \int P(x,y)\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x \cos y \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \cos y + C(y),$$

kde $C(y)$ je neznámá funkce proměnné y. Navíc

$$\begin{aligned} -\mathrm{e}^x \sin y + C'(y) &= -\mathrm{e}^x \sin y \\ C(y) = \int C'(y)\mathrm{d}y &= \int 0 \mathrm{d}y = K, \end{aligned}$$

kde $K \in \mathbb{R}$. Dostáváme tedy $F(x,y) = \mathrm{e}^x \cos y + K$ a proto $F(B) - F(A) = \mathrm{e}^M \cos N - 1$

Př. 364 *Vypočtěte integrál*

$$\int_C (y^2 - z^2)\mathrm{d}x + 2yz\mathrm{d}y - x^2\mathrm{d}z,$$

kde křivka C *je dána jako* $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, *pro* $t \in [0, 1]$ *orientovaná ve směru růstu parametru.*

Počítáme

$$\int_0^1 (t^4 - t^6) \cdot 1 + 2t^5 \cdot 2t - t^2 \cdot 3t^2\mathrm{d}t = \int_0^1 3t^6 - 2t^4\mathrm{d}t = \left[\frac{3t^7}{7} - \frac{2t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3}{7} - \frac{2}{5} = \frac{1}{35}$$

Př. 365 *Vypočtěte integrál*

$$\int_C y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z,$$

kde křivka C *je dána jako* $x = A\cos t$, $y = A\sin t$, $z = Bt$, *pro* $t \in [0, 2\pi]$ *orientovaná ve směru růstu parametru.*

Počítáme integrál

$$\int_0^{2\pi} A\sin t(-A\sin t) + BtA\cos t + A\cos tB\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} AB(t+1)\cos t - A^2\sin^2 t\mathrm{d}t =$$
$$= AB\left[(t+1)\sin t + \cos t\right]_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 - \cos 2t\mathrm{d}t = -\frac{A^2}{2}\left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{2\pi} = -A^2\pi$$

Př. 366 *Vypočtěte integrál*

$$\int_C y^2 \mathrm{d}x + z^2 \mathrm{d}y + x^2 \mathrm{d}z,$$

kde křivka C je dána průnikem ploch $x^2+y^2+z^2 = A^2$ a $x^2+y^2 = Ax$, $z \geq 0$, $A > 0$. Křivka C je orientovaná proti směru hodinových ručiček při pohledu shora.

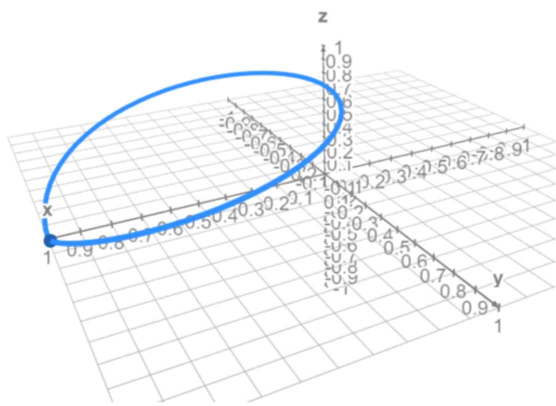
Nejdříve potřebujeme určit parametrizaci křivky. Vzhledem ke tvaru C můžeme zkusit vše transformovat do válcových souřadnic, neboť se jedná o průnik válce s poloměre $\frac{A}{2}$ a sféry s poloměrem A. Dostáváme $x = \frac{A}{2}\cos t + \frac{A}{2}$, $y = \frac{A}{2}\sin t$, $z = z$, pro $t \in [0, 2\pi]$. Následně máme

$$z = \sqrt{A^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{A^2 - Ax} = \sqrt{A^2 - \frac{A^2}{2}(1+\cos t)} = \sqrt{\frac{A^2}{2}(1-\cos t)}$$

Navíc je tato parametrizace souhlasná s orientací křivky. Dostáváme tak integrál jako

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} -\frac{A^3}{8}\sin^3 t + \frac{A^3}{4}(1-\cos t)\cos t + \frac{A^3}{8}\frac{\sin t(1+\cos t)}{\sqrt{2-2\cos t}}\mathrm{d}t = \\
&= \frac{A^3}{4}\left[\sin t - \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{2\pi} + \frac{A^3}{8}\left[\frac{\sqrt{2-2\cos x}(\cos x + 5)}{3}\right]_0^{2\pi} = \\
&= -\frac{A^3}{4}\pi
\end{aligned}$$

Hledaná křivka vypadá pro $A = 1$ jako



Př. 367 *Vypočtěte integrál*

$$\int_C (y^2 - z^2)\mathrm{d}x + (z^2 - x^2)\mathrm{d}y + (x^2 - y^2)\mathrm{d}z,$$

kde křivka C je hranice sféry, která je dána jako $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Využijeme sférické souřadnice $x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$. Křivka se skládá ze tří částí.

$$\begin{aligned} C_1 &: \rho = 1, \varphi = t, \theta = \frac{\pi}{2}, \text{ pro } t \in [0, \pi/2] \\ C_2 &: \rho = 1, \varphi = \pi/2, \theta = t, \text{ pro } t \in [0, \pi/2] \\ C_3 &: \rho = 1, \varphi = 0, \theta = t, \text{ pro } t \in [0, \pi/2] \end{aligned}$$

Musíme tedy počítat tři integrály. První z nich je

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t - 0)(-\sin t) + (0 - \cos^2 t)\cos t + (\cos^2 t - \sin^2 t) \cdot 0\mathrm{d}t = \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t + \cos^3 t\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} u = \cos t \\ \mathrm{d}u = -\sin t\mathrm{d}t \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} z = \sin t \\ \mathrm{d}z = \cos t\mathrm{d}t \end{array} \right| = \\ &= \int_1^0 1 - u^2\mathrm{d}u - \int_0^1 1 - z^2\mathrm{d}z = -2\left[z - \frac{z^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

Druhý pak

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t - \cos^2 t) \cdot 0 + (\cos^2 t - 0)\cos t + (0 - \sin^2 t)(-\sin t)\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t + \sin^3 t\mathrm{d}t = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Nakonec třetí integrál máme

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} (0 - \cos^2 t)\cos t + (\cos^2 t - \sin^2 t) \cdot 0 + (\sin^2 t - 0)(-\sin t)\mathrm{d}t = \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t + \sin^3 t\mathrm{d}t = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

Neboť je druhá křivka orientovaná opačně, než zbylé dvě, dostáváme celkem integrál jako ± 4, vzhledem k orientaci křivky C.

Př. 368 *Ověřte, že výraz je totálním diferenciálem nějaké funkce a vypočtěte integrál*

$$\int_C x\mathrm{d}x + y^2\mathrm{d}y - z^3\mathrm{d}z,$$

kde křivka C vede od bodu $A = [1, 1, 1]$ do bodu $B = [2, 3, -4]$.

Máme $P(x, y, z) = x$, $Q(x, y, z) = y^2$ a $R(x, y, z) = -z^3$, dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x, y, z) = 0 = \frac{\partial}{\partial x}Q(x, y, z)$$
$$\frac{\partial}{\partial z}P(x, y, z) = 0 = \frac{\partial}{\partial x}R(x, y, z)$$
$$\frac{\partial}{\partial z}Q(x, y, z) = 0 = \frac{\partial}{\partial y}R(x, y, z)$$

Tedy se jedná o totálním diferenciálem nějaké funkce $F(x, y, z)$. Dostáváme

$$F(x, y, z) = \int F_x(x, y, z)\mathrm{d}x = \int P(x, y, z)\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{x^2}{2} + C(y, z),$$

kde $C(y, z)$ je neznámá funkce. Navíc

$$C_y = F_y = Q(x, y, z) = y^2$$
$$C(y, z) = \int C'(y)\mathrm{d}y = \int y^2\mathrm{d}y = \frac{y^3}{3} + K(z),$$

kde $K(z)$ je neznámá funkce. Nakonec

$$K'(z) = F_z = R(x, y, z) = -z^3$$
$$K(z) = \int -z^3\mathrm{d}z = -\frac{z^4}{4} + L$$

Kde $L \in \mathbb{R}$. Dostáváme tedy $F(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{z^4}{4} + L$ a proto $F(B) - F(A) = \frac{4}{2} + \frac{27}{3} - \frac{4\cdot 64}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = -53 - \frac{7}{12}$.

Př. 369 *Ověřte, že výraz je totálním diferenciálem nějaké funkce a vypočtěte integrál*

$$\int_C yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z,$$

kde křivka C vede od bodu $A = [1,2,3]$ do bodu $B = [6,1,1]$.

Máme $P(x,y,z) = yz$, $Q(x,y,z) = xz$ a $R(x,y,z) = xy$, dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}P(x,y,z) = z = \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y,z)\\ \frac{\partial}{\partial z}P(x,y,z) = y = \frac{\partial}{\partial x}R(x,y,z)\\ \frac{\partial}{\partial z}Q(x,y,z) = x = \frac{\partial}{\partial y}R(x,y,z)\end{aligned}$$

Tedy se jedná o totálním diferenciálem nějaké funkce $F(x,y,z)$. Dostáváme

$$\begin{aligned}F(x,y,z) = \int F_x(x,y,z)\mathrm{d}x = \int P(x,y,z)\mathrm{d}x = \int yz\mathrm{d}x =\\ = xyz + C(y,z),\end{aligned}$$

kde $C(y,z)$ je neznámá funkce. Navíc

$$\begin{aligned}xz + C_y = F_y = Q(x,y,z) = xz\\ C(y,z) = \int C'(y)\mathrm{d}y = \int 0\mathrm{d}y = K(z),\end{aligned}$$

kde $K(z)$ je neznámá funkce. Tedy $F(x,y,z) = xyz + K(z)$. Nakonec

$$\begin{aligned}xy + K'(z) = F_z = R(x,y,z) = xy\\ K(z) = \int 0\mathrm{d}z = L\end{aligned}$$

Kde $L \in \mathbb{R}$. Dostáváme tedy $F(x,y,z) = xyz + L$ a proto $F(B) - F(A) = 6 - 3! = 0$.

Př. 370 *Ověřte, že výraz je totálním diferenciálem nějaké funkce a vypočtěte integrál*

$$\int_C \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}y + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}z,$$

kde křivka C vede od bodu ležícím na sféře $x^2+y^2+z^2 = A^2$ do bodu ležícím na sféře $x^2+y^2+z^2 = B^2$, pro $A > 0, B > 0$.

Máme $P(x,y,z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $Q(x,y,z) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ a $R(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}P(x,y,z) &= -\frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} = \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y,z)\\
\frac{\partial}{\partial z}P(x,y,z) &= -\frac{xz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} = \frac{\partial}{\partial x}R(x,y,z)\\
\frac{\partial}{\partial z}Q(x,y,z) &= -\frac{yz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} = \frac{\partial}{\partial y}R(x,y,z)
\end{aligned}$$

Tedy se jedná o totálním diferenciálem nějaké funkce $F(x,y,z)$. Dostáváme

$$\begin{aligned}
&F(x,y,z) = \int F_x(x,y,z)\mathrm{d}x = \int P(x,y,z)\mathrm{d}x = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}x =\\
&= \sqrt{x^2+y^2+z^2} + C(y,z),
\end{aligned}$$

kde $C(y,z)$ je neznámá funkce. Navíc

$$\begin{aligned}
\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + C_y = F_y = Q(x,y,z) &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\
C(y,z) = \int C'(y)\mathrm{d}y &= \int 0\mathrm{d}y = K(z),
\end{aligned}$$

kde $K(z)$ je neznámá funkce. Tedy $F(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + K(z)$. Nakonec

$$\begin{aligned}
\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + K'(z) = F_z = R(x,y,z) &= \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\
K(z) = \int 0\mathrm{d}z &= L
\end{aligned}$$

Kde $L \in \mathbb{R}$. Dostáváme tedy $F(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + L$ a proto $F(B) - F(A) = B - A$.

Př. 371 *Vypočtěte křivkový integrál*

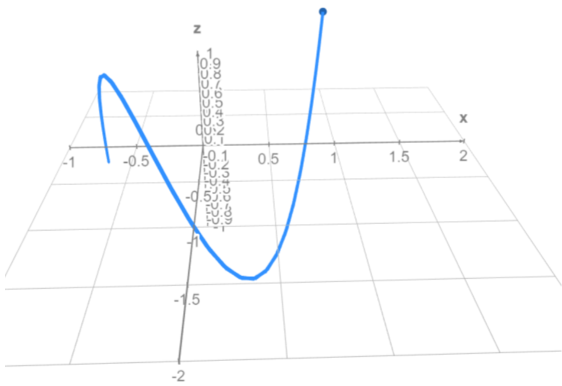
$$\int_C y^2z^2\mathrm{d}x + x^2z^2\mathrm{d}y + x^2y^2\mathrm{d}z,$$

kde C křivka parametrizovaná jako $x = A\cos t$, $y = A\cos 2t$, $z = A\cos 3t$, pro $t \in [0, 2\pi]$ s libovolnou orientací.

Integrál se můžeme pokoušet počítat. Všimněme si však, že se jedná o uzavřenou křivku, neboť $[x(0), y(0), z(0)] = [x(2\pi), y(2\pi), z(2\pi)]$ avšak vzhledem k 2π periodičnosti funkce je opisovaná křivka na intervalu $[\pi, 2\pi]$ stejná jako opisovaná křivka na intervalu $[-\pi, 0]$. Vzhledem k sudosti funkce $\cos t$ je však křivka na intervalu $[-\pi, 0]$ stejná jako na intervalu $[0, \pi]$, pouze s opačnou parametrizací. Rozdělíme-li křivku C na dvě části, C_1 pro $t \in [0, \pi]$ a C_2 pro $t \in [\pi, 2\pi]$, máme

$$\int_{C_1} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z = -\int_{C_2} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

Celkový integrál je tedy 0. Vyšetřovaná uzavřená křivka vypadá jako



10 Greenova věta

Nechť M je jednoduše souvislá oblast a C je uzavřená, jednoduchá, kladně orientovaná křivka v M. Nechť P, Q jsou na $\bar{M}$ spojité, pak platí

$$\int_C P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \iint_G Q_x(x,y) - P_y(x,y)\mathrm{d}x dy,$$

kde G je množina, kterou ohraničuje křivka C.

Př. 372 *Pomocí Greenovy věty transformujte křivkový integrál*

$$\int_C \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x + y\left(xy + \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)\mathrm{d}y$$

kde křivka C ohraničuje nějakou množinu M.

Za předpokladu, že křivka C a M splňují požadavky Greenovy věty, můžeme brát $P(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $Q(x,y) = y\left(xy + \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)$ a tedy

$$\begin{aligned}
Q_x &= y^2 + y\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = y^2 + y\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2} \\
P_y &= \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}
\end{aligned}$$

A tedy

$$\begin{aligned}
Q_x - P_y &= y^2 + \frac{y\sqrt{x^2+y^2}+xy}{x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \\
&= y^2 + \frac{y(x^2+y^2) + xy\sqrt{x^2+y^2} - y\left(x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2\right)}{\left(x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}} = y^2
\end{aligned}$$

A tedy dostaneme integrál jako

$$\iint_M y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Př. 373 *Pomocí Greenovy transformujte křivkový integrál*

$$\int_C (x+y)^2 \mathrm{d}x - (x^2+y^2)\mathrm{d}y$$

kde křivka C je obvod trojúhelníka $[1,1]$, $[3,2]$, $[2,5]$ *orientovaná v kladném směru.*

Křivka C splňuje požadavky Greenovy věty stejně jako funkce $P(x,y) = (x+y)^2$,$Q(x,y) = -x^2 - y^2$. Navíc máme

$$\begin{aligned} Q_x &= -2x \\ P_y &= 2(x+y) \end{aligned}$$

A integrál dostaneme jako

$$\iint_M -4x - 2y \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

kde M je trojúhelník, který je dán jako průnik přímek $y = \frac{1}{2}(x+1)$, $y = 4x-3$, $y = -3x+11$. Integrál tedy dostaneme jako dvojnásobný integrál

$$\int_1^2 \int_{\frac{x+1}{2}}^{4x-3} -4x - 2y \mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_2^3 \int_{\frac{x+1}{2}}^{-3x+11} -4x - 2y \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Př. 374 *Pomocí Greenovy vypočtěte křivkový integrál*

$$\int_C -x^2y\mathrm{d}x + xy^2\mathrm{d}y \qquad pro \qquad C : x^2 + y^2 = A^2, A > 0$$

křivku orientovanou v kladném směru.

Křivka C splňuje požadavky Greenovy věty stejně jako funkce $P(x, y) = -x^2y$, $Q(x, y) = xy^2$. Dostáváme integrál

$$\iint_M y^2 - (-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je dána jako $x^2 + y^2 \leq A^2$. Využijeme transformace do polárních souřadnic, abychom dostali

$$\int_0^{2\pi} \int_0^A \rho^2 \cdot \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^A = \frac{\pi A^4}{2}$$

Př. 375 *Pomocí Greenovy vypočtěte křivkový integrál*

$$\int_C (x+y)\mathrm{d}x - (x-y)\mathrm{d}y \quad \textit{pro} \quad C : \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1, A > 0, B > 0$$

křivku orientovanou v kladném směru.

