M3121 Pravděpodobnost a statistika I

11. Rozdělení vzniklá transformací normálního rozdělení

Jan Koláček (kolacek@math.muni.cz)

Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno

Normální rozdělení

Definice 1 (Normální (Gaussovo) rozdělení)

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ $\quad x \in \mathbb{R},; \mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$ značíme $\boxed{X \sim N(\mu, \sigma^2)}$

$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2}$ $\quad u \in \mathbb{R}$ značíme $\boxed{U \sim N(0, 1)}$

Transformace normálního rozdělení

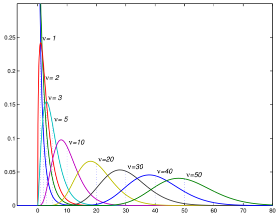
Definice 2 (χ^2 rozdělení, Chi-square distribution)

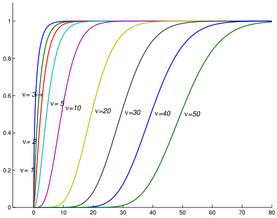
Řekneme, že náhodná veličina X má χ^2 **rozdělení** s $\nu > 0$ stupni volnosti, pokud její hustota má tvar

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

a budeme psát

$$\boxed{X \sim \chi^2(\nu)}.$$





Transformace normálního rozdělení

Věta 3 (Součet n nezávislých χ^2 veličin)

Nechť $U_1, \dots, U_n$ jsou **nezávislé** *náhodné veličiny se standardizovaným normálním rozdělením, t.j.*

$$U_i \sim N(0,1) \qquad \textit{pro} \qquad i = 1, \dots, n.$$

Pak náhodná veličina

$$K = \sum_{i=1}^{n} U_i^2 \sim \chi^2(n)$$

má χ^2 rozdělení o n stupních volnosti.

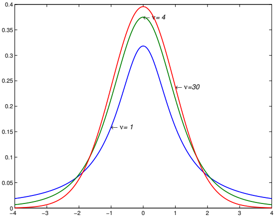
Definice 4 (Studentovo rozdělení, Student's distribution)

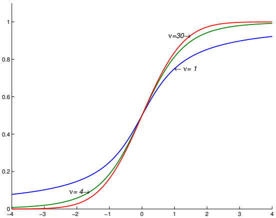
Řekneme, že náhodná veličina X má **Studentovo t rozdělení o $\nu > 0$ stupních volnosti**, pokud její hustota je tvaru

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \nu^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x^2}{\nu} + 1\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}$$

Pak píšeme

$$\boxed{X \sim t(\nu)}.$$





Student

- **William Sealy Gosset** (13.6.1876 – 16.10.1937)
  vystudoval Winchester College a poté matematiku a chemii na New College v Oxfordu
- hlavní sládek v pivovaru Arthur Guinness & Son v Dublinu
- zkoumal možnosti, jak statisticky testovat kvalitu surovin – zejména ječmene a chmele
- 1906 – 1907 pracoval v laboratoři K. Pearsona
- vypracoval vlastní t-test pro malou velikost statistického souboru
- nesměl publikovat pod vlastním jménem, používal pseudonym **Student**

„Posílám Vám kopii Studentových tabulek, protože jste zřejmě jediný člověk, který je kdy použije.“

W. Gosset v dopise R. A. Fisherovi

Transformace normálního rozdělení

Věta 5 (Podíl standardizovaného normálního a χ^2)

Nechť náhodné veličiny $U \sim N(0,1)$ *a* $K \sim \chi^2(\nu)$ *jsou* **nezávislé**. *Pak náhodná veličina*

$$T = \frac{U}{\sqrt{K/\nu}} \sim t(\nu)$$

má Studentovo t*-rozdělení o* ν *stupních volnosti.*

Transformace normálního rozdělení

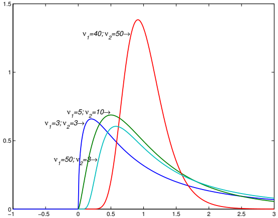
Definice 6 (Fisherovo–Snedecorovo F rozdělení)

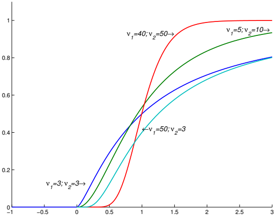
Řekneme, že náhodná veličina X má **Fisherovo–Snedecorovo F rozdělení o $\nu_1 > 0$ a $\nu_2 > 0$ stupních volnosti**, pokud její hustota je tvaru

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} \left(\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} y^{\frac{\nu_1}{2}-1} \left(\dfrac{\nu_1}{\nu_2} y + 1\right)^{-\frac{\nu_1+\nu_2}{2}} & y \geq 0, \\ 0 & y < 0. \end{cases}$$

Pak píšeme

$$\boxed{X \sim F(\nu_1, \nu_2)}.$$





Transformace normálního rozdělení

Věta 7 (Podíl dvou nezávislých χ^2)

Nechť K_1 a K_2 jsou **nezávislé** *náhodné veličiny a*

$$K_i \sim \chi^2(\nu_i), \qquad i = 1, 2.$$

Pak náhodná veličina

$$F = \frac{K_1/\nu_1}{K_2/\nu_2} \sim F(\nu_1, \nu_2)$$

má Fisherovo–Snedecorovo F rozdělení o ν_1 a ν_2 stupních volnosti.