# M3121 Pravděpodobnost a statistika I

# 5. Náhodná veličina diskrétního typu

Jan Koláček (kolacek@math.muni.cz)

Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno

# Náhodná veličina

**Příklad 1**

*Házíme opakovaně mincí.*
$X_1$ ...*„počet hlav v 10 pokusech"*
$X_2$ ...*„čas, který stráví mince ve vzduchu, než spadne"*

Obecně

$$X \begin{cases} \textbf{diskrétní} \text{ náhodná veličina – max. } \textbf{spočetně} \text{ mnoho hodnot} \\ \qquad \text{např. } X \in \mathbb{N}_0 \\ \\ \textbf{spojitá} \text{ náhodná veličina – } \textbf{nespočetně} \text{ mnoho hodnot} \\ \qquad \text{např. } X \in (0, \infty) \end{cases}$$

# Diskrétní náhodná veličina

**Definice 1**

Řekneme, že náhodná veličina $X$ je **diskrétního typu** (discrete), pokud existuje nejvýše spočetná množina $M \subset \mathbb{R}$ taková, že platí $P(X \in M) = 1$.

**Definice 2**

Nechť $X$ je diskrétní náhodná veličina. Pak funkci $p(x) = P(X = x)$, $x \in M$, nazýváme **pravděpodobnostní funkcí** (probability distribution function) diskrétní náhodné veličiny $X$ a množinu $M$ **oborem hodnot** $X$.

**Poznámka 3**

*Pravděpodobnostní funkci lze definovat pro všechna reálná čísla, když položíme* $p(x) = 0$ *pro* $x \notin M$.

**Značení**: Fakt, že jde o diskrétní náhodnou veličinu budeme značit $X \sim (M, p)$.

# Diskrétní náhodná veličina

## Věta 4 (Vlastnosti pravděpodobnostní funkce)

*Nechť* $X \sim (M, p)$. *Pak*

- $p(x) \geq 0$ *pro* $\forall\, x \in \mathbb{R}$ *a* $\sum\limits_{x \in M} p(x) = 1.$
- $P(X \in B) = \sum\limits_{x \in M \cap B} p(x)$ *pro libovolné* $B \in \mathcal{B}$.
- $F(x) = \sum\limits_{t \in M, t \leq x} p(t)$ *pro* $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
- $p(x) = F(x) - \lim\limits_{y \to x^-} F(y)$ *pro* $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

# Příklady

**Příklad 2 (Alternativní rozdělení (Bernoulli distribution))**

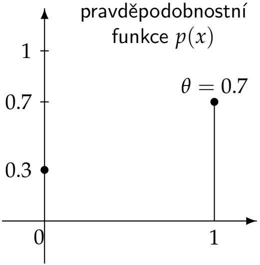
*Uvažujme náhodný pokus, který může skončit s pravděpodobností $\theta \in (0,1)$ „úspěchem“ a s pravděpodobností $1-\theta$ „neúspěchem“.*

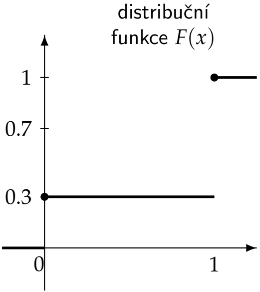
Prostor elementárních jevů: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$
$\sigma$-algebra náhodných jevů: $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \Omega\}$
PST: $P(\emptyset) = 0$, $P(\omega_1) = 1-\theta$, $P(\omega_2) = \theta$ a $P(\Omega) = 1$.

Náhodná veličina: $X(\omega_1) = 0$ (neúspěch),

$X(\omega_2) = 1$ (úspěch).

# Příklad




Diskrétní náhodná veličina s oborem hodnot $M = \{0, 1\}$ a pravděpodobnostní funkcí

$$p(x) = \begin{cases} \theta & x = 1 \\ 1-\theta & x = 0 \\ 0 & jinak \end{cases} = \begin{cases} \theta^x (1-\theta)^{1-x} & x = 0,1 \\ 0 & jinak. \end{cases}$$

Náhodnou veličinu značíme $\boxed{X \sim A(\theta)}$.

# Příklad

**Příklad 3 (Binomické rozdělení (Binomial distribution))**

*Uvažujme posloupnost $n$ nezávislých alternativních pokusů typu úspěch/neúspěch s pravděpodobností úspěchu $\theta \in (0,1)$ pro každý pokus.*
*$X$ je náhodná veličina udávající* **počet úspěchů v $n$ pokusech**.