Křivka C splňuje požadavky Greenovy věty stejně jako funkce $P(x,y) = x+y$, $Q(x,y) = y-x$. Dostáváme tedy integrál

$$\iint_M -1 - 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je dána jako $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} \leq 1$. Využijeme transformaci do zobecněných polárních souřadnic $x = A\rho\cos\varphi$, $y = B\rho\sin\varphi$, $|J| = AB\rho$, čímž dostaneme

$$-2\int_0^{2\pi}\int_0^1 AB\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = -4AB\pi\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^1 = -2AB\pi$$

Př. 376 *Pomocí Greenovy vypočtěte křivkový integrál*

$$\int_C \mathrm{e}^x (1-\cos y)\mathrm{d}x - \mathrm{e}^x (y - \sin y)\mathrm{d}y,$$

kde C je křivka s kladnou orientací, která ohraničuje množinu $0 < x < \pi$, $0 < y < \sin x$.

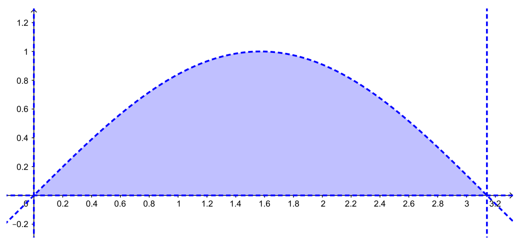
Křivka C splňuje požadavky Greenovy věty stejně jako funkce $P(x,y) = \mathrm{e}^x(1-\cos y)$, $Q(x,y) = -\mathrm{e}^x(y-\sin y)$. Dostáváme tedy integrál

$$\iint_M -\mathrm{e}^x(y-\sin y) - \mathrm{e}^x \sin y \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_M y\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je dána skrze $0 < x < \pi$, $0 < y < \sin x$. Počítáme

$$\begin{aligned}
&-\int_0^\pi \int_0^{\sin x} y\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = -\int_0^\pi \mathrm{e}^x \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sin x} \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^\pi \mathrm{e}^x \sin^2 x\mathrm{d}x = \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^\pi \mathrm{e}^x \frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\left[\mathrm{e}^x\right]_0^\pi + \frac{1}{4}\int_0^\pi \mathrm{e}^x \cos 2x\mathrm{d}x = \\
&= |2x \text{ per partes }| = \frac{1}{4}(1-\mathrm{e}^\pi) + \frac{1}{4}\left[\frac{\mathrm{e}^x(2\sin 2x + \cos 2x)}{5}\right]_0^\pi = \\
&= \frac{1}{4}(1-\mathrm{e}^\pi) + \frac{\mathrm{e}^\pi - 1}{20} = \frac{5 - 5\,\mathrm{e}^\pi + \mathrm{e}^\pi - 1}{20} = \frac{1-\mathrm{e}^\pi}{5}
\end{aligned}$$

Vyšetřovaná množina vypadá jako



Př. 377 *Pomocí Greenovy vypočtěte křivkový integrál*

$$\int_C \mathrm{e}^{-x^2+y^2}\cos 2xy\mathrm{d}x + \mathrm{e}^{-x^2+y^2}\sin 2xy\mathrm{d}y,$$

kde C je kružnice $x^2+y^2=A^2$.

Křivka C splňuje požadavky Greenovy věty stejně jako funkce $P(x,y)=\mathrm{e}^{-x^2+y^2}\cos 2xy$, $Q(x,y)=\mathrm{e}^{-x^2+y^2}\sin 2xy$ a tedy

$$\begin{aligned}Q_x &= -2x\,\mathrm{e}^{-x^2+y^2}\sin 2xy + 2y\,\mathrm{e}^{-x^2+y^2}\cos 2xy\\ P_y &= 2y\,\mathrm{e}^{-x^2+y^2}\cos 2xy - 2x\,\mathrm{e}^{-x^2+y^2}\sin 2xy\end{aligned}$$

Dohromady pak dostáváme $Q_x - P_y = 0$, a proto počítáme integrál

$$\iint_M 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je dána jako $x^2+y^2\leq A^2$. Vzhledem k povaze M, zavedeme polární souřadnice, abychom dostali

$$\int_0^A\int_0^{2\pi} 0\cdot\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho = \int_0^A [K]_0^{2\pi}\,\mathrm{d}\rho = \int_0^A K - K\mathrm{d}\rho = [K]_0^A = K - K = 0$$

Což jsme samozřejmě věděli již z definice integrálu $\iint_M 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Př. 378 *Rozhodněte, o kolik se liší integrály*

$$\int_{C_1} (x+y)^2 \mathrm{d}x - (x-y)^2 \mathrm{d}y a \quad a \qquad \int_{C_2} (x+y)^2 \mathrm{d}x - (x-y)^2 \mathrm{d}y$$

kde C_1 je úsečka spojující body $[1,1]$, $[2,6]$ a C_2 je parabola $y = ax^2 + bx + c$ spojující body $[1,1]$, $[2,6]$ a navíc procházející bodem $[0,0]$.

Neboť je C_2 orientovaná kladně a C_1 záporně, dostáváme

$$\int_{C_1 \cup C_2} (x+y)^2 \mathrm{d}x - (x-y)^2 \mathrm{d}y = \int_{C_2} (x+y)^2 \mathrm{d}x - (x-y)^2 \mathrm{d}y - \int_{C_1} (x+y)^2 \mathrm{d}x - (x-y)^2 \mathrm{d}y$$

Rozdíl integrálů můžeme tedy dopočítat Greenovou větou jako

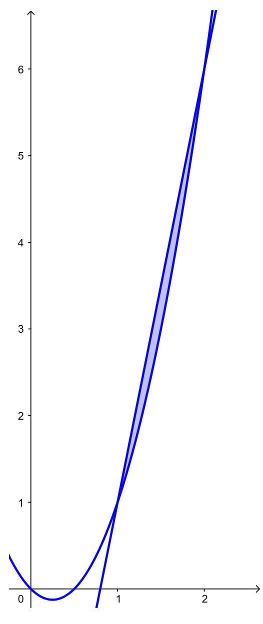
$$\iint_M -2(x-y) - 2(x+y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_M 4x \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená přímkou a parabolou, které spojují body $[1,1]$ a $[2,6]$.

Tyto nalezneme jako $y = 5x - 4$ a $y = 2x^2 - x$. Počítáme tedy integrál

$$\begin{aligned} &-\int_1^2 \int_{2x^2-x}^{5x-4} 4x \mathrm{d}y\mathrm{d}y = -\int_1^2 4x \left[5x - 4 - 2x^2 + x\right] \mathrm{d}x = \\ &= \int_1^2 8x^3 - 24x^2 + 16x \mathrm{d}x = \left[2x^4 - 8x^3 + 8x^2\right]_1^2 = \\ &= 32 - 64 + 32 - (2 - 8 + 8) = -2 \end{aligned}$$

Rozdíl mezi integrály je tedy 2. Vyšetřovaná množina vypadá jako



Př. 379 *Vypočtěte křivkový integrál*

$$\int_C (\mathrm{e}^x \sin y - By)\,\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x \cos y - B)\,\mathrm{d}y$$

kde C je horní půlkružnice $x^2 + y^2 = Ax$ orientovaná kladně a $A > 0, B > 0$.

Abychom si usnadnili výpočet, spočteme křivkový integrál I_1 přes úsečku D, která spojuje body $[0,0]$ a $[A,0]$. Poté spočteme Greenovou větou integrál I_2 přes křivku $C \cup D$ a nakonec hledaný integrál I dostaneme jako rozdíl $I = I_2 - I_1$.

Úsečka spojující body $[0,0]$ a $[A,0]$ je jednoduše parametrizovaná jako $x = t$, $y = 0$, pro $t \in [0, A]$. Dostáváme tedy hned

$$I_1 = \int_0^A \big(\mathrm{e}^t \sin 0 - B \cdot 0\big) \cdot 1 + \big(\mathrm{e}^t \cos 0 - B\big) \cdot 0\mathrm{d}t \int_0^A 0\mathrm{d}t = 0$$

Následně máme $P(x,y) = \mathrm{e}^x \sin y - By$, $Q(x,y) = \mathrm{e}^x \cos y - B$ a

$$\begin{aligned} Q_x &= \mathrm{e}^x \cos y \\ P_y &= \mathrm{e}^x \cos y - B \end{aligned}$$

z čehož máme

$$\iint_M B\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je dána jako $x^2 + y^2 \leq Ax$, $y \geq 0$. Zvolíme tedy polární souřadnice $x = \rho\cos\varphi + \frac{A}{2}$, $y = \rho \sin\varphi$, kde $\rho \in [0, A/2]$, $\varphi \in [0, \pi]$. Dostaneme

$$B \int_0^\pi \int_0^{\frac{A}{2}} \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = B\pi \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\frac{A}{2}} = \frac{A^2 B\pi}{8}$$

Př. 380 *Užitím křivkového integrálu vypočtěte obsah plochy ohraničené křivkou C danou jako $x = A\cos t$, $y = B\sin t$, pro $t \in [0, 2\pi]$, $A > 0, B > 0$.*

Vidíme, že křivka je parametrizovaná kladně a jedná se o elipsu. Hledáme $P(x, y)$ a $Q(x, y)$ aby $Q_x - P_y = 1$, pro nějaké $K \in \mathbb{R}$. Můžeme tedy volit $Q(x, y) = x$, nebo $P(x, y) = -y$, nebo $P(x, y) = -y/2$ a $Q(x, y) = x/2$. Plochu tedy dostaneme skrze

$$\begin{aligned}
&\int_C x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} A\cos tB\cos t\mathrm{d}t = AB\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t = \\
&= AB\pi + AB\left[\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi} = AB\pi
\end{aligned}$$

Jinou volbou bychom ekvivalentně dostali

$$\begin{aligned}
&-\int_C y\mathrm{d}x = -\int_0^{2\pi} B\sin t(-A\sin t)\mathrm{d}t = AB\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{d}t = \\
&= AB\pi + AB\left[-\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi} = AB\pi
\end{aligned}$$

Př. 381 *Užitím křivkového integrálu vypočtěte obsah plochy ohraničené křivkou C danou jako $x = A\cos^3 t$, $y = B\sin^3 t$, pro $t \in [0, 2\pi]$, $A > 0, B > 0$.*

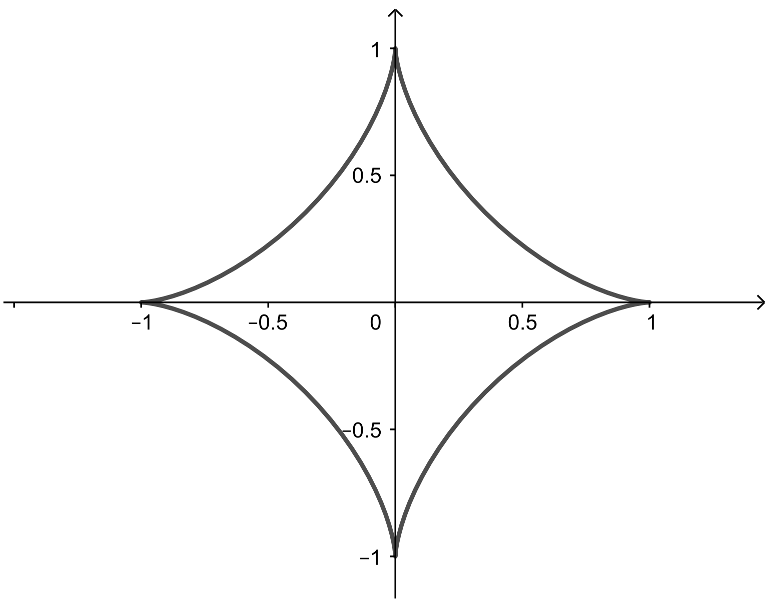
Vidíme, že křivka je parametrizovaná kladně a že se jedná o asteroidu. Hledáme $P(x,y)$ a $Q(x,y)$ aby $Q_x - P_y = 1$, pro nějaké $K \in \mathbb{R}$. Můžeme tedy volit $Q(x,y) = x$, nebo $P(x,y) = -y$, nebo $P(x,y) = -y/2$ a $Q(x,y) = x/2$. Plochu tedy dostaneme skrze

$$\int_C x\mathrm{d}y = A\cos^3 t \cdot 3B\sin^2 t\cos t\mathrm{d}t = 3AB\int_0^{2\pi} \cos^4 t\sin^2 t\mathrm{d}t$$

Zvolíme-li však jinak P, Q můžeme dostat

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_C -y\mathrm{d}y + x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3AB\sin^4 t\cos^2 t + 3AB\sin^2 t\cos^4 t\mathrm{d}t = \\
&= \frac{3AB}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t \cdot \frac{4}{4} = \frac{3AB}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2 2t\mathrm{d}t = \frac{3AB}{8}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4t}{2}\mathrm{d}t = \\
&= \frac{3AB}{8}\pi - \frac{3AB}{8}\left[\frac{\sin 4t}{8}\right]_0^{2\pi} = \frac{3AB}{8}\pi
\end{aligned}$$

Křivka pro $A = 1$, $B = 1$ ohraničuje množinu



Př. 382 *Užitím křivkového integrálu vypočtěte obsah plochy ohraničené skrze* $(x+y)^2 = Ax$ *a osu* x*, pro* $A > 0$.

Nejdříve nalezneme průsečíky křivek $(x+y)^2 = Ax$ a $y = 0$. Dosazením máme $x^2 - Ax = x(x-A) = 0$. Část hranice je tedy dána jako $x = t$, $y = 0$, pro $t \in [0, A]$. Což spočítáme jako

$$I_1 = \int_{C_1} x\mathrm{d}y = \int_0^A t \cdot 0 = 0$$

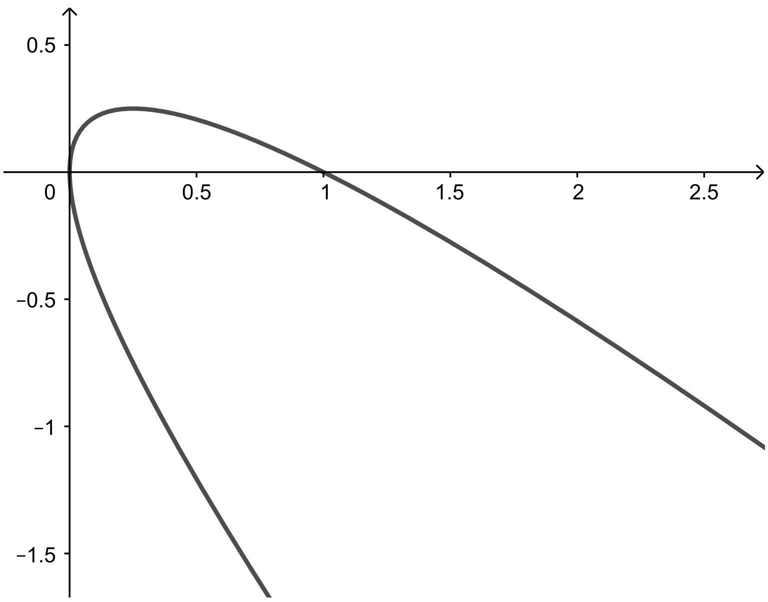
Nyní chceme parametrizovat zbylou část křivky. Z nerovnosti $0 \leq (x+y)^2 = Ax$ vidíme pro $A > 0$, že $x \geq 0$. Vyjádříme-li $y = \pm\sqrt{Ax} - x$, vidíme, že křivka se skládá ze dvou funkcí. Část $y = -\sqrt{Ax} - x$ prochází bodem $[0, 0]$ a následně je vždy záporná, a proto nikdy znovu osu x neprotne.

Tedy nás zajímá pouze část $y = \sqrt{Ax} - x$, která pro $x \to \infty$ dává $y \to -\infty$ a protíná osu x v bodech $[0, 0]$ a $[A, 0]$. Z toho vidíme, že křivka se nachází na intervalu $[0, A]$ nad osou x. Můžeme tedy brát křivku $x = t$, $y = \sqrt{At} - t$, pro $t \in [0, A]$, která je záporně orientovaná. Počítáme

$$I_2 = \int_{C_2} -y\mathrm{d}x = \int_0^A t - \sqrt{At}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2} - \frac{2\sqrt{At^3}}{3}\right]_0^A = \frac{A^2}{2} - \frac{2\sqrt{A^4}}{3} = -\frac{A^2}{6}$$

Vzhledem k záporné orientaci tedy celou plochu dostaneme jako $I_1 - I_2 = \frac{A^2}{6}$.

Implicitně daná funkce nám udává křivku



Př. 383 *Užitím křivkového integrálu vypočtěte obsah plochy ohraničené skrze $x^3 + y^3 = 3Axy$, pro $A > 0$.*

Nejdříve potřebujeme nalézt vhodnou parametrizaci. Položíme-li $y = tx$ a dosadíme-li, dostaneme

$$x^3 + t^3x^3 = 3Atx^2 \Rightarrow x^2(x + xt^3 - 3At) = 0$$

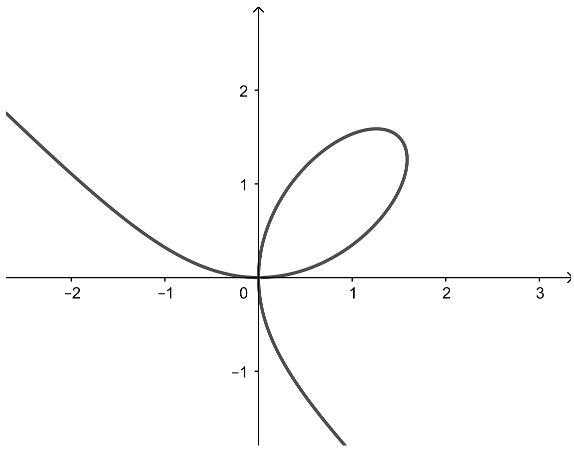
Odvozením tedy máme, že $x = \frac{3At}{1+t^3}$, $y = \frac{3At^2}{1+t^3}$. Dále si všimneme, že pro $t > 0$ dostáváme $x > 0$, $y > 0$ a pro $t = 0$ bod $[0, 0]$. Navíc pro $t \to \infty$ je $x \to 0$, $y \to 0$. Dostaneme ohraničenou plochu pro $t \in [0, \infty)$.

Plochu množiny tedy získáme jako

$$\begin{aligned} -\int_C y\mathrm{d}x &= -\int_0^\infty \frac{3At^2}{1+t^3}\frac{6A-3At^3}{(1+t^3)^2}\mathrm{d}t = -9A^2\int_0^\infty \frac{2-t^3}{(1+t^3)^3}t^2\mathrm{d}t = \\ &= \left| \begin{array}{c} z = 1+t^3 \\ \mathrm{d}z = 3t^2\mathrm{d}t \end{array} \right| = -3A^2\int_1^\infty \frac{3-z}{z^3}\mathrm{d}z = -3A^2\left[\frac{1}{z} - \frac{3}{2z^2}\right]_1^\infty = \\ &= 3A^2\left(\lim_{z\to\infty}\left(\frac{3}{2z^2} - \frac{1}{z}\right) - \frac{3}{2} + 1\right) = -\frac{3A^2}{2} \end{aligned}$$

Neboť nám však vyšel obsah záporný, vidíme, že daná parametrizace je záporně orientovaná. Vskutku, pro malé t je $y(t)$ větší, než pro velké t. Obsah je tedy $\frac{3A^2}{2}$.

Implicitně daná funkce nám pro $A = 1$ udává křivku



Př. 384 *Užitím křivkového integrálu vypočtěte obsah plochy ohraničené skrze* $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$ *a* $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Najdeme průsečíky s osami. Pro $y = 0$ dostaneme $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$ a pro $x = 0$ dostaneme $y^3 - y^2 = y^2(y-1) = 0$. Navíc pokud parametrizujeme křivku v polárních souřadnicích dostaneme

$$\begin{aligned}
\rho^3 \cos^3 \varphi + \rho^3 \sin^3 \varphi &= \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi \\
\rho^2 &= \rho^3(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi) \\
\rho &= \frac{1}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}
\end{aligned}$$

Tedy množina obsahuje body křivky, navíc však ještě počátek, který dostaneme pro $\rho = 0$.

Další parametrizaci získáme, položíme-li $y = xt$ a dosadíme $x^3(t^3+1) = x^2(t^2+1)$ z čehož opět získáme $x = \frac{t^2+1}{t^3+1}$ a $y = \frac{t^3+t}{t^3+1}$. Pro $t = 0$ dostaneme bod $[1,0]$ a pro $t \to \infty$ dostaneme bod $[0,1]$. Řešíme tedy integrál

$$\int_C -y\mathrm{d}x = \int_0^\infty -\frac{t^3+t}{t^3+1}\frac{-t^4-3t^2+2t}{(t^3+1)^2}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{t^2(t^2+1)(t^3+3t-2)}{(t^3+1)^3}\mathrm{d}t$$

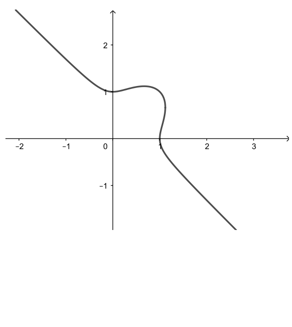
Vzhledem ke tvaru jmenovatele můžeme použít G-O metodu a integrál se tedy rovná

$$\left[\frac{P(t)}{(t^3+1)^2}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{Q(t)}{t^3+1}\mathrm{d}t$$

Kde $P(t)$ je neznámý polynom stupně 5 a $Q(t)$ neznámý polynom stupně 2. Metodou neurčitých koeficientů bychom dostali

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{-4t^5+t^4-8t^3-t^2-2t-2}{6(t^3+1)^2}\right]_0^\infty + \frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{t+1}{t^3+1}\mathrm{d}t = \\
&= \frac{2}{6} + \frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{1}{t^2-t+1}\mathrm{d}t = \frac{2}{6} + \frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^\infty = \frac{1}{3} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right) = \\
&= \frac{1}{3} + \frac{4\pi}{9\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Implicitně daná funkce udává křivku



Př. 385 *Užitím křivkového integrálu vypočtěte obsah plochy jednoho oblouku cykloidy $x = A(t - \sin t)$, $y = A(1 - \cos t)$, pro $t \in [0, 2\pi]$.*

Vidíme, že $y > 0$ na intervalu $(0, 2\pi)$ a $y = 0$ pro $t = 0$ nebo $t = 2\pi$. Proto je plocha ohraničena cykloidou a osou x. První část křivky je tedy daná jako $x = t$, $y = 0$, pro $t \in [0, 2A\pi]$. Počítáme tedy

$$I_1 = \int_C x\mathrm{d}y = \int_0^{2A\pi} t \cdot 0\mathrm{d}t = 0$$

Druhá část křivky je pak dána jako

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_C x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} A(t - \sin t)A\sin t\mathrm{d}t = A^2 \int_0^{2\pi} t\sin t - \sin^2 t\mathrm{d}t = \\
&= \left| \text{per partes a vzorec, } \sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2} \right| = \\
&= \left[\frac{(\cos x + 2)\sin x - x(\cos x + 1)}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{-4\pi}{2} = -2\pi
\end{aligned}$$

A neboť je tato parametrizace záporná, dostáváme plochu 2π.

Př. 386 *Užitím křivkového integrálu vypočtěte obsah plochy ohraničené evolventou* $x = A(\cos t + t\sin t)$, $y = A(\sin t - t\cos t)$, *pro* $t \in [0, 2\pi]$.

Počítáme integrál

$$\begin{aligned}
&\int_C x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} A(\cos t + t\sin t)A(\cos t - \cos t + t\sin t)\mathrm{d}t = \\
&= A^2\int_0^{2\pi} t\sin t\cos t + t^2\sin^2 t\mathrm{d}t = A^2\int_0^{2\pi}\frac{t\sin 2t + t^2(1-\cos 2t)}{2}\mathrm{d}t = \\
&= |\text{per partes}| = \frac{A^2}{2}\left[\frac{2t^3 - 6t\cos 2t - (3t^2-3)\sin 2t}{6}\right]_0^{2\pi} = \frac{A^2}{2}\frac{16\pi^3 - 12\pi}{6} = \\
&= A^2\pi\frac{4\pi^2-3}{3}
\end{aligned}$$

11 Plošný integrál 1.druhu

Nechť S je po částech hladká plocha daná jako $x = \alpha(u,v)$, $y = \beta(u,v)$, $z = \gamma(u,v)$, pro $[u,v] \in M$ a $f(x,y,z)$ je spojitá ve všech bodech plochy S. Potom plošný integrál prvního druhu můžeme převést jako

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_M f(\alpha(u,v),\beta(u,v),\gamma(u,v))\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

kde

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \\ F &= \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \end{aligned}$$

Speciálně je-li $z = g(x,y)$ funkce proměnných x, y, pak dostáváme

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_M f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Př. 387 *Je dána plocha $S : z = 6 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $y \leq 0$. Spočtěte velikost její normály.*

Plocha S je dána explicitně. Chceme tedy určit normálový vektor $n = \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right)$. Dostáváme tedy

$$n = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1\right).$$

Velikost tohoto vektoru pak dostaneme jako

$$||n|| = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1} = \sqrt{2}$$

Př. 388 *Vypočtěte plošný integrál*
$$\iint_S xy\mathrm{d}S$$
pokud je $S: x^2+y^2=4,\ 0\le z\le 3,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ x\ge 0.$

Zde nemáme explicitní vyjádření některé proměnné vůči ostatním. Musíme tedy plochu S vhodně parametrizovat. Neboť plocha S je částí válcové plochy, využijeme vhodně válcové souřadnice $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $z=z$.

Dosazením do rovností a nerovností dostaneme, že $z\in[0,3]$, $\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=\rho^2=4$, $\rho\sin\varphi\ge 0$ a $\rho\cos\varphi\ge 0$, z čehož plyne $\varphi\in[0,\pi/2]$. Plochu tedy máme vhodně parametrizovanou na $M:[0,\pi/2]\times[0,3]$ přes $x=2\cos u$, $y=2\sin u$, $z=v$.

Následně spočítáme

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=4\sin^2 u+4\cos^2 u=4$$
$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=0+0+1^2=1$$
$$F=\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0+0+0=0$$

Dostáváme tedy integrál

$$\iint_M 4\cos u\sin u\sqrt{4\cdot 1-0}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=4\int_0^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2u\mathrm{d}u\mathrm{d}v=12\left[-\frac{\cos 2u}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=$$
$$=12\frac{1+1}{2}=12$$

Př. 389 *Určete povrch rotačního paraboloidu $z = 6 - x^2 - y^2$ nad rovinou $z = 0$.*

Chceme počítat plochu

$$\iint_S 1\mathrm{d}S$$

Kde plocha S je dána explicitně z čehož máme

$$\iint_M 1\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Potřebujeme ještě určit množinu M, ta je dána ohraničeními $z = 6 - x^2 - y^2$ a $z \geq 0$ z čehož dohromady máme $M : x^2 + y^2 \leq 6$. Vzhledem k tvaru množiny M a integrované funkce, zavedeme polární souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, pro $\rho \in [0, \sqrt{6}]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Dostáváme

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{6}} \rho\sqrt{1 + 4\rho^2}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \left| \begin{array}{c} t = 1 + 4\rho^2 \\ \mathrm{d}t = 8\rho\mathrm{d}\rho \end{array} \right| = \frac{2\pi}{8}\int_1^{25}\sqrt{t}\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{2\sqrt{t^3}}{3}\right]_1^{25} = \frac{\pi}{6}(125 - 1) = \frac{62\pi}{3}$$

Př. 390 *Určete povrch horní části sféry $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$.*

Počítáme

$$\iint_S 1\mathrm{d}S.$$

Potřebujeme parametrizovat plochu S. Zde můžeme vyjádřit $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, nebo využít sférické souřadnice, neboť se jedná o část sféry. Dostaneme $x = 2\cos u \sin v$, $y = 2\sin u \sin v$, $z = 2\cos v$, pro $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, \pi/2]$.

Pro první variantu určujeme

$$\iint_M \sqrt{\frac{x^2}{4 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{4 - x^2 - y^2} + 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_M \sqrt{\frac{4}{4 - x^2 - y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Zde musíme určit množinu M, ta je však dána jako $x^2 + y^2 \leq 4$, což snadno vidíme, pokud si představíme plochu S. Následně volíme transformaci do polárních souřadnic a dopočteme

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \frac{2\rho}{\sqrt{4 - \rho^2}}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \left| \begin{array}{c} t = 4 - \rho^2 \\ \mathrm{d}t = -2\rho\mathrm{d}\rho \end{array} \right| = -2\pi \int_4^0 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t =$$
$$= 2\pi \left[2\sqrt{t}\right]_0^4 = 8\pi$$

Pro druhou variantu musíme určit

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cos u \sin v & 2\sin u \cos v \\ 0 & -2\sin v \end{vmatrix} = -4\cos u \sin^2 v$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2\sin v \\ -2\sin u \sin v & 2\cos u \cos v \end{vmatrix} = -4\sin u \sin^2 v$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2\sin u \sin v & 2\cos u \cos v \\ 2\cos u \sin v & 2\sin u \cos v \end{vmatrix} = -4\sin v \cos v$$

Dohromady tak dostáváme

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{16\cos^2 u \sin^4 v + 16\sin^2 u \sin^4 v + 16\sin^2 v \cos^2 v} =$$
$$= \sqrt{16\sin^4 v + 16\sin^2 v\left(1 - \sin^2 v\right)} = \sqrt{16\sin^2 v} = 4|\sin v|$$

Dostáváme tak integrál

$$\iint_M \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin v|\mathrm{d}v\mathrm{d}u = 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v\mathrm{d}v =$$
$$= 8\pi \left[-\cos v\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 8\pi$$

V závislosti na tvaru integrované funkce a plochy S může být jeden ze zvolených přístupů jednodušší, než druhý.

Př. 391 *Vypočtěte plošný integrál*

$$\iint_S \frac{1}{\sqrt{R^2 - z^2}} \mathrm{d}S,$$

kde S je část válcové plochy $x^2 + y^2 = R^2$, $0 \leq z \leq H$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $R > H > 0$.

Chceme parametrizovat část válce, proto volíme válcové souřadnice. Tedy $x = R\cos u$, $y = R\sin u$, $z = v$, kde $u \in [0, \pi/2]$, $v \in [0, H]$. Následně můžeme počítat

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R\cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = R\cos u$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -R\sin u & 0 \end{vmatrix} = R\sin u$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -R\sin u & 0 \\ R\cos u & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Dohromady dostaneme $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = R$ a tedy

$$\int_0^H \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{\sqrt{R^2 - v^2}} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{\pi}{2} \int_0^H \frac{R}{R\sqrt{1 - \left(\frac{v}{R}\right)^2}} \mathrm{d}u$$

$$== \frac{\pi}{2} R \left[\arcsin\left(\frac{v}{R}\right)\right]_0^H = \frac{R\pi}{2} \arcsin\left(\frac{H}{R}\right)$$

Př. 392 *Vypočtěte plošný integrál*

$$\iint_S x^2 + y^2 \mathrm{d}S,$$

kde S je dána jako $z^2 = 9(x^2 + y^2)$, $-1 \leq z \leq 2$.

Plochu S můžeme explicitně vyjádřit jako $z = \pm 3\sqrt{x^2 + y^2}$ a integrál spočítáme jako složení dvou ploch $S_1 : z = 3\sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 2$, kterou parametrizujeme jako $x = u$, $y = v$ a $M_1 : u^2 + v^2 \leq \frac{4}{9}$. Druhou parametrizujeme jako $S_2 : z = -3\sqrt{x^2 + y^2}$, $-1 \leq z \leq 0$, kterou parametrizujeme jako $x = u$, $y = v$ a $M_2 : u^2 + v^2 \leq \frac{1}{9}$.

První integrál tedy dostaneme jako

$$I_1 = \iint_{M_1} (x^2 + y^2)\sqrt{1 + \frac{9x^2 + 9y^2}{x^2 + y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{M_1} (x^2 + y^2)\sqrt{1 + 9} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Použijeme-li polární souřadnice dostaneme

$$I_1 = \sqrt{10} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{2}{3}} \rho^2 \cdot \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi = 2\sqrt{10}\pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\frac{2}{3}} = \sqrt{10}\pi \frac{16}{162}$$

Druhý integrál dostaneme jako

$$I_2 = \sqrt{10} \iint_{M_2} (x^2 + y^2) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{10} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{3}} \rho^3 \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi =$$
$$= 2\sqrt{10}\pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\frac{1}{3}} = \sqrt{10}\pi \frac{1}{162}$$

Dohromady tedy máme $\sqrt{10}\pi \frac{17}{162}$.

Druhou možností je využít polární souřadnice a parametrizovat plochu S jako $x = u \cos v$, $y = u \sin v$. Z čehož získáme $z^2 = 9u^2$ a dostaneme opět dvě plochy $S_1 : u \in [0, 2/3]$, $v \in [0, 2\pi]$ a $S_2 : u \in [0, 1/3]$, $v \in [0, 2\pi]$.

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin v & u \cos v \\ \pm 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \pm 3u \cos v$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \pm 3 & 0 \\ \cos v & -u \sin v \end{vmatrix} = (-1) \pm 3u \sin v$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \end{vmatrix} = u$$

A tedy $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{9u^2 \cos^2 v + 9u^2 \sin^2 v + u^2} = \sqrt{10}u$. Což nám dá integrály

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{2}{3}} u^2 \cdot \sqrt{10} u \mathrm{d}u \mathrm{d}v \quad \text{a} \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{3}} u^2 \cdot \sqrt{10} u \mathrm{d}u \mathrm{d}v$$

Vidíme, že dostáváme stejný výsledek jako v předchozím případě.

Př. 393 *Vypočtěte obsah plochy* $S : z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \leq 7$, $y \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}x$, $y \geq \sqrt{3}x$.

Počítáme integrál

$$\iint_S 1\mathrm{d}S$$

kde parametrizujeme $x = u$, $y = v$, $z = \sqrt{u^2 + v^2}$ a máme množinu $M : 49 \geq z^2 = u^2 + v^2$, $v \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}u$, $v \geq \sqrt{3}u$. Integrál tedy počítáme jako

$$\iint_M \sqrt{1 + \frac{u^2}{u^2 + v^2} + \frac{v^2}{u^2 + v^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{2}\iint_M 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Potřebujeme tedy určit plochu množiny M. K tomu opět využijeme polárních souřadnic $\rho \in [0, 7]$ a určíme

$$\rho \sin\varphi = \sqrt{3}\rho\cos\varphi \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}$$
$$\rho \sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{3}\rho\cos\varphi \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

a proto vyhodnotíme-li, které úhly patří do M, dostáváme $\varphi \in [\pi/3, 2\pi/3]$. Celkem máme integrál

$$\sqrt{2}\int_0^7 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho = \frac{\sqrt{2}\pi}{3}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^7 = \frac{49\pi}{3\sqrt{2}}$$

Př. 394 *Vypočtěte plošný integrál*

$$\iint_S x^2 + y^2 \mathrm{d}S,$$

kde S *je dána jako* $2x + 3y + z = 6,\ x^2 + y^2 \leq 1.$

Parametrizujeme plochu jako $x = u$, $y = v$, $z = 6 - 2u - 3v$ přes množinu $M : u^2 + y^2 \leq 1$. Dostaneme tedy integrál

$$\iint_M (x^2 + y^2)\sqrt{1+4+9}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{14}\iint_M x^2 + y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Což při použití polárních souřadnic dá

$$\sqrt{14}\int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^2 \cdot \rho = 2\sqrt{14}\pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{14}\pi}{2}$$

Př. 395 *Vypočtěte plošný integrál*

$$\iint_S x^2 + y^2 \mathrm{d}S,$$

kde S je dána jako $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 6 - 2x - 3y$.