Obor hodnot náhodné veličiny $X$:

$$M = \{0, 1, \ldots, n\}$$

a pravděpodobnostní funkce

$$p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x} & x = 0, 1, \ldots, n,\ n \in \mathbb{N},\ \theta \in (0,1) \\ 0 & \textit{jinak}. \end{cases}$$

Náhodnou veličinu značíme $\boxed{X \sim Bi(n,\theta)}$.

# Příklad

## Příklad 4

*Basketbalista hází trestný hod (šestku) s pravděpodobností úspěchu 0,9. Určete pravděpodobnost, že z pěti hodů:*
*a) dá 5 košů*
*b) dá alespoň dva koše*
*c) dá nejvýše dva koše*

$X$ ... počet vstřelených košů z pěti pokusů, $X \sim Bi(5; 0,9)$

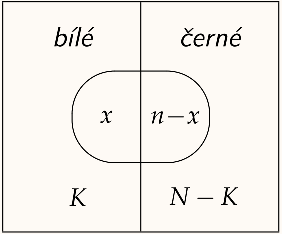
a) $P(X = 5) = \binom{5}{5} 0,9^5 0,1^0 = 0,59$

b) $$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1))$$
$$= 1 - (\binom{5}{0} 0,9^0 0,1^5 + \binom{5}{1} 0,9^1 0,1^4) = 0,99954$$

c) $$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$
$$= \binom{5}{0} 0,9^0 0,1^5 + \binom{5}{1} 0,9^1 0,1^4 + \binom{5}{2} 0,9^2 0,1^3 = 0,00856$$

# Příklad

**Příklad 5 (Hypergeometrické rozdělení (Hypergeometric distribution))**




*Mějme celkem $N$ koulí, ($N \geq 2$)*
*z toho $K$* **bílých**, *($K < N$)*
*$N-K$* **černých**.

*Náhodně vybereme* **bez vracení** *$n$ koulí.*
*Náhodná veličina $X$ značí* **počet bílých koulí** *mezi $n$ vybranými.*

Obor hodnot náhodné veličiny $X$:

$$M = \{\max(0, n-N+K), \ldots, \min(n, K)\}$$

a pravděpodobnostní funkce

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} & x \in \{\max(0, n-N+K), \ldots, \min(n, K)\} \\ 0 & \textit{jinak} \end{cases}$$

Značíme $\boxed{X \sim Hg(N, K, n)}$.

# Příklad

## Příklad 6

*V krabici je 50 žárovek, o nichž víme, že 45 splňuje normu a 5 je vadných. Kontrolor náhodně vybere 4 žárovky aniž by je vracel zpět. Jaká je pravděpodobnost, že ve výběru bude nejvýše jedna vadná žárovka?*

$X$ … počet vadných žárovek ve výběru $X \sim Hg(50; 5; 4)$

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= P(X = 0) + P(X = 1) \\ &= \frac{\binom{5}{0}\binom{45}{4}}{\binom{50}{4}} + \frac{\binom{5}{1}\binom{45}{3}}{\binom{50}{4}} = 0{,}955 \end{aligned}$$

# Příklad

**Příklad 7 (Poissonovo rozdělení (Poisson distribution))**

*Jestliže* $M = \{0, 1, 2, \ldots\}$ *a pravděpodobnostní funkce je tvaru*

$$p(x) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} & x = 0, 1, 2, \ldots, \quad \lambda > 0 \\ 0 & \textit{jinak} \end{cases}$$

*, pak značíme* $\boxed{X \sim Po(\lambda)}$.

*Poissonovo rozdělení popisuje výskyt řídkých jevů za určitou jednotku času, prostoru apod. Parametr* $\lambda$ *značí očekávaný (průměrný) počet výskytů za jednotku. Jako příklad můžeme uvést*

- *počet organismů v jednotce půdy*
- *počet listí na stromech*
- *počet havárií za časovou jednotku (den, týden, měsíc, rok, ...)*
- *počet hovorů v telefonní síti za časovou jednotku*

# Příklad

**Příklad 8 (Poissonovo rozdělení (Poisson distribution))**

*Jestliže* $M = \{0, 1, 2, \dots\}$ *a pravděpodobnostní funkce je tvaru*

$$p(x) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} & x = 0, 1, 2, \dots, \quad \lambda > 0 \\ 0 & jinak \end{cases}$$

*, pak značíme* $X \sim Po(\lambda)$.