Neboť se jedná o část válcové plochy, využijeme válcové souřadnice. Dostaneme tak $x = \cos u$, $y = \sin u$, $z = v$, pro $u \in [0, 2\pi]$ a $0 \leq v \leq 6 - 2\cos u - 3\sin u$. Dále spočítáme

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos u$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\sin u & 0 \end{vmatrix} = \sin u$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Integrál tedy dostaneme jako

$$\iint_M (\cos^2 u + \sin^2 u)\sqrt{\cos^2 u + \sin^2 u + 0^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint_M 1\mathrm{d}u\mathrm{d}v =$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{6-2\cos u - 3\sin u} 1\mathrm{d}v\mathrm{d}u = \int_0^{2\pi} 6 - 2\cos u - 3\sin u\mathrm{d}u =$$
$$= [6u - 2\sin u + 3\cos u]_0^{2\pi} = 12\pi$$

Př. 396 *Vypočtěte obsah plochy $S : z = 2x^2 + 2y^2,\ y \geq 0,\ z \leq 4$.*

Plochu máme danou explicitně a proto počítáme integrál

$$\iint_M \sqrt{1 + (4x)^2 + (4y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Množinu M máme danou jako $4 \geq 2x^2 + 2y^2$, $y \geq 0$ a proto $y \leq \sqrt{2 - x^2}$, kde $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Je dána jako horní polokružnice s poloměrem $\sqrt{2}$. Opět transformujeme integrál do polárních souřadnic $\rho \in [0, \sqrt{2}]$, $\varphi \in [0, \pi]$. Počítáme tedy

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\pi} \rho\sqrt{1 + 16\rho^2}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho = \left| \begin{array}{c} t = 1 + 16\rho^2 \\ \mathrm{d}t = 32\rho\mathrm{d}\rho \end{array} \right| = \frac{\pi}{32} \int_1^{33} \sqrt{t}\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{\pi}{32} \left[\frac{2\sqrt{t^3}}{3} \right]_1^{33} = \frac{\pi}{48}(33\sqrt{33} - 1)$$

Př. 397 *Vypočtěte obsah plochy* $S : z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \leq 2y$.

Parametrizujeme plochu skrze polární souřadnice jako $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u$, pro $u^2 \leq 2u \sin v$. Tedy $u \leq \sin v$, ale navíc neboť $u \geq 0$ máme také $\sin v \geq 0$ a proto $v \in [0, \pi]$.

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin v & u \cos v \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -u \cos v$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos v & -u \sin v \end{vmatrix} = -u \sin v$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \end{vmatrix} = u$$

Počítáme tedy integrál

$$\iint_M \sqrt{u^2 \cos^2 v + u^2 \sin^2 v + u^2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \sqrt{2} \int_0^\pi \int_0^{2 \sin v} u \mathrm{d}u\mathrm{d}v =$$
$$= \sqrt{2} \int_0^\pi \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^{2 \sin v} \mathrm{d}v = 2\sqrt{2} \int_0^\pi \sin^2 v \mathrm{d}v = 2\sqrt{2} \left[\frac{v}{2} - \frac{\sin 2v}{4} \right]_0^\pi = \sqrt{2}\pi$$

Druhou variantou je parametrizovat plochu jako $x = u$, $y = v$ a $z = \sqrt{u^2 + v^2}$ čímž dostaneme

$$\iint_M \sqrt{1 + \frac{u^2}{u^2 + v^2} + \frac{v^2}{u^2 + v^2}} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \sqrt{2} \iint_M \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Kde stačí spočítat pouze obsah množiny M, ta je však dána jako $u^2 + v^2 \leq 2v \Rightarrow u^2 + (v-1)^2 \leq 1$. Tedy se jedná o obsah jednotkové kružnice, který je jednoduše π.

Př. 398 *Vypočtěte obsah plochy* $S: 2x+3y+z=6,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0.$

Plocha S je dána explicitně přes množinu $M: x\geq 0,\ y\geq 0,\ 2x+3y\leq 6.$

Dostáváme

$$\iint_M \sqrt{1+4+9}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{14}\int_0^3\int_0^{\frac{6-2x}{3}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \sqrt{14}\int_0^3 \frac{6-2x}{3}\mathrm{d}x =$$
$$= \sqrt{14}\left[\frac{6x-x^2}{3}\right]_0^3 = \sqrt{14}\frac{18-9}{3} = 3\sqrt{14}$$

Př. 399 *Vypočtěte obsah plochy* $S : z = \sqrt{2x^2 + 2y^2}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \leq 1$.

Plocha je dána explicitně přes množinu $M : 2x^2 + 2y^2 \leq 1$. Máme tedy integrál

$$\iint_M \sqrt{1 + \frac{4x^2}{2x^2 + 2y^2} + \frac{4y^2}{2x^2 + 2y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{3} \iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Množina M je čtvrtina kružnice s poloměrem $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Proto je celkový obsah $\sqrt{3}\frac{\pi r^2}{4} = \frac{\sqrt{3}\pi}{8}$.

Př. 400 *Vypočtěte*

$$\int_S z\mathrm{d}S,$$

kde S je část plochy $x^2+z^2=2Az$, $A>0$, která je ohraničená průnikem s plochou $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Neboť se jedná o část válce, parametrizujeme plochu jako $x=A\cos u$, $z=A\sin u+A$, $y=v$. V řezu pro $y=0$ vidíme, že $u\in[0,\pi]$. Hodnota v však závisí na u. Vyjádříme ohraničení jako $y=\pm\sqrt{z^2-x^2}=\pm A\sqrt{2+2\sin u}$. Dále dopočítáme

$$A=\begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ A\cos u & 0 \end{vmatrix}=-A\cos u$$

$$B=\begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A\cos u & 0 \\ -A\sin u & 0 \end{vmatrix}=0$$

$$C=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -A\sin u & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-A\sin u$$

Máme tedy integrál

$$\iint_M A(\sin u+1)\cdot A\mathrm{d}u\mathrm{d}v=A^2\int_0^\pi\int_{-A\sqrt{2+2\sin u}}^{A\sqrt{2+2\sin u}}(\sin u+1)\mathrm{d}v\mathrm{d}u=$$

$$=2\sqrt{2}A^3\int_0^\pi\sqrt{(\sin u+1)^3}\mathrm{d}u=\begin{vmatrix} \sin u=\cos(u+\pi/2) \\ \cos^2 u=\frac{1+\cos 2u}{2} \end{vmatrix}=$$

$$=2\sqrt{2}A^3\int_0^\pi\sqrt{\cos^6\left(\frac{2u+\pi}{4}\right)}\mathrm{d}u=2\sqrt{2}A^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\left(\frac{2u+\pi}{4}\right)\mathrm{d}u-2\sqrt{2}A^3\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^3\left(\frac{2u+\pi}{4}\right)\mathrm{d}u=$$

$$=\begin{vmatrix} t=\sin\left(\frac{2u+\pi}{4}\right) \\ \mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2u+\pi}{4}\right) \end{vmatrix}=4\sqrt{2}A^3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}1-t^2\mathrm{d}t-4\sqrt{2}A^3\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}1-t^2\mathrm{d}t=$$

$$=4\sqrt{2}A^3\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-4\sqrt{2}A^3\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

Př. 401 *Vypočtěte*

$$\int_S x + y + z \mathrm{d}S,$$

kde S je plocha $x^2 + y^2 + z^2 = A^2$, $z \geq 0$.

Parametrizujeme plochu jako $x = A\cos u \sin v$, $y = A \sin u \sin v$, $z = A\cos v$, pro $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, \pi/2]$. Navíc

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A\cos u \sin v & A \sin u \cos v \\ 0 & -A\sin v \end{vmatrix} = -A^2 \cos u \sin^2 v$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -A\sin v \\ -A \sin u \sin v & A\cos u \cos v \end{vmatrix} = -A^2 \sin u \sin^2 v$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -A \sin u \sin v & A\cos u \cos v \\ A\cos u \sin v & A \sin u \cos v \end{vmatrix} = -A^2 \sin v \cos v$$

Počítáme tedy

$$A \iint_M \cos u \sin v + \sin u \sin v + \cos v \sqrt{A^4(\sin^4 v + \sin^2 v \cos^2 v)} \mathrm{d}u\mathrm{d}v =$$

$$= A^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\cos u + \sin u) \sin v + \cos v) \sin v \mathrm{d}v\mathrm{d}u =$$

$$= A^3 \int_0^{2\pi} \cos u + \sin u \mathrm{d}u \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 v \mathrm{d}v + 2A^3\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos v \sin v \mathrm{d}v =$$

$$= A^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 v \mathrm{d}v \left[\sin v - \cos v\right]_0^{2\pi} + 2A^3\pi \int_0^1 t \mathrm{d}t = 2A^3\pi \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = A^3\pi$$

Př. 402 *Vypočtěte*

$$\int_S x^2 + y^2 \mathrm{d}S,$$

kde S je povrch tělesa ohraničeného $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1$.

Plocha S je sjednocením dvou ploch $S_1 : z = 1$, přes množinu $M : x^2 + y^2 \le 1$ a $S_2 : z = \sqrt{x^2+y^2}$, také přes množinu $M : x^2 + y^2 \le 1$. První integrál tedy dostaneme jako

$$I_1 = \iint_M (x^2+y^2)\sqrt{1+0+0}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^2 \cdot \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi = 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Druhý integrál spočítáme jako

$$I_2 = \iint_M (x^2+y^2)\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^3 \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi =$$
$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Dohromady tedy máme $\frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2}$.

Př. 403 *Vypočtěte*

$$\iint_S \frac{1}{(1+x+y)^2}\mathrm{d}S,$$

kde S *je povrch tělesa ohraničeného* $x+y+z\le 1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

Plocha S se skládá ze čtyř částí. Jsou to

$$\begin{aligned}
S_1 &: x=0, \text{ přes } M_1 : y+z\le 1, y\ge 0, z\ge 0\\
S_2 &: y=0, \text{ přes } M_2 : x+z\le 1, x\ge 0, z\ge 0\\
S_3 &: z=0, \text{ přes } M_3 : x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0\\
S_4 &: z=1-x-y, \text{ přes } M_3 : x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0
\end{aligned}$$

Počítáme

$$\begin{aligned}
I_1 &= \iint_{M_1} \frac{1}{(1+y)^2}\sqrt{1+0+0}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1\int_0^{1-y}\frac{1}{(1+y)^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1-y}{(1+y)^2}\mathrm{d}y =\\
&= \int_0^1 \frac{-1}{1+y}+\frac{2}{(1+y)^2}\mathrm{d}y = \left[-\ln|1+y| - \frac{2}{1+y}\right]_0^1 = -\ln 2 - 1 - (0-2) = 1-\ln 2
\end{aligned}$$

$$I_2 = \iint_{M_2} \frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \int_0^1\int_0^{1-z}\frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x = 1-\ln 2$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \iint_{M_3} \frac{1}{(1+x+y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^{1-x}\frac{1}{(1+x+y)^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x =\\
&= \int_0^1 \left[-\frac{1}{1+x+y}\right]_0^{1-x}\mathrm{d}x = \int_0^1 -\frac{1}{2}+\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = \left[\ln|1+x| - \frac{x}{2}\right]_0^1 =
\end{aligned}$$

$$I_4 = \iint_{M_3} \frac{1}{(1+x+y)^2}\sqrt{1+1+1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{3}I_3 = \sqrt{3}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)$$

Dohromady tedy máme $2-2\ln 2 + (1+\sqrt{3})\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3-\sqrt{3}}{2} + (\sqrt{3}-1)\ln 2$.

Př. 404 *Vypočtěte*

$$\iint_S |xyz| \mathrm{d}S,$$

kde S je část plochy $z = x^2 + y^2$, která je ohraničená rovinou $z = 1$.

Plocha je dána explicitně přes množinu $M : x^2 + y^2 \leq 1$. Počítáme

$$\iint_M |xy(x^2+y^2)|\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho|\rho^4 \cos\varphi \sin\varphi|\sqrt{1+4\rho^2}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \int_0^{2\pi} |\cos\varphi \sin\varphi|\mathrm{d}\varphi \int_0^1 \rho^5\sqrt{1+4\rho^2}\mathrm{d}\rho = \left| \begin{array}{c} t = 1+4\rho^2 \\ \mathrm{d}t = 8\rho\mathrm{d}\rho \end{array} \right| =$$
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \frac{1}{8}\int_1^5 \frac{(t-1)^2}{16}\sqrt{t}\mathrm{d}t = \frac{1}{32}\int_0^1 s\mathrm{d}s \int_1^5 t^{5/2} - 2t^{3/2} + t^{1/2}\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{64}\left[\frac{2t^{7/2}}{7} - \frac{4t^{5/2}}{5} + \frac{2t^{3/2}}{3}\right]_1^5 = \frac{125\sqrt{5}-1}{420}$$

Př. 405 *Vypočtěte*

$$\iint_S z\mathrm{d}S,$$

kde S dána jako $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = v$, pro $u \in [0, A]$, $v \in [0, 2\pi]$.

Plochu máme parametrizovanou, spočítáme pouze

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin v & u\cos v \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sin v$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \cos v & -u\sin v \end{vmatrix} = -\cos v$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{vmatrix} = u$$

Proto počítáme integrál

$$\iint_M v\sqrt{\sin^2 v + \cos^2 v + u^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi} v\mathrm{d}v \int_0^A \sqrt{1+u^2}\mathrm{d}u =$$

$$= \begin{vmatrix} u = \operatorname{tg} t \\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} \end{vmatrix} = \left[\frac{v^2}{2}\right]_0^{2\pi} \int_0^{\operatorname{arctg} A} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}{\cos^2 t}\mathrm{d}t = \frac{4\pi^2}{2}\int_0^{\operatorname{arctg} A} \frac{\sqrt{\frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t}}}{\cos^2 t}\mathrm{d}t =$$

$$= 2\pi^2 \int_0^{\operatorname{tg} A} \frac{1}{\cos^3 t}\mathrm{d}t = 2\pi^2 \int_0^{\operatorname{arctg} A} \frac{\cos t}{\cos^4 t}\mathrm{d}t = \begin{vmatrix} s = \sin t \\ \mathrm{d}s = \cos t\mathrm{d}t \end{vmatrix} =$$

$$= 2\pi^2 \int_0^{\sin\operatorname{arctg} A} \frac{\mathrm{d}s}{(1-s^2)^2} = \left|\sin\operatorname{arctg} A = \frac{A}{\sqrt{A^2+1}}\right|$$

$$= 2\pi^2 \int_0^{\frac{A}{\sqrt{A^2+1}}} \frac{1}{4(1-s)} + \frac{1}{4(1-s)^2} + \frac{1}{4(1+s)} + \frac{1}{4(1+s)^2}\mathrm{d}s =$$

$$= \frac{\pi^2}{2}\left[-\ln|1-s| + \ln|1+s| - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{1-s}\right]_0^{\frac{A}{\sqrt{A^2+1}}} =$$

$$= \frac{\pi^2}{2}\left(\ln\left|\frac{1+\frac{A}{\sqrt{A^2+1}}}{1-\frac{A}{\sqrt{A^2+1}}}\right| + \frac{2\frac{A}{\sqrt{A^2+1}}}{1-\frac{A^2}{A^2+1}}\right) = \frac{\pi^2}{2}\left(\ln\frac{\sqrt{A^2+1}+A}{\sqrt{A^2+1}-A} + \frac{2\frac{A}{\sqrt{A^2+1}}}{\frac{1}{A^2+1}}\right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{2}\left(\ln\frac{(\sqrt{A^2+1}+A)^2}{A^2+1-A^2} + 2A\sqrt{A^2+1}\right) = \pi^2\left(\ln(\sqrt{A^2+1}+A) + A\sqrt{A^2+1}\right)$$

Př. 406 *Vypočtěte hmotnost paraboloidu* $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ *pro* $z \in [0, 1]$ *a jehož hustota je dána funkcí* $h(x, y, z) = z$*.*

Hledáme-li hmotnost tělesa, počítáme plošný integrál

$$\iint_S h(x, y, z)\mathrm{d}S.$$

Plocha je dána explicitně přes množinu $M : x^2 + y^2 \leq 2$. Počítáme tedy rovnou

$$\iint_M \frac{x^2 + y^2}{2}\sqrt{1 + x^2 + y^2} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \rho^3\sqrt{1 + \rho^2}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \left| \begin{array}{c} t^2 = 1 + \rho^2 \\ 2t\mathrm{d}t = 2\rho\mathrm{d}\rho \end{array} \right| = \pi\int_1^{\sqrt{3}} t(t^2 - 1)\sqrt{t^2}\mathrm{d}t = \pi\int_1^{\sqrt{3}} t^4 - t^2\mathrm{d}t =$$

$$= \pi\left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{5}\pi + \frac{2\pi}{15}$$

Př. 407 *Vypočtěte hmotnost polosféry $x^2+y^2+z^2=A^2$, $z \geq 0$, jejíž hustota je dána jako $h(x,y,z)=\frac{z}{A}$.*

Hledáme-li hmotnost tělesa, počítáme plošný integrál

$$\iint_S h(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_S \frac{z}{A}\mathrm{d}S$$

Plocha je dána explicitně, přes množinu $M : x^2+y^2 \leq A^2$, proto můžeme rovnou počítat

$$\iint_M \frac{\sqrt{A^2-x^2-y^2}}{A}\sqrt{1+\frac{x^2}{A^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{A^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \iint_M \frac{\sqrt{A^2-x^2-y^2}}{A}\sqrt{\frac{A^2-x^2-y^2+x^2+y^2}{A^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_M 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Tedy se jedná o obsah kružnice s poloměrem A, hmotnost je tedy $A^2\pi$.

12 Plošný integrál 2.druhu

Nechť S je hladký kousek plochy parametrizovaný jako $x = \alpha(u, v)$, $y = \beta(u, v)$, $z = \gamma(u, v)$, pak normálový vektor v bodě $[x, y, z](u, v)$ je dán jako

$$n = \pm(A(u, v), B(u, v), C(u, v)),$$

kde

$$A(u, v) = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}, \ B(u, v) = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}, \ C(u, v) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

Nechť S je hladký kousek plochy parametrizovaný jako $x = \alpha(u, v)$, $y = \beta(u, v)$, $z = \gamma(u, v)$ přes množinu M, pak plošný integrál druhého druhu můžeme převést jako

$$\begin{aligned} &\iint_S P(x, y, z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\ &= \pm \iint_M P(\alpha(u, v), \beta(u, v), \gamma(u, v))A(u, v) + Q(\alpha(u, v), \beta(u, v), \gamma(u, v))B(u, v) + \\ &+ R(\alpha(u, v), \beta(u, v), \gamma(u, v))C(u, v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \end{aligned}$$

kde znaménko odpovídá znaménku normálového vektoru

$$n = \pm(A(u, v), B(u, v), C(u, v))$$

Je-li funkce $z = f(x, y)$ dána explicitně, pak dostáváme

$$n = (-f_x, -f_y, 1)$$

Př. 408 *Spočtěte integrál*

$$\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde plocha je dána jako $S : x^2 + y^2 = 1$, *pro* $z \in [0, 1]$ *a normále míří vně.*

Plochu S orientujeme jako $x = \cos u$, $y = \sin u$, $z = v$, přes množinu $M : u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, 1]$ a dále

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos u$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\sin u & 0 \end{vmatrix} = \sin u$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Směr vektoru $(\cos u, \sin u, 0)$ určíme např. v bodě $A = [1, 0, z]$ volbou $u = 0$ a jemu příslušící vektor $(1, 0, 0)$, který směřuje v bodě A vně plochy S. Tedy integrál dostaneme jako

$$\iint_M \cos u \cdot \cos u + \sin u \cdot \sin u + v \cdot 0\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint_M 1\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 2\pi$$

Př. 409 *Spočtěte integrál*

$$\iint_S y\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}z + x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde plocha je dána jako $S : z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \leq 2$ *a normále míří vně.*

Plocha z je dána explicitně přes množinu $M : x^2 + y^2 \leq 4$. Proto z parametrizace máme vektor

$$\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1 \right)$$

Jedná se o rotační plochu směřující vzhůru. Proto vektor směřující vně míří dolů a tedy třetí složka je záporná. Obdobně pokud zvolíme například bod $[1, 0, z]$ a vektor určený parametrizací v něm je $n = (-1, 0, 1)$, který míří k počátku a tedy směřuje dovnitř. Tedy integrál počítáme jako

$$\begin{aligned}
&- \iint_M \frac{-xy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{-y\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} + x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(\frac{\rho^2 \cos\varphi \sin\varphi}{\rho} + \rho \sin\varphi - \rho^2 \cos^2\varphi \right) \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi = \\
&= \int_0^2 \rho^2 \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \cos\varphi \sin\varphi + \sin\varphi \mathrm{d}\varphi - \int_0^2 \rho^3 \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \mathrm{d}\varphi = \\
&= \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2\varphi}{2} \mathrm{d}\varphi - \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{16}{4} \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2} \mathrm{d}\varphi = -4\pi
\end{aligned}$$

Př. 410 *Spočtěte integrál*

$$\iint_S xy \mathrm{d}x\mathrm{d}z,$$

kde plocha je dána jako $S: z = x^2 + y^2$, $z \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ *a normále míří dovnitř.*

Plocha je dána explicitně přes množinu $M : x^2 + y^2 \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Navíc parametrizace nám dává vektor $(-2x, -2y, 1)$, který je orientovaný dovnitř. Počítáme integrál

$$\iint_M xy \cdot (-2y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -2 \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^4 \cos\varphi \sin^2\varphi \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\rho =$$

$$= -2 \int_0^2 \rho^4 \mathrm{d}\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin^2\varphi \mathrm{d}\varphi = -2 \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^2 \int_0^1 t^2 \mathrm{d}t = -2 \frac{32}{5} \frac{1}{3} = -\frac{64}{15}$$

Př. 411 *Spočtěte integrál*

$$\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}x\mathrm{d}z,$$

kde plocha je dána jako $S : x^2 + y^2 + z^2 = 4$*,* $z \geq 0$*,* $y \leq 0$ *a normále míří vně.*

Plochu máme parametrizovanou jako $x = 2\cos u \sin v$, $y = 2\sin u \sin v$, $z = 2\cos v$, přes množinu M danou $u \in [\pi, 2\pi]$, $v \in [0, \pi/2]$. Dále počítáme

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cos u \sin v & 2\sin u \cos v \\ 0 & -2\sin v \end{vmatrix} = -4\cos u \sin^2 v$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2\sin v \\ -2\sin u \sin v & 2\cos u \cos v \end{vmatrix} = -4\sin u \sin^2 v$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2\sin u \sin v & 2\cos u \cos v \\ 2\cos u \sin v & 2\sin u \cos v \end{vmatrix} = -4\sin v \cos v$$

Zvolíme-li například bod $[2, 0, 0]$ pro $u = 2\pi$, $v = \pi/2$ dostaneme touto parametrizací vektor $(-4, 0, 0)$, který míří dovnitř. Tedy počítáme integrál

$$-\iint_M -8\cos^2 u \sin^3 v - 8\sin^2 u \sin^3 v\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 8\iint_M \sin^3 v\mathrm{d}u\mathrm{d}v =$$
$$= 8\int_\pi^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 v\mathrm{d}v\mathrm{d}u = -8\pi\int_1^0 1 - t^2\mathrm{d}t = -8\pi\left[\frac{t^3}{3} - t\right]_0^1 = \frac{16\pi}{3}$$

Př. 412 *Spočtěte integrál*

$$\iint_S xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde plocha je dána jako $S: x+y+z=1,\ x>0,\ y>0,\ z>0$ *a normále míří nahoru.*

Plochu máme danou explicitně $z = 1-x-y$ přes množinu $M : x \in [0,1],\ 0 < y < 1-x$. Vektor určený parametrizací je dán jako $(1,1,1)$, což odpovídá orientaci normálového vektoru. Počítáme

$$\iint_M x(1-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{1-x} x - x^2 - xy\mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \left[xy - x^2y - \frac{xy^2}{2}\right]_0^{1-x} = \int_0^1 x - x^2 - x^2 + x^3 - \frac{x-2x^2+x^3}{2}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x - 2x^2 + x^3\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{24}$$

Př. 413 *Spočtěte integrál*

$$\iint_S y\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}z,$$

kde plocha je dána jako $S : x + z = 1$, *ohraničená* $x^2 + y^2 \leq 1$ *a normále míří nahoru.*

Jedná se o část plochy vyseknuté válcem, plocha je dána explicitně jako $z = 1 - x$ přes množinu $M : x^2 + y^2 \leq 1$. Vektor tímto určený je $(1, 0, 1)$, který směřuje vzhůru. Tedy počítáme integrál

$$\iint_M y \cdot 1 + (1 - x) \cdot 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_M y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^2 \sin\varphi \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho =$$
$$= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \sin\varphi \mathrm{d}\varphi = 0$$

Př. 414 *Spočtěte integrál*

$$\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde plocha je dána jako $S : \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. *Normálový vektor směřuje dovnitř.*

Jedná se o jednu osminu elipsoidu, kterou můžeme parametrizovat jako $x = 2\cos u \sin v$, $y = \sin u \sin v$, $z = 3\cos v$, přes $u \in [0, \pi/2]$, $v \in [0, \pi/2]$ čtverec. Navíc

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos u \sin v & \sin u \cos v \\ 0 & -3\sin v \end{vmatrix} = -3\cos u \sin^2 v$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3\sin v \\ -2\sin u \sin v & 2\cos u \cos v \end{vmatrix} = -6\sin u \sin^2 v$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2\sin u \sin v & 2\cos u \cos v \\ \cos u \sin v & \sin u \cos v \end{vmatrix} = -2\sin v \cos v$$

Takže nám parametrizace určuje vektor $(-3\cos u \sin^2 v, -6\sin u \sin^2 v, -2\sin v \cos v)$, který směřuje dovnitř elipsoidu. Počítáme tedy

$$\begin{aligned}
&\iint_M -6\cos^2 u \sin^3 v - 6\sin^2 u \sin^3 v - 6\sin v \cos^2 v\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \\
&= -6\iint_M \sin^3 v + \sin v \cos^2 v\mathrm{d}u\mathrm{d}v = -6\iint_M \sin v\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \\
&= -6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v\mathrm{d}v\mathrm{d}u = -3\pi\left[-\cos v\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -3\pi
\end{aligned}$$

Př. 415 *Spočtěte integrál*

$$\iint_S xy^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde plocha je dána jako $S : x + y + z = 1$, *pro* $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. *Normálový vektor směřuje dovnitř.*

Plocha S je částí jednotkového simplexu a je dána explicitně jako $z = 1 - x - y$ přes množinu $M : x \in (0, 1)$, $0 < y < 1 - x$. Dostáváme tedy vektor $(1, 1, 1)$, který směřuje nahoru, který je opačný s normálovým vektorem. To vidíme, neboť třetí souřadnice je kladná a tedy vektor směřuje vzhůru, normála však míří dolů. Počítáme tedy

$$\begin{aligned}
&-\iint_M xy^2 \cdot 1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_0^1 x \int_0^{1-x} y^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x = -\int_0^1 x \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x} \mathrm{d}x = \\
&= -\int_0^1 x\frac{(1-x)^3}{3}\mathrm{d}x = -\int_1^0 (1-t)\frac{t^3}{3} \cdot (-1)\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}\left[\frac{t^4}{4} - \frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \\
&= -\frac{1}{3}\frac{5-4}{20} = -\frac{1}{60}
\end{aligned}$$

Př. 416 *Spočtěte integrál*

$$\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + (z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde plocha je dána jako $S: x^2+y^2=1$*, pro* $0 \le z \le 1$*. Normálový vektor směřuje ven.*

Jedná se o část válcové plochy, proto parametrizujeme S jako $x=\cos u$, $y=\sin u$, $z=v$, přes množinu $M: u \in [0,2\pi]$, $v \in [0,1]$. Navíc počítáme

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos u$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\sin u & 0 \end{vmatrix} = \sin u$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Tedy dostáváme vektor $(\cos u, \sin u, 0)$. Tento směřuje vně a tedy odpovídá normálovému vektoru. Počítáme

$$\iint_M \cos u \cdot \cos u + \sin u \cdot \sin u + (v^2-1)\cdot 0 \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi}\int_0^1 1\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 2\pi$$

Př. 417 *Spočtěte integrál*

$$\iint_S x^2y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

kde plocha je dána jako $S: 4x^2+y^2+z^2=1$, *pro* $z \geq 0$. *Normálový vektor směřuje vně.*

Plocha S je polovinou elipsoidu. Parametrizujeme jej jako $x = \frac{1}{2}\cos u \sin v$, $y = \sin u \sin v$, $z = \cos v$, přes množinu $M: u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, \pi/2]$. Dopočítáme

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos u \sin v & \sin u \cos v \\ 0 & -\sin v \end{vmatrix} = -\cos u \sin^2 v$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -\sin v \\ -\frac{1}{2}\sin u \sin v & \frac{1}{2}\cos u \cos v \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\sin u \sin^2 v$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}\sin u \sin v & \frac{1}{2}\cos u \cos v \\ \cos u \sin v & \sin u \cos v \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\sin v \cos v$$

Dostáváme tedy vektor $\left(-\cos u \sin^2 v, -\frac{1}{2}\sin u \sin^2 v, -\frac{1}{2}\sin v \cos v\right)$, který směřuje dovnitř elipsoidu. Počítáme

$$\begin{aligned}
&-\iint_M \frac{1}{4}\cos^2 u \sin^2 v \sin^2 u \sin^2 v \cos v \cdot \left(-\frac{1}{2}\sin v \cos v\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \\
&= \frac{1}{8}\iint_M \cos^2 u \sin^2 u \sin^5 v \cos^2 v\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} \cos^2 u \sin^2 u\mathrm{d}u \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 v \cos^2 v\mathrm{d}v = \\
&= -\frac{1}{32}\int_0^{2\pi} \sin^2 2u\mathrm{d}u \int_1^0 (1-t^2)^2t^2\mathrm{d}t = \frac{1}{32}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4u}{2}\mathrm{d}u \int_0^1 t^2 - 2t^4 + t^6\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{64}\left[u - \frac{\sin 4u}{4}\right]_0^{2\pi} \left[\frac{t^3}{3} - 2\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7}\right]_0^1 = \frac{\pi}{32}\left(\frac{35-42+15}{105}\right) = \frac{\pi}{420}
\end{aligned}$$

Př. 418 *Spočtěte integrál*

$$\iint_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y - (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

kde plocha je dána jako $S : x^2 + y^2 = z$, *pro* $0 \le z \le 1$. *Normálový vektor směřuje vně.*

Jedná se o část paraboloidu. Parametrizujeme jej skrze válcové souřadnice jako $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u^2$, přes množinu $M : u \in [0,1]$, $v \in [0, 2\pi]$. Počítáme

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin v & u\cos v \\ 2u & 0 \end{vmatrix} = -2u^2 \cos v$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & 0 \\ \cos v & -u\sin v \end{vmatrix} = -2u^2 \sin v$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{vmatrix} = u$$

Dostáváme vektor $(-2u^2\cos v, -2u^2\sin v, u)$. Tento vektor směřuje vzhůru a tedy dovnitř. Počítáme tedy

$$\begin{aligned}
&-\iint_M u^2 \cdot u - (u\cos v + u\sin v)(-2u^2\sin v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \\
&= -\iint_M u^3(1 + 2\sin v\cos v + 2\sin^2 v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \\
&= -\int_0^1 u^3\mathrm{d}u \int_0^{2\pi} 1 + 2\sin v\cos v + 2\sin^2 v\mathrm{d}v = \\
&= -\left[\frac{u^4}{4}\right]_0^1 \int_0^{2\pi} 1 + \sin 2v + 2\frac{1-\cos 2v}{2}\mathrm{d}v = -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} 2\mathrm{d}v = -\frac{4\pi}{4} = -\pi
\end{aligned}$$

Př. 419 *Spočtěte integrál*

$$\iint_S xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde plocha je dána jako $S : x^2 + y^2 = 1$, *pro* $0 \leq z \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. *Normálový vektor směřuje dovnitř.*

Jedná se o část válcové plochy, parametrizujeme ji jako $x = \cos u$, $y = \sin u$, $z = v$, přes množinu $M : u \in [0, \pi/2]$, $v \in [0, 1]$. Navíc

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos u$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\sin u & 0 \end{vmatrix} = \sin u$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Což dává vektor $(\cos u, \sin u, 0)$, který směřuje vně plochy. Proto počítáme

$$\begin{aligned}
&-\iint_M v\cos^2 u + \cos^2 u \sin^2 u + v\sin^2 u \cdot 0\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 v\cos^2 u + \cos^2 u \sin^2 u\mathrm{d}v\mathrm{d}u = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 u}{2} + \cos^2 u \sin^2 u\mathrm{d}u = \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2u}{4} + \frac{\sin^2 2u}{4}\mathrm{d}u = -\left[\frac{u}{4} + \frac{\sin 2u}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4u}{8}\mathrm{d}u = \\
&= -\frac{\pi}{8} - \left[\frac{u}{8} - \frac{\sin 2u}{32}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3\pi}{16}
\end{aligned}$$

Př. 420 *Spočtěte integrál*

$$\iint_S x^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}z + z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde S je sféra $(x-A)^2 + (y-B)^2 + (z-C)^2 = R^2$, $R > 0$. Normálový vektor směřuje dovnitř.