*Poissonovo rozdělení popisuje výskyt řídkých jevů za určitou jednotku času, prostoru apod. Parametr* $\lambda$ *značí očekávaný (průměrný) počet výskytů za jednotku. Jako příklad můžeme uvést*

- *počet organismů v jednotce půdy*
- *počet listí na stromech*
- *počet havárií za časovou jednotku (den, týden, měsíc, rok, ...)*
- *počet hovorů v telefonní síti za časovou jednotku*

# Příklad

## Příklad 9

*Na server přijde během hodiny průměrně 120 požadavků.*
*Jaká je pravděpodobnost, že během 2 minut, po které je server restartován:*
*a) nepřijde žádný požadavek,*
*b) přijdou více jak 3 požadavky,*
*c) přijdou více jak 3 požadavky, ale méně než 7 požadavků.*

$X$ ... počet požadavků během 2 minut, 120 požadavků za hodinu $\Rightarrow$ 4 požadavky za 2 minuty $\Rightarrow X \sim Po(4)$

$$
\begin{aligned}
\text{a)} \qquad P(X=0) &= e^{-4}\tfrac{4^0}{0!} = 0,0183 \\
\text{b)} \qquad P(X>3) &= 1 - P(X \leq 3) \\
&= 1 - e^{-4}\left(\tfrac{4^0}{0!} + \tfrac{4^1}{1!} + \tfrac{4^2}{2!} + \tfrac{4^3}{3!}\right) = 0,5665 \\
\text{c)} \quad P(3 < X < 7) &= P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) \\
&= e^{-4}\left(\tfrac{4^4}{4!} + \tfrac{4^5}{5!} + \tfrac{4^6}{6!}\right) = 0,4558
\end{aligned}
$$

# Příklad

**Příklad 10 (Geometrické rozdělení (Geometric distribution))**

*Uvažujme nekonečnou posloupnost nezávislých alternativních pokusů typu úspěch/neúspěch s pravděpodobností úspěchu $\theta \in (0,1)$ pro každý pokus. Náhodná veličina $X$ udává* **počet neúspěchů před prvním úspěchem**.

Obor hodnot náhodné veličiny: $M = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
Pravděpodobnostní funkce je tvaru

$$p(x) = \begin{cases} (1-\theta)^x \theta & x = 0, 1, 2, \ldots, \quad \theta \in (0,1) \\ 0 & \textit{jinak} \end{cases}$$ a značíme $X \sim Ge(\theta)$.

# Příklad

**Příklad 11**

*Pravděpodobnost narození dívky je 0,49. Jaká je pravděpodobnost, že dívka se narodí až jako třetí?*

$X$ ... počet narozených chlapců před první dívkou, $X \sim Ge(0,49)$

$$P(X = 2) = (1 - 0,49)^2 \cdot 0,49 = 0,127.$$

# Příklad

**Příklad 12 (Negativně binomické rozdělení (Negative binomial distribution))**

*Uvažujme nekonečnou posloupnost nezávislých alternativních pokusů typu úspěch/neúspěch s pravděpodobností úspěchu $\theta \in (0,1)$ pro každý pokus. Náhodná veličina $X$ udává* **počet neúspěchů před $k$-tým úspěchem**.

Obor hodnot náhodné veličiny: $M = \{0,1,2,\dots\}$.
Pravděpodobnostní funkce je tvaru

$$p(x) = \begin{cases} \binom{k-1+x}{k-1}\theta^k(1-\theta)^x & x = 0,1,2,\dots, \\ = \binom{k-1+x}{x}\theta^k(1-\theta)^x & \theta \in (0,1) \\ 0 & \mathit{jinak}. \end{cases}$$

Značíme $\boxed{X \sim NeBi(k,\theta)}$.

- V některých publikacích se toto rozdělení značí jako **Pascalovo**.
- $k = 1 \Rightarrow$ geometrické rozdělení, tj. $NeBi(1,\theta) = Ge(\theta)$.

# Příklad

## Příklad 13

*Pravděpodobnost narození dívky je 0,49. Jaká je pravděpodobnost, že poslední z 5 narozených dětí bude dívka a celkem mezi těmito dětmi budou 2 dívky?*

$X$ ... počet narozených chlapců před druhou dívkou, $X \sim NeBi(2; 0,49)$

$$P(X = 3) = \binom{4}{3} 0,49^2 0,51^3 = 0,12739.$$