Parametrizujeme plochu S jako $x = R\cos u \sin v + A$, $y = R\sin u \sin v + B$, $z = R\cos v + C$, přes množinu $M : u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, \pi]$. Navíc

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R\cos u \sin v & R\sin u \cos v \\ 0 & -R\sin v \end{vmatrix} = -R^2 \cos u \sin^2 v$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -R\sin v \\ -R\sin u \sin v & R\cos u \cos v \end{vmatrix} = -R^2 \sin u \sin^2 v$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -R\sin u \sin v & R\cos u \cos v \\ R\cos u \sin v & R\sin u \cos v \end{vmatrix} = -R^2 \sin v \cos v$$

Získaný vektor $(-R^2 \cos u \sin^2 v, -R^2 \sin u \sin^2 v, -R^2 \sin v \cos v)$, který směřuje dovnitř sféry. Počítáme

$$-R^2 \iint_M \cos u \sin^2 v (R\cos u \sin v + A)^2 + \sin u \sin^2 v (R\sin u \sin v + B)^2 + \\ + \sin v \cos v (R\cos v + C)^2 \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Po jednotlivých integrálech dostaneme

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos u \sin^2 v (R\cos u \sin v + A)^2 \mathrm{d}v\mathrm{d}u =$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R^2 \cos^3 u \sin^4 v + 2AR\cos^2 u \sin^3 v + A^2 \cos u \sin^2 v \mathrm{d}v\mathrm{d}u =$$
$$= R^2 \left[\sin u - \frac{\sin^3 u}{3}\right]_0^{2\pi} \left[\frac{\sin 4v}{32} - \frac{\sin 2v}{4} + \frac{3v}{8}\right]_0^{\pi} +$$
$$+ 2AR \left[\frac{\cos u \sin u + u}{2}\right]_0^{2\pi} \left[\frac{\cos^3 v}{3} - \cos v\right]_0^{\pi} +$$
$$+ A^2 [\sin u]_0^{2\pi} \left[\frac{v - \cos v \sin v}{2}\right]_0^{\pi} = 0 + 2AR\frac{2\pi}{2}\left(-\frac{2}{3} + 2\right) + 0 = \frac{8}{3}AR\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin u \sin^2 v (R\sin u \sin v + B)^2 \mathrm{d}v\mathrm{d}u =$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R^2 \sin^3 u \sin^4 v + 2BR\sin^2 u \sin^3 v + B^2 \sin u \sin^2 v \mathrm{d}v\mathrm{d}u =$$
$$= R^2 \left[\frac{\cos^3 u}{3} - \cos u\right]_0^{2\pi} \left[\frac{\sin 4v}{32} - \frac{\sin 2v}{4} + \frac{3v}{8}\right]_0^{\pi} +$$
$$+ 2BR \left[\frac{u - \cos u \sin u}{2}\right]_0^{2\pi} \left[\frac{\cos^3 v}{3} - \cos v\right]_0^{\pi} +$$
$$+ B^2 [-\cos u]_0^{2\pi} \left[\frac{v - \cos v \sin v}{2}\right]_0^{\pi} = 0 + 2B\frac{2\pi}{2}\left(-\frac{2}{3} + 2\right) = \frac{8}{3}BR\pi$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin v \cos v (R\cos v + C)^2 \mathrm{d}v\mathrm{d}u = \\
&= 2\pi \int_0^{\pi} R^2 \sin v \cos^3 v + 2CR \sin v \cos^2 v + C^2 \sin v \cos v \mathrm{d}v = \\
&= 2\pi \left[-R^2 \frac{\cos^4 v}{4} - 2CR \frac{\cos^3 v}{3} - C^2 \frac{\cos^2 v}{2} \right]_0^{\pi} = \\
&= 0 - 4CR\pi \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) + 0 = \frac{8}{3} CR\pi
\end{aligned}
$$

Dohromady máme tedy v součtu $-\frac{8R^3\pi}{3}(A + B + C)$.

Př. 421 *Spočtěte integrál*

$$\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde S je sféra $x^2+y^2+z^2=R^2$, $R>0$. Normálový vektor směřuje vně.

Parametrizujeme plochu S jako $x = R\cos u\sin v$, $y = R\sin u\sin v$, $z = R\cos v$, přes množinu $M : u\in[0,2\pi]$, $v\in[0,\pi]$. Navíc

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R\cos u\sin v & R\sin u\cos v \\ 0 & -R\sin v \end{vmatrix} = -R^2\cos u\sin^2 v$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -R\sin v \\ -R\sin u\sin v & R\cos u\cos v \end{vmatrix} = -R^2\sin u\sin^2 v$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -R\sin u\sin v & R\cos u\cos v \\ R\cos u\sin v & R\sin u\cos v \end{vmatrix} = -R^2\sin v\cos v$$

Získaný vektor $(-R^2\cos u\sin^2 v, -R^2\sin u\sin^2 v, -R^2\sin v\cos v)$, který směřuje dovnitř sféry. Počítáme tedy

$$\begin{aligned} & R^3\iint_M \cos^2 u\sin^3 v + \sin^2 u\sin^3 v + \sin v\cos^2 v\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \\ & = R^3\iint_M \sin^3 v + \sin v\cos^2 v\mathrm{d}u\mathrm{d}v = R^3\iint_M \sin v\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \\ & = R^3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin v\mathrm{d}v\mathrm{d}u = 2R^3\pi\left[-\cos v\right]_0^{\pi} = 2R^3\pi(1+1) = 4R^3\pi \end{aligned}$$

Př. 422 *Spočtěte integrál*

$$\iint_S (y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde S je sféra $z^2 = x^2 + y^2$, pro $0 \le z \le A$, $A > 0$. Normálový vektor směřuje vně.

Máme část kužele a parametrizujeme jej jako $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u$, přes množinu $M : v \in [0, 2\pi]$, $u \in [0, A]$. Navíc

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin v & u\cos v \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -u\cos v$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos v & -u\sin v \end{vmatrix} = -u\sin v$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{vmatrix} = u$$

Vektor $(-u\cos v, -u\sin v, u)$ směřuje vzhůru a tedy dovnitř kužele. Počítáme

$$\begin{aligned} &-\iint_M -u^2(\sin v - 1)\cos v - u^2(1-\cos v)\sin v + u^2(\cos v - \sin v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \\ &= \int_0^A u^2\mathrm{d}u \int_0^{2\pi} \sin v - 1 + 1 - \cos v - \cos v + \sin v\mathrm{d}v = \\ &= \frac{A^3}{3}\left[-2\cos v - 2\sin v\right]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

Př. 423 *Spočtěte integrál*

$$\iint_S \frac{1}{x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{1}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}z + \frac{1}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde S je elipsoid $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$, $A > 0, B > 0, C > 0$. Normálový vektor směřuje vně.

Elipsoid můžeme parametrizovat jako $x = A\cos u \sin v$, $y = B\sin u \sin v$, $z = C\cos v$, přes množinu $M : u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, \pi]$. Navíc

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B\cos u \sin v & B\sin u \cos v \\ 0 & -C\sin v \end{vmatrix} = -BC\cos u \sin^2 v$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -C\sin v \\ -A\sin u \sin v & A\cos u \cos v \end{vmatrix} = -AC\sin u \sin^2 v$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -A\sin u \sin v & A\cos u \cos v \\ B\cos u \sin v & B\sin u \cos v \end{vmatrix} = -AB\sin v \cos v$$

Dostaneme vektor $(-BC\cos u \sin^2 v, -AC\sin u \sin^2 v, -AB\sin v \cos v)$, který směřuje dovnitř elipsoidu. Počítáme

$$-\iint_M \frac{-BC\cos u \sin^2 v}{A\cos u \sin v} + \frac{-AC\sin u \sin^2 v}{B\sin u \sin v} + \frac{-AB\sin v \cos v}{C\cos v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{BC}{A}\sin v + \frac{AC}{B}\sin v + \frac{AB}{C}\sin v\mathrm{d}u\mathrm{d}v =$$

$$= 2\pi\frac{B^2C^2 + A^2C^2 + A^2B^2}{ABC}\left[-\cos v\right]_0^{\pi} = 4\pi\frac{B^2C^2 + A^2C^2 + A^2B^2}{ABC}$$

Př. 424 *Vypočtěte plošný integrál*

$$\iint_S y\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}z,$$

kde S je plocha $x + z = 1$ ohraničená $x^2 + y^2 \leq 1$. Normálový vektor směřuje vně.

Plochu parametrizujeme jako $x = u$, $y = v$, $z = 1 - u$ přes množinu $M : x^2 + y^2 \leq 1$. Dostáváme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A, B, C) = (1, 0, 1)\,,$$

Počítáme

$$\iint_M v \cdot 1 + (1-u) \cdot 0\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^2 \sin\varphi \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi =$$
$$= [-\cos\varphi]_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 = 0 \cdot \frac{1}{3} = 0$$

13 Gaussova-Ostrogradského věta, Stokesova věta

Nechť V je jednoduchý obor v $\mathbb{R}^3$ a plocha S jeho hranicí. Nechť funkce P, Q, R a P_x, Q_y, R_z jsou spojité funkce na $V \cup S$ a S je ohraničená, orientovaná ve směru vnější normály, potom

$$\iint_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$
$$= \iiint_V P_x(x,y,z) + Q_y(x,y,z) + R_z(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Zvolíme-li funkce P, Q, R tak aby $P_x + Q_y + R_z = C$, kde $C \in \mathbb{R}$, pak můžeme pomocí G-O věty počítat objem tělesa V, pokud V splňuje předpoklady věty. Vhodné volby jsou např.

$$\begin{aligned}
&P = x,\ Q = 0,\ R = 0,\\
&P = 0,\ Q = y,\ R = 0,\\
&P = 0,\ Q = 0,\ R = z,\\
&P = \frac{x}{3},\ Q = \frac{y}{3},\ R = \frac{z}{3},\\
&P = \frac{x}{2},\ Q = \frac{y}{2},\ R = 0,
\end{aligned}$$

a různé další kombinace.

Nechť plocha S je omezená prostorovou křivkou C tvořící okraj S. Dále nechť plochu S lze rozložit na konečný počet funkcí proměnných x, y, také pro y, z a x, z. Nechť funkce P, Q, R mají na S spojité první parciální derivace a C je orientovaná souhlasně s S, potom

$$\int_C P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z =$$
$$= \iint_S (R_y - Q_z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (P_z - R_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + (Q_x - P_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Př. 425 *Pomocí G-O věty transformujte integrál*

$$\iint_S x^3 \mathrm{d}y \mathrm{d}z + y^3 \mathrm{d}x \mathrm{d}z + z^3 \mathrm{d}x \mathrm{d}y,$$

kde S je hranice ohraničeného jednoduchého oboru V orientovaná ve směru vnější normály.

Funkce $P(x, y, z) = x^3$, $Q(x, y, z) = y^3$, $R(x, y, z) = z^3$ mají všechny derivace spojité. Dostáváme tedy integrál jako

$$\iint_S x^3 \mathrm{d}y \mathrm{d}z + y^3 \mathrm{d}x \mathrm{d}z + z^3 \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \iiint_V 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$

Př. 426 *Pomocí G-O věty transformujte integrál*

$$\iint_S yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + xz\mathrm{d}x\mathrm{d}z + xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde S je hranice ohraničeného jednoduchého oboru V orientovaná ve směru vnější normály.

Funkce $P(x,y,z) = yz$, $Q(x,y,z) = xz$, $R(x,y,z) = xy$ mají všechny derivace spojité. Dostáváme tedy integrál jako

$$\iint_S yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + xz\mathrm{d}x\mathrm{d}z + xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_V 0 + 0 + 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$$

Př. 427 *Pomocí G-O věty transformujte integrál*

$$\iint_S \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}z + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde S je hranice ohraničeného jednoduchého oboru V orientovaná ve směru vnější normály a V neobsahuje ve svém uzávěru počátek.

Funkce P, Q, R jsou nespojité pouze v počátku stejně jako jejich derivace. Tedy můžeme použít G-O větu a dostáváme

$$\begin{aligned}
&\iint_S \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}z + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\
&= \iiint_V \frac{y^2+z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} + \frac{x^2+z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} + \frac{x^2+y^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \\
&= \iiint_V \frac{2x^2+2y^2+2z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\iiint_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Př. 428 *Pomocí G-O věty transformujte integrál*

$$\iint_S F_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z + F_y \mathrm{d}x\mathrm{d}z + F_z \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde S je hranice ohraničeného jednoduchého oboru V orientovaná ve směru vnější normály a funkce $F(x,y,z)$ má spojité druhé parciální derivace na $\bar{V}$.

Neboť má funkce F spojité parciální derivace, lze aplikovat G-O větu a dostáváme tak

$$\iint_S F_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z + F_y \mathrm{d}x\mathrm{d}z + F_z \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_V F_{xx} + F_{yy} + F_{zz} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_V \triangle F \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Kde $\triangle F$ je Laplaceův operátor funkce $F(x,y,z)$.

Př. 429 *Pomocí G-O věty transformujte integrál*

$$\iint_S (R_y - Q_z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (P_z - R_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + (Q_x - P_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde S je hranice ohraničeného jednoduchého oboru V orientovaná ve směru vnější normály a funkce $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ mají spojité druhé parciální derivace na $\bar{V}$.

Neboť mají funkce P, Q, R spojité parc. derivace, můžeme použít G-O větu. Dostáváme

$$\begin{aligned}&\iint_S (R_y - Q_z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (P_z - R_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + (Q_x - P_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\ &= \iiint_V R_{yx} - Q_{zx} + P_{zy} - R_{xy} + Q_{xz} - P_{yz}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0\end{aligned}$$

Neboť dle schwartzovy věty lze zaměnit pořadí derivací.

Př. 430 *Spočtěte integrál*

$$\iint_S x^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}z + z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde S je hranice krychle $[0,1]^3$. Normálový vektor směřuje vně.

Krychle $V = [0,1]^3$ je jednoduchým oborem a funkce $P(x,y,z) = x^2$, $Q(x,y,z) = y^2$, $R(x,y,z) = z^2$ mají všechny derivace spojité. Můžeme tedy využit G-O větu a dostaneme integrál

$$\begin{aligned}
&\iiint_V 2x + 2y + 2z \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 2x \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 2y \mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}y + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 2z \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \\
&= 1 \cdot 1 \int_0^1 2x \mathrm{d}x + 1 \cdot 1 \int_0^1 2y \mathrm{d}y + 1 \cdot 1 \int_0^1 2z \mathrm{d}z = \left[x^2\right]_0^1 + \left[y^2\right]_0^1 + \left[z^2\right]_0^1 = 3
\end{aligned}$$

Př. 431 *Spočtěte integrál*

$$I = \iint_S xz \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde S je dána jako $x+y+z=1$, pro $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Normálový vektor směřuje vně.

Plocha S je částí hranice jednotkového simplexu V, který je jednoduchým oborem. Spočteme-li integrál

$$\iint_{H_i} xz \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

přes zbývající hranice H_i množiny V, můžeme hledaný integrál I dopočítat skrze G-O větu. K tomu musí samozřejmě být H_i orientované ve směru vnější normály.

Množina V má kromě plochy S ještě hranice $H_1 : x \in [0,1]$, $0 \leq y \leq 1-x$, $z=0$, kterou parametrizujeme snadno jako $x=u$, $y=v$, $z=0$. Dostaneme tedy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A,B,C) = (0,0,1),$$

který je orientovaný nesouhlasně. Počítáme

$$I_1 = -\iint_{H_1} xz \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_M u \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

Dále počítáme $H_2 : y \in [0,1]$, $0 \leq z \leq 1-y$, $x=0$, kterou parametrizujeme snadno jako $x=0$, $y=u$, $z=v$. Dostaneme tedy

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A,B,C) = (1,0,0),$$

který je orientovaný nesouhlasně. Počítáme

$$I_2 = -\iint_{H_2} xz \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_M 0 \cdot v \cdot 0 = 0$$

a $H_3 : x \in [0,1]$, $0 \leq z \leq 1-x$, $y=0$, kterou parametrizujeme snadno jako $x=u$, $y=0$, $z=v$. Dostaneme tedy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A,B,C) = (0,1,0),$$

který je orientovaný nesouhlasně. Počítáme

$$I_3 = -\iint_{H_3} xz \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_M u \cdot v \cdot 0 = 0$$

Nakonec dostaneme

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V x \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - I_1 - I_2 - I_3 = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \\ &= \int_0^1 x \int_0^{1-x} 1-x-y \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 x \left[y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} = \\ &= \int_0^1 \frac{x}{2} - x^2 + \frac{x^3}{2} \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

Př. 432 *Spočtěte integrál*

$$I = \iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde S je dána jako $x^2 + y^2 = (z-1)^2$, pro $0 \le z \le 1$. Normálový vektor směřuje vně.

Pro $z = C$, $C \in \mathbb{R}$, dostaneme vždy řez plochou jako kružnici. Pro $z = 0$ s poloměrem 1 a pro rostoucí z se bude tento poloměr zmenšovat do okamžiku, kdy $z = 1$ je poloměr 0. Jedná se tedy o kužel. Spočítáme-li navíc integrál přes plochu $S_2 : z = 0$ pro $x^2 + y^2 \le 1$, můžeme hledaný integrál získat skrze G-O větu, přes V daný kužel. Plochu S_2 parametrizujeme jako $x = u$, $y = v$, $z = 0$. Dostaneme tedy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A, B, C) = (0, 0, 1),$$

který je orientovaný nesouhlasně. Počítáme tedy

$$I_2 = \iint_M u \cdot 0 + v^2 \cdot 0 + v \cdot 0 \cdot 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$$

Celkový integrál tedy získáme jako

$$I = \iiint_V 1 + 2y + y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - I_2 = \iiint_V 1 + 3y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Tento integrál transformujeme do válcových souřadnic $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$, čímž získáme ohraničení $\rho \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ a z nerovnosti $x^2 + y^2 \ge (z-1)^2$ dostaneme $z \in [0, \rho+1]$. Počítáme

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\rho+1} (1 + 3\rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}z\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\rho + 3\rho^2\sin\varphi)(\rho+1)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^2 + \rho + 3(\rho^3 + \rho^2)\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \\
&= 2\pi \left[\frac{\rho^3}{3} + \frac{\rho^2}{2}\right]_0^1 + 3\left[-\cos\varphi\right]_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^4}{4} + \frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) + 0 = \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

Př. 433 *Spočtěte integrál*

$$I = \iint_S y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde S je dána jako hranice množiny ohraničené $z = xy$, $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Normálový vektor směřuje vně.

Neboť se jedná o hranici množiny V můžeme aplikovat G-O větu a počítáme

$$\iint_S y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_V 2y + 1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Jedná se část uříznutého válce, použijeme tedy válcových souřadnic pro $\rho \in [0,1]$, $\varphi \in [0, \pi/2]$, $z \in [0, \rho^2 \cos\varphi \sin\varphi]$. Což nám dává

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho^2 \cos\varphi \sin\varphi} (2\rho \sin\varphi + 1)\rho \mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho = \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2\rho^2 \sin\varphi + \rho)\rho^2 \cos\varphi \sin\varphi \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho = \\
&= \int_0^1 2\rho^4 \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \cos\varphi \sin^2\varphi \mathrm{d}\varphi + \int_0^1 \rho^3 \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \cos\varphi \sin\varphi \mathrm{d}\varphi = \\
&= 2\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^1 \left[\frac{\sin^3\varphi}{3}\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 \left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{2\pi} = 0
\end{aligned}$$

Př. 434 *Vypočtěte objem tělesa, které je ohraničené plochami $z = \pm C$, a $x = A\cos u\cos v + B\sin u\sin v$, $y = A\cos u\sin v - B\sin u\cos v$, $z = C\sin u$, kde $A > 0, B > 0, C > 0$.*

Hraniční plocha pláště je omezená na ose z pro $u \in [\pi/2, 3\pi/2]$ a $v \in [0, 2\pi]$, neboť v není nijak omezeno. Objem následně dostaneme jako

$$m(V) = \sum_{i=1}^{3} \iint_{S_i} P_i \mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q_i \mathrm{d}x\mathrm{d}z + R_i \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Pro vhodně zvolené funkce P_i, Q_i, R_i. Plochy $S_{1,2}$ jsou určeny jako $z = \pm C$ a proto je lze parametrizovat jako $x = u$, $y = v$, $z = \pm C$, což nám dá

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A, B, C) = (0, 0, 1),$$

Což až na znaménka dává integrály

$$\iint_{M_{1,2}} P_{1,2}(x, y, \pm C) \cdot 0 + Q_{1,2}(x, y, \pm C) \cdot 0 + R_{1,2}(x, y, \pm C) \cdot 1 \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Z těchto důvodů volíme $R(x, y, z) = 0$, aby integrály vyšly nulové. Parametrizaci třetí plochy již máme, dostáváme tedy

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -A\sin u\sin v - B\cos u\cos v & A\cos u\cos v + B\sin u\sin v \\ C\cos u & 0 \end{vmatrix} = -Cx\cos u$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C\cos u & 0 \\ -A\sin u\cos v + B\cos u\sin v & -A\cos u\sin v + B\sin u\cos v \end{vmatrix} = -Cy\cos u$$

$$\begin{aligned} C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -A\sin u\cos v + B\cos u\sin v & -A\cos u\sin v + B\sin u\cos v \\ -A\sin u\sin v - B\cos u\cos v & A\cos u\cos v + B\sin u\sin v \end{vmatrix} = \\ &= -Ax\sin u\cos v + Bx\cos u\sin v + Ay\sin u\sin v + By\cos u\cos v = \\ &= A\sin u(y\sin v - x\cos v) + B\cos u(x\sin v + y\cos v) = \\ &= B\cos u(A\cos u\cos v\sin v + B\sin u\sin^2 v + A\cos u\sin v\cos v - B\sin u\cos^2 v) + \\ &+ A\sin u(A\cos u\sin^2 v - B\sin u\cos v\sin v - A\cos u\cos^2 v - B\sin u\sin v\cos v) = \\ &= 2AB\cos^2 u\sin v\cos v + B^2\sin u\cos u(\sin^2 v - \cos^2 v) - \\ &- 2AB\sin^2 u\sin v\cos v + A^2\sin u\cos u(\sin^2 v - \cos^2 v) = \\ &= AB\cos 2u\sin 2v - \frac{A^2 + B^2}{2}\sin 2u\cos 2v \end{aligned}$$

Přičemž poslední výpočet jsme nemuseli provádět, neboť C do počítaného integrálu nevstupuje.

Dostáváme tedy integrál

$$-C\iint_{M_3} P_3(x, y, \pm C)x\cos u + Q_3(x, y, \pm C)y\sin v \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Zvolíme $P_3 = \frac{x}{2}$, $Q_3 = \frac{y}{2}$, čímž dostaneme

$$
\begin{aligned}
&-\frac{C}{2}\iint_{M_3} \cos u(x^2+y^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \\
&= -\frac{C}{2}\iint_{M_3} \cos u(A^2\cos^2 u\cos^2 v + B^2\sin^2 u\sin^2 v + A^2\cos^2 u\sin^2 v + B^2\sin^2 u\cos^2 v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \\
&= -\frac{C}{2}\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos u(A^2\cos^2 u + B^2\sin^2 u)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = -C\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} A^2\cos^3 u + B^2\cos u\sin^2 u\mathrm{d}u = \\
&= -C\pi\left[A^2\left(\sin u - \frac{\sin^3 u}{3}\right) + B^2\frac{\sin^3}{3}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = -C\pi\left(2A^2\left(-1+\frac{1}{3}\right) - B^2\frac{2}{3}\right) = \\
&= \frac{2C\pi}{3}(2A^2+B^2)
\end{aligned}
$$

Neboť nám vyšel výsledek kladný, vidíme, že parametrizace určuje souhlasnou orientaci.

Př. 435 *Vypočtěte objem tělesa, jehož hranicí je torus* $x = (B + A\cos u)\cos v$, $y = (B + A\cos u)\sin v$, $z = A\sin u$, $A > 0, B > 0$.

Objem spočteme pomocí plošného integrálu pro vhodně zvolené funkce P, Q, R. Plocha je parametrizovaná přes množinu $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, 2\pi]$. Počítáme

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -A\sin u \sin v & (B + A\cos u)\cos v \\ A\cos v & 0 \end{vmatrix} = -A(B + A\cos u)\cos^2 v$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A\cos v & 0 \\ -A\sin u \cos v & -(B + A\cos u)\sin v \end{vmatrix} = -A(B + A\cos u)\cos v \sin v$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -A\sin u \cos v & -(B + A\cos u)\sin v \\ -A\sin u \sin v & (B + A\cos u)\cos v \end{vmatrix} = -A(B + A\cos u)\sin u$$

Objem tak můžeme spočítat jako integrál

$$\begin{aligned} m(V) &= \iint_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_M A^2 \sin^2 u(B + A\cos u)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \\ &= -A^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} B\sin^2 u + A\sin^2 u \cos u\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \\ &= -2\pi A^2 \left[B\frac{u - \sin u \cos u}{2} + A\frac{\sin^3 u}{3} \right]_0^{2\pi} = -2A^2 B\pi^2 \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že objem vyšel jako záporný, vidíme, že parametrizace je nesouhlasná a tedy je objem toru $2A^2B\pi^2$.

Př. 436 *Spočtěte integrál*

$$\iint_S x^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}z + z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde S je hranice krychle $[0, A]^3$, $A > 0$. Normálový vektor směřuje vně.

Krychle $V = [0, A]^3$ je jednoduchým oborem a funkce $P(x, y, z) = x^2$, $Q(x, y, z) = y^2$, $R(x, y, z) = z^2$ mají všechny derivace spojité. Můžeme tedy využit G-O větu a dostaneme integrál

$$\begin{aligned}
&\iiint_V 2x + 2y + 2z \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \\
&= \int_0^A \int_0^A \int_0^A 2x \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_0^A \int_0^A \int_0^A 2y \mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}y + \int_0^A \int_0^A \int_0^A 2z \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \\
&= A^2 \int_0^A 2x \mathrm{d}x + A^2 \int_0^A 2y \mathrm{d}y + A^2 \int_0^A 2z \mathrm{d}z = A^2 \left[x^2\right]_0^A + A^2 \left[y^2\right]_0^A + A^2 \left[z^2\right]_0^A = 3A^4
\end{aligned}$$

Př. 437 *Spočtěte integrál*

$$\iint_S x^3 \mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}z + z^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde S je hranice sféry $x^2 + y^2 + z^2 = A^2$, $A > 0$. Normálový vektor směřuje vně.

Sféra V je jednoduchým oborem a funkce P, Q, R mají všechny derivace spojité. Dostáváme pomocí G-O věty

$$3 \iiint_V x^2 + y^2 + z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 3 \int_0^A \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho^4 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\rho =$$
$$= 6\pi \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^A = \frac{12A^5\pi}{5}$$

Př. 438 *Spočtěte integrál*

$$\iint_S x^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}z + z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde S je dána jako $x^2 + y^2 = z^2$ pro $0 \leq z \leq A$, $A > 0$. Normálový vektor směřuje vně.

Jedná se o povrch kužele V, který je obrácený podstavou vzhůru. Integrál spočítáme jako integrál přes množinu V od kterého odečteme

$$\iint_{S_2} x^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}z + z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde S_2 je podstava kužele, kterou můžeme parametrizovat jako $x = u$, $y = v$, $z = A$, přes množinu $M_2 : x^2 + y^2 \leq A^2$. Dostáváme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A, B, C) = (0, 0, 1),$$

Tento vektor směřuje vzhůru a tedy je orientován vně. Počítáme tedy

$$\iint_{M_2} u^2 \cdot 0 + v^2 \cdot 0 + A^2 \cdot 1 \mathrm{d}u\mathrm{d}v = A^2 \iint_{M_2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \pi A^4$$

Neboť se jedná o obsah kruhu s poloměrem A. Dále podle G-O věty dostáváme

$$\begin{aligned}
&\iiint_V 2x + 2y + 2z \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^A \int_\rho^A (\rho \cos\varphi + \rho \sin\varphi + z)\rho \mathrm{d}z\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \\
&= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^A (\rho^2 \cos\varphi + \rho^2 \sin\varphi)(A - \rho) + \rho \left[\frac{z^2}{2}\right]_\rho^A \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \\
&= 2 \int_0^{2\pi} \cos\varphi + \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \int_0^A A\rho^2 - \rho^3 \mathrm{d}\rho + 2\pi \int_0^A A^2\rho - \rho^3 \mathrm{d}\rho = \\
&= 2 \left[A^2 \frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^4}{4}\right]_0^A [\sin\varphi - \cos\varphi]_0^{2\pi} + 2\pi \left[A^2 \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right]_0^A = 0 + \pi \left(A^4 - \frac{A^4}{2}\right) = \\
&= \frac{A^4}{2}\pi
\end{aligned}$$

Dohromady tedy dostáváme $\frac{A^4}{2}\pi - \pi A^4 = -\frac{A^4}{2}\pi$.

Př. 439 *Užitím Stokesovy věty vypočtěte křivkový integrál*

$$\int_C (y+z)\mathrm{d}x + (z+x)\mathrm{d}y + (x+y)\mathrm{d}z,$$

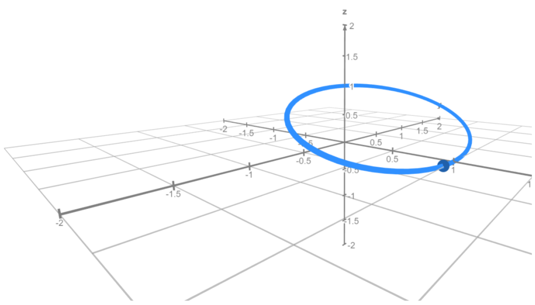
kde C je elipsa $x = A\sin^2 t$, $y = 2A\sin t\cos t$, $z = A\cos^2 t$, pro $t \in [0,\pi]$, $A > 0$ orientovaná po směru růstu parametru t.

Elipsa leží na elipsoidu $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{2A^2} + \frac{z^2}{A^2} = 1$ a dělí jej na dvě poloviny. Vezmeme-li plochu S jako jednu polovinu tohoto elipsoidu, křivka C tvoří její okraj. Navíc funkce P, Q, R mají všechny derivace spojité a z rovnice elipsoidu vždy dokážeme vyjádřit některou z proměnných, např. jako $y = \pm 2\sqrt{A^2 - x^2 - z^2}$. Tedy jako složení dvou funkcí. Dostáváme tedy integrál

$$\iint_S (1-1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (1-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + (1-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

Orientaci nemusíme řešit, neboť výsledek na ní nezávisí.

Elipsu si můžeme zobrazit, např. pro $A = 1$ v prostoru



Př. 440 *Užitím Stokesovy věty vypočtěte křivkový integrál*

$$\int_C (y-z)\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z,$$

kde C je elipsa $x^2+y^2=A^2$, $\frac{x}{A}+\frac{z}{B}=1$, $A>0$, $B>0$ orientovaná proti směru hodinových ručiček při pohledu z vrchu.

Křivka je tvořena průnikem válce s rovinou. Jedná se tedy o plochu $z=B\left(1-\frac{x}{A}\right)$ vyříznutou válcem parametrizovanou přes množinu $M: x^2+y^2\le A^2$. Proto ji lze parametrizovat jako $x=u$, $y=v$, $z=B\left(1-\frac{u}{A}\right)$ a dostáváme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{B}{A} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A,B,C)=\left(\frac{B}{A},0,1\right),$$

Elipsa je orientovaná proti směru hodinových ručiček. Vzhledem k pravidlu pravé ruky tedy bude rovina orientovaná souhlasně, pokud bude normálový vektor směřovat vzhůru. Tato orientace navíc souhlasí s parametrizací. Počítáme tedy

$$\iint_S (-1-1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (-1-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + (-1-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -2\iint_M \frac{B}{A}+0+1\mathrm{d}u\mathrm{d}v =$$
$$= -2\left(1+\frac{B}{A}\right)m(M) = -2\pi A^2\left(1+\frac{B}{A}\right)$$

Př. 441 *Užitím Stokesovy věty vypočtěte křivkový integrál*

$$\int_C (y^2+z^2)\mathrm{d}x + (z^2+x^2)\mathrm{d}y + (x^2+y^2)\mathrm{d}z,$$

kde C je křivka vzniklá průnikem $x^2+y^2+z^2=A^2$ a $x^2+y^2=B^2$, kde $0<B, 0<A$ a $z\geq 0$. Plocha je zde orientovaná proti směru hodinových ručiček při pohledu shora.

Tentokrát se jedná o průnik sféry $x^2+y^2+z^2=A^2$ a válce $x^2+y^2=B^2$, přesněji o průnik horní polosféry s válcem. Křivka je tedy hranicí plochy S vyjádřené jako $z=\sqrt{A^2-y^2-x^2}$ přes množinu $M: x^2+y^2\leq B^2$. Neboť se jedná o část sféry, můžeme ji vždy vyjádřit jako složení nejvýše dvou funkcí. Dostáváme

$$\iint_S (2y-2z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (2z-2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + (2x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Plochu parametrizujeme jako $x=u$, $y=v$, $z=\sqrt{A^2-v^2-u^2}$ a tedy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{u}{\sqrt{A^2-v^2-u^2}} \\ 0 & 1 & -\frac{v}{\sqrt{A^2-v^2-(u-A)^2}} \end{pmatrix} \Rightarrow (A,B,C) =$$
$$= \left(\frac{u}{\sqrt{A^2-v^2-u^2}}, \frac{v}{\sqrt{A^2-v^2-u^2}}, 1\right),$$

Křivka průniku je orientovaná proti směru hodinových ručiček. Vzhledem k pravidlu pravé ruky tedy bude rovina orientovaná souhlasně, pokud bude normálový vektor směřovat vzhůru. Tato orientace navíc souhlasí s parametrizací. Počítáme tedy

$$2\iint_M \frac{(v-\sqrt{A^2-v^2-u^2})u}{\sqrt{A^2-v^2-u^2}} + \frac{(\sqrt{A^2-v^2-u^2}-u)v}{\sqrt{A^2-v^2-u^2}} + u - v\mathrm{d}u\mathrm{d}v =$$
$$= 2\iint_M \frac{vu - u\sqrt{A^2-v^2-u^2} + v\sqrt{A^2-v^2-u^2} - uv}{\sqrt{A^2-v^2-u^2}} + u - v\mathrm{d}u\mathrm{d}v =$$
$$= 2\iint_M \frac{(v-u)\sqrt{A^2-v^2-u^2}}{\sqrt{A^2-v^2-u^2}} + u - v\mathrm{d}u\mathrm{d}v =$$
$$= 2\iint_M v - u + u - v\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 2\iint_M 0\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 0$$

Př. 442 *Užitím Stokesovy věty vypočtěte křivkový integrál*

$$\int_C (y^2 - z^2)\mathrm{d}x + (z^2 - x^2)\mathrm{d}y + (x^2 - y^2)\mathrm{d}z,$$

kde C *je řez krychle* $[0, A]^3$ *rovinou* $x + y + z = \frac{3}{2}A$, $A > 0$, *orientovaný proti směru hodinových ručiček.*

Jedná se o průnik sféry a roviny. Křivka tvoří hranici plochy S, která je částí roviny $x = u$, $y = v$, $z = \frac{3}{2}A - u - v$, přes množinu $M : [0, A]^2$. Což dává

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A, B, C) = (1, 1, 1)\,,$$

Křivka průniku je orientovaná proti směru hodinových ručiček. Vzhledem k pravidlu pravé ruky tedy bude rovina orientovaná souhlasně, pokud bude normálový vektor směřovat vzhůru. Tato orientace navíc souhlasí s parametrizací. Počítáme tedy

$$\begin{aligned}
&\iint_S (-2y - 2z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (-2z - 2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + (-2x - 2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\
&= -2\iint_M v + \frac{3}{2}A - u - v + \frac{3}{2}A - u - v + u + u + v\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \\
&= -2\iint_M 3A\mathrm{d}u\mathrm{d}v = -6Am(M) = -6A^3
\end{aligned}$$

Př. 443 *Užitím Stokesovy věty vypočtěte křivkový integrál*

$$\int_C y^2 z^2 \mathrm{d}x + x^2 z^2 \mathrm{d}y + x^2 y^2 \mathrm{d}z,$$

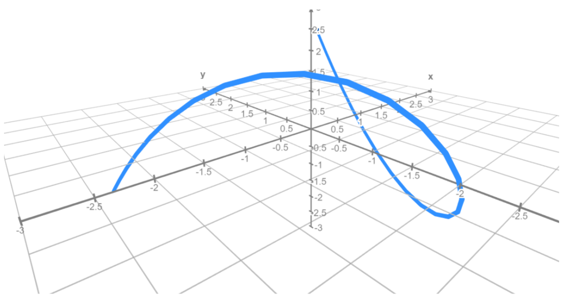
kde C *je uzavřená křivka parametrizovaná jako* $x = A\cos t$, $y = A\cos 2t$, $z = A\cos 3t$, $A > 0$.

Vidíme, že funkce $\cos t$ je 2π periodická. Zato funkce $\cos 2t$ je π periodická. Křivka je tedy uzavřená pro $t \in [0, 2\pi]$ nebo alternativně $t \in [-\pi, \pi]$. Avšak funkce $\cos t$ je také sudá, proto na intervalu $[-\pi, 0]$ křivka opisuje stejnou trasu jako na intervalu $[0, \pi]$. Tato křivka vymezuje plochu, která je identická s křivkou C. Můžeme tedy počítat integrál jako

$$\begin{aligned}
&\iint_S 2x^2(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2y^2(z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + 2z^2(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\
&= \iint_M 2x^2(y-z)A + 2y^2(z-x)B + 2z^2(x-y)C\mathrm{d}u\mathrm{d}v,
\end{aligned}$$

Kde plochu S bychom parametrizovali jako $x = A\cos u$, $y = A\cos 2u$, $z = A\cos 3u$ přes množinu $M : [0, 2\pi] \times 0$, která je však nulové míry, stejně jako $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$. Integrál je tedy 0.

Křivku můžeme vykreslit jako



14 Riemanův Stiltjesův integrál

V této části využíváme definici tak jak je uvedena v **!!!!!!! citace !!!!!** Nechť F je funkce n proměnných. Zavedeme pro $a, b \in \mathbb{R}$ funkci $n-1$ proměnných

$$D_k(a,b)[F] = F(\dots, b, \dots) - F(\dots, a, \dots)$$

a indukcí ji pak rozšíříme pro vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ na funkci

$$D(\mathbf{a},\mathbf{b})[F] = D_n(a_n, b_n)[D_{n-1}(a_{n-1}, b_{n-1})[\dots D_1(a_1, b_1)[F]\dots]$$

Tedy aplikujeme funkci $D_{\_}(-,-)$ n krát na funkci F.

Pro $F(x,y)$ je tedy

$$\begin{aligned}D(\mathbf{a},\mathbf{b})[F] &= D_2(a_2,b_2)[D_1(a_1,b_1)[F]] = D_2(a_2,b_2)[F(b_1,y) - F(a_1,y)] = \\ &= F(b_1,b_2) - F(a_1,b_2) - (F(b_1,a_2) - F(a_1,a_2)) = F(b_1,b_2) + F(a_1,a_2) - F(a_1,b_2) - F(b_1,a_2)\end{aligned}$$

Všimneme si, že je-li $F(x,y) = xy$ dostaneme

$$b_1 b_2 + a_1 a_2 - a_1 b_2 - b_1 a_2 = (b_2 - a_2)(b_1 - a_1)$$

Nechť množina M je obdélník, g je ohraničená funkce, F je definovaná na celém M a splňuje $D(\mathbf{a},\mathbf{b})[F] \geq 0$ pro libovolné $\mathbf{a},\mathbf{b} \in M$, že $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$. Nechť je dále P_k je pokrytí množiny M obdélníky takové, že P_k jsou po dvou disjunktní a pro $k \to \infty$ jako obvykle platí, že $vol(P_i) \to 0$ pro každé i. Mějme nyní

$$I(P_k) = \sum_{i=1}^{k} g(\mathbf{x}_i) D(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i)[F],$$

kde $P_i = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{a}_i \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{b}_i\}$ a $\mathbf{x}_i$ je n rozměrný bod ležící v n rozměrném obdélníku P_i.

Pokud hodnota $I(P_k)$ nezávisí na volbě P_k, nazveme ji Riemanovým Stiltjesovým integrálem funkce g vzhledem k funkci F (obvykle je F distribuční funkcí) a značíme jej

$$\int \cdots \int_M g \mathrm{d}F.$$

Jedná se o Darbouxovskou definici Riemanova-Stiltjesova integrálu.

Je-li M degenerovaný obdélník

$$M = [a_1, b_1] \times \cdots \times \{c_j\} \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

Definujeme pomocný integrál přes množinu

$$M(\varepsilon) = [a_1, b_1] \times \cdots \times \{[c_j - \varepsilon, c_j + \varepsilon]\} \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

Pokud existuje pro nějaké $\varepsilon > 0$ integrál

$$\int \cdots \int_{M(\varepsilon)} g \mathrm{d}F,$$

volíme

$$\int \cdots \int_M g \mathrm{d}F = \lim_{\varepsilon \to 0} \int \cdots \int_{M(\varepsilon)} g \mathrm{d}F.$$

Nechť g je spojitá funkce,

$$f = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F$$

je také spojitá funkce. Potom

$$\int \cdots \int_M g \mathrm{d}F = \int \cdots \int_M g f \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n$$

Tedy můžeme převést Riemanův-Stiltjesův integrál v $\mathbb{R}^n$ na Riemanův integrál v $\mathbb{R}^n$.

Snadno si můžeme rozmyslet, jak definici rozšířit na ohraničené množiny obecného tvaru. Také vidíme, že je-li $F(x_1, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n$ pak Riemanův-Stiltjesův integrál odpovídá standardnímu Riemanovu integrálu.

Př. 444 *Spočtěte* $D(\mathbf{a},\mathbf{b})[F]$ *funkce* $F = K$.

Dostáváme pro libovolné $\mathbf{a},\mathbf{b}$

$$\begin{aligned}
&D(\mathbf{a},\mathbf{b})[K] = D_n(a_n,b_n)[D_{n-1}(a_{n-1},b_{n-1})[\dots D_1(a_1,b_1)[K]\dots]] = \\
&= D_n(a_n,b_n)[D_{n-1}(a_{n-1},b_{n-1})[\dots[K-K]\dots] = \\
&= D_n(a_n,b_n)[D_{n-1}(a_{n-1},b_{n-1})[\dots[0]\dots] = \dots = D_n(a_n,b_n)[0] = 0-0 = 0
\end{aligned}$$

Př. 445 *Spočtěte* $D(\mathbf{a},\mathbf{b})[F]$ *funkce* $F(x,y)=x^k y^l$.

Dostaneme

$$\begin{aligned} D(\mathbf{a},\mathbf{b})[F] &= D_2(a_2,b_2)[D_1(a_1,b_1)[F]] = D_2(a_2,b_2)[F(b_1,y)-F(a_1,y)] = \\ &= b_1^k b_2^l + a_1^k a_2^l - a_1^k b_2^l - b_1^k a_2^l = (b_2^l - a_2^l)b_1^k + a_1^k(a_2^l - b_2^l) = (b_2^l - a_2^l)(b_1^k - a_1^k) \end{aligned}$$

Př. 446 *Spočtěte* $D(\mathbf{a},\mathbf{b})[F]$ *funkce* $F(x,y)=x^2+y^3$.

Dostaneme

$$D(\mathbf{a},\mathbf{b})[F]=D_2(a_2,b_2)[D_1(a_1,b_1)[F]]=D_2(a_2,b_2)[F(b_1,y)-F(a_1,y)]=$$
$$=F(b_1,b_2)+F(a_1,a_2)-F(a_1,b_2)-F(b_1,a_2)=b_1^2+b_2^3+a_1^2+a_2^3-a_1^2-b_2^3-b_1^2-a_2^3=0$$

Př. 447 *Spočtěte* $D(\mathbf{a},\mathbf{b})[F]$ *funkce*

$$F(x,y) = \begin{cases} 1, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \textit{jinak} \end{cases}$$

Dostaneme

$$D(\mathbf{a},\mathbf{b})[F] = F(b_1,b_2) + F(a_1,a_2) - F(a_1,b_2) - F(b_1,a_2)$$

Vidíme, že pokud pro všechna i je $a_i > 0$, $b_i > 0$ nebo naopak $a_i \leq 0$, $b_i \leq 0$ potom je $D(\mathbf{a},\mathbf{b})[F] = 0$. Nechť bez újmy na obecnosti je $b_2 > 0$ a $a_2 \leq 0$. Máme poté tři možnosti a to

- $a_1 \leq b_1 \leq 0$ potom

$$D(\mathbf{a},\mathbf{b})[F] = F(b_1,b_2) + F(a_1,a_2) - F(a_1,b_2) - F(b_1,a_2) = 0 + 0 - 0 - 0 = 0$$

- $a_1 \leq 0 < b_1$ potom

$$D(\mathbf{a},\mathbf{b})[F] = F(b_1,b_2) + F(a_1,a_2) - F(a_1,b_2) - F(b_1,a_2) = 1 + 0 - 0 - 0 = 1$$

- $0 < a_1 \leq b_1$ potom

$$D(\mathbf{a},\mathbf{b})[F] = F(b_1,b_2) + F(a_1,a_2) - F(a_1,b_2) - F(b_1,a_2) = 1 + 0 - 1 - 0 = 0$$

Vidíme tedy, že

$$D(\mathbf{a},\mathbf{b})[F] = \begin{cases} 1, & b_1 > 0, b_2 > 0, a_1 \leq 0, a_2 \leq 0 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

Př. 448 *Nechť F je spojitá a mějme*

$$f = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F,$$

poté platí $D(\mathbf{a},\mathbf{b})[F] \geq 0$ pro libovolné $\mathbf{a},\mathbf{b} \in M$, a $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ tehdy a jen tehdy $f(x) \geq 0$ na M°.

Začněme postupně vzhledem k dimenzi n. Pro $n = 1$ máme

$$D(\mathbf{a},\mathbf{b})[F] = F(b) - F(a)$$

Tedy pokud existuje $f(x) = F'(x) \geq$ vidíme, že výraz je nezáporný. Naopak je-li $F(b) - F(a) \geq 0$ na M máme nutně

$$F'(x) = \lim_{h\to\infty} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \geq \lim_{h\to\infty} \frac{0}{h} = 0$$

Pro $n = 2$ máme

$$D(\mathbf{a},\mathbf{b})[F] = F(b_1, b_2) + F(a_1, a_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2)$$

Rozepíšeme-li naopak derivace

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F = \lim_{h\to 0} \lim_{k\to 0} \frac{\frac{F(x+k,y+h)-F(x,y+h)}{k} - \frac{F(x+k,y)-F(x,y)}{k}}{h} = \\ = \lim_{h\to 0} \lim_{k\to 0} \frac{F(x+k, y+h) - F(x, y+h) - F(x+k, y) + F(x, y)}{kh} \end{aligned}$$

Vidíme, že výrazy v čitateli si odpovídají. Tedy je-li $D(\mathbf{a},\mathbf{b})[F] \geq 0$ musí být i $f \geq 0$. Naopak pro spojitou F vidíme, že pokud by někde bylo $D(\mathbf{a},\mathbf{b})[F] < 0$ musí být $D(\mathbf{a},\mathbf{b})[F]$ záporné také na nějakém malém okolí a tedy by zde platilo $f < 0$.

Nyní už stačí jen indukcí rozšířit tyto argumenty na obecné n tím, že si rozmyslíme, že si výrazy budou odpovídat i pro $n > 2$.

Př. 449 *Z definice spočtěte R-S integrál*

$$\int \cdots \int_M g \mathrm{d}F,$$

kde $g = 0$.

Přímo z definice R-S integrálu dosadíme

$$I(P_k) = \sum_{i=1}^{k} g(\mathbf{x}_i) D(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i)[F] = \sum_{i=1}^{k} 0 \cdot D(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i)[F] = 0$$

nezávisle na posloupnosti P_k jedná se tedy o hledaný integrál.

Př. 450 *Spočtěte R-S integrál*

$$\iint_M x^2y^2(1-x-y)\mathrm{d}F,$$

kde $F(x,y) = 2xy + \mathrm{e}^x$, $M = [1,3]\times[0,2]$.

Spočteme derivaci

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F = 2.$$

Můžeme tedy převést R-S integrál na Riemanův integrál

$$\iint_M x^2y^2(1-x-y)\mathrm{d}F = \iint_M x^2y^2(1-x-y)\cdot 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_1^3\int_0^2 x^2y^2 - x^3y^2 - x^2y^3\mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$

$$= 2\int_1^3 \left[x^2\frac{y^3}{3} - x^3\frac{y^3}{3} - x^2\frac{y^4}{4}\right]_0^2 \mathrm{d}x =$$

$$= 2\int_1^3 x^2\frac{8}{3} - x^3\frac{8}{3} - x^2\frac{16}{4}\mathrm{d}x = 2\left[\frac{8}{3}\frac{x^3}{3} - \frac{8}{3}\frac{x^4}{4} - 4\frac{x^3}{3}\right]_1^3 x =$$

$$= 2\left(8\frac{27}{9} - 2\frac{81}{3} - 4\frac{27}{3} - \frac{8}{9} + \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\right) =$$

$$= 2\left(24 - 54 - 36 + \frac{-8+6+12}{9}\right) = 2\left(-66 + \frac{10}{9}\right)$$

Př. 451 *Spočtěte R-S integrál*

$$\iint_M \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}F,$$

kde $F(x,y) = \sqrt{(x^2+y^2)^3}$, $M = [1,2] \times [1,2]$.

Spočteme derivaci

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(x^2+y^2\right)^{3/2} = \frac{3}{2}\frac{\partial^2}{\partial y}2x\left(x^2+y^2\right)^{1/2} = \\ = \frac{3yx}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Můžeme tedy převést R-S integrál na Riemanův integrál

$$\iint_M \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}F = \iint_M \sqrt{x^2+y^2}\frac{3yx}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\ = \iint_M 3yx\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3\int_1^2 x\mathrm{d}x \int_1^2 y\mathrm{d}y = 3\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2\right)^2 = \\ = 3\left(\left[\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right]_1^2\right)^2 = 3\frac{9}{4} = \frac{27}{4}$$

Př. 452 *Spočtěte R-S integrál*

$$\iint_M \ln(xy)\mathrm{d}F,$$

kde $F(x,y) = -\frac{x}{y}$, $M = [1, \mathrm{e}^2]^2$.

Spočteme derivaci

$$-\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\frac{x}{y} = \frac{1}{y^2}$$

Můžeme tedy převést R-S integrál na Riemanův integrál

$$\iint_M \ln(xy)\mathrm{d}F = \iint_M \ln(xy)\frac{1}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^{\mathrm{e}^2} \left[\frac{x\ln(xy) - x}{y^2}\right]_1^{\mathrm{e}^2} \mathrm{d}y =$$
$$= \int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{e}^2 \ln \mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^2 \ln y - \mathrm{e}^2}{y^2} - \frac{\ln y - 1}{y^2}\mathrm{d}y = \left[-\frac{\mathrm{e}^2 + 1}{y} - \left(\mathrm{e}^2 - 1\right)\frac{\ln y + 1}{y} - \frac{\ln y - 1}{y^2}\right]_1^{\mathrm{e}^2} =$$
$$= -\frac{\mathrm{e}^2 + 1 + 3\left(\mathrm{e}^2 - 1\right)}{\mathrm{e}^2} - \frac{2-1}{\mathrm{e}^4} + \frac{\mathrm{e}^2 + 1}{1} + \left(\mathrm{e}^2 - 1\right) - 1 =$$
$$= \frac{2\,\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^4 - 1}{\mathrm{e}^4} + 2\,\mathrm{e}^2 - 4 = -\frac{\left(\mathrm{e}^2 - 1\right)^2}{\mathrm{e}^4} + 2\,\mathrm{e}^2 - 4$$

Reference

[1] BORWEIN, Jonathan B. a Peter B. BORWEIN. *Pi and the AGM: A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity.* 1. USA: John Wiley, 1987. ISBN 0471831387.

[2] DEMIDOVIČ, Boris Pavlovič. *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy.* Havlíčkův Brod: Fragment, 2003. ISBN 80-720-0587-1.

[3] KALAS, Josef a Jaromír KUBEN. *Integrální počet funkcí více proměnných.* 1. Brno: Masarykova univerzita, 2009. ISBN 978-80-210-4975-8.

[4] GRADSHTEYN, I.S. a I.M. RYZHIK. *Table of Integrals, Series, and Products.* 7th. USA: Elsevir. ISBN 0-12-373637-4.

[5] Elliptic Integral. *Wolfram Mathworld* [online]. [cit. 2020-10-29]. Dostupné z: https://mathworld.wolfram.com/EllipticIntegraloftheFirstKind.html

[6] ZORIČ, Vladimir Antonovič. *Mathematical analysis II.* Second edition. Berlin: Springer, [2016]. Universitext (Springer). ISBN 978-3-662-48991-8.