M3121 Pravděpodobnost a statistika I

6. Náhodná veličina absolutně spojitého typu

Jan Koláček (kolacek@math.muni.cz)

Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno

Spojitá náhodná veličina

Definice 1

Funkce $F(x)$ je **absolutně spojitá** (na $\mathbb{R}$), jestliže k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje také $\delta > 0$ takové, že pro každou posloupnost reálných čísel $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_n < b_n$ takovou, že $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$ platí $\sum_{i=1}^{n}|F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon$.

Spojitá náhodná veličina

Věta 2 (Vlastnosti absolutně spojité funkce)

- *Jestliže F je absolutně spojitá, tak je i spojitá.*
- *Jestliže F je absolutně spojitá, tak má skoro všude (s.v.) vzhledem k Lebesgueově míře* **vlastní derivaci**. *Tato derivace je* **integrovatelná** *v Lebesguově smyslu a platí*

$$F(x) = \int_a^x F'(t)dt + F(a) \qquad \text{pro každé } a \in \mathbb{R}.$$

- *Jestliže F je absolutně spojitá a platí $F'(x) = 0$ s. v., pak je F* **konstantní** *s. v.*
- *Je-li F* **neurčitým integrálem funkce** *f v Lebesgueově smyslu, tj. $F(x) = \int f(x)dx$, pak je F* **absolutně spojitá** *a platí $F'(x) = f(x)$ s. v.*
- *Jestliže F je absolutně spojitá, pak má na každém konečném intervalu $\langle a, b\rangle$* **konečnou variaci**, *tj. $\bigvee_a^b (F) = \sup_{D_n} \sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_{i-1})|$, přičemž suprémum se bere přes všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechna možná dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ $D_n = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$.*

Spojitá náhodná veličina

Definice 3

Řekneme, že náhodná veličina X definovaná na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je **absolutně spojitého typu** (**continuous**), jestliže existuje nezáporná integrovatelná funkce f taková, že rozdělení pravděpodobností

$$P_X(B) = \int_B f(x)dx \qquad \text{pro každé} \qquad B \in \mathcal{B}.$$

Funkci f nazýváme **hustotou rozdělení pravděpodobností** (**density**) náhodné veličiny X absolutně spojitého typu, stručněji f je hustotou X.

Značení: Fakt, že jde o spojitou náhodnou veličinu budeme značit $X \sim f$.

Spojitá náhodná veličina

Věta 4 (Vlastnosti hustoty)

Nechť X je náhodná veličina absolutně spojitého typu, f její hustota a F její distribuční funkce. Pak

- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$
- *F je absolutně spojitá funkce.*
- *Hustota f je určena s. v. jednoznačně, tj. jsou-li f a g hustoty náhodné veličiny X, pak $\mu\left(\{x : f(x) \neq g(x)\}\right) = 0$.*
- *Existuje F' s. v. a funkce $f(x) = F'(x)$ je hustotou náhodné veličiny X.*

Spojitá náhodná veličina

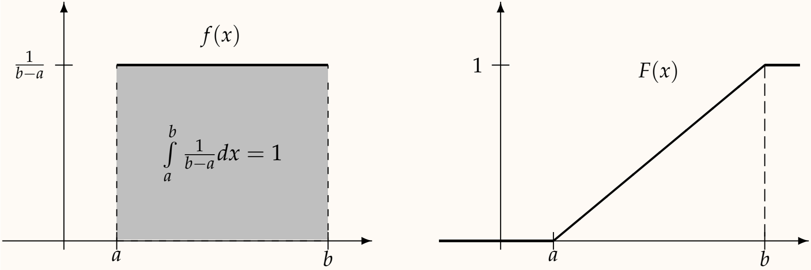
Věta - pokračování

- *Pro každé* $a < b$ *platí* $F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)dx$

  a také $P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b) = \int\limits_a^b f(x)dx.$
- *Existuje-li v bodě* x *derivace* $F'(x)$*, pak*
  $P\left(x - \frac{h}{2} < X \leq x + \frac{h}{2}\right) = hf(x) + o(h)$*, kde funkce „malé o" je taková, že*
  $\lim\limits_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0.$

Příklady

Příklad 1 (Rovnoměrné rozdělení (Uniform distribution))



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in (a,b),\ a < b, \\ 0 & \textit{jinak.} \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & x \le a, \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in (a,b),\ a < b \\ 1 & x \ge b \end{cases}$$

Značíme $X \sim Ro(a,b)$.

Příklad

Příklad 2

Tramvaj jezdí v 10 minutových intervalech. Náhodně přijdeme na zastávku a měříme čas čekání na tramvaj. Určete pravděpodobnost, že budu čekat méně než 2 minuty.

X ... čas (v minutách) do příjezdu tramvaje $\Rightarrow X \sim Ro(0,10)$, $f(x) = \frac{1}{10}$ pro $x \in (0,10)$

$$P(X < 2) = \int_{-\infty}^{2} f(x)dx = \int_{0}^{2} \frac{1}{10}dx = \left[\frac{x}{10}\right]_0^2 = F(2) - F(0) = 0{,}2$$

Příklad 3

Náhodnou veličinou s rovnoměrným rozdělením je např. chyba při zaokrouhlování. Například zaokrouhlujeme-li na k desetinných míst, pak chyba $X \sim Ro\left(-5 \cdot 10^{-k-1}, 5 \cdot 10^{-k-1}\right)$.

Příklad

Příklad 4 (Normální (Gaussovo) rozdělení (Normal, Gaussian distribution))

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ $\quad x \in \mathbb{R},; \mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$ *značíme* $\boxed{X \sim N(\mu, \sigma^2)}$.

$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2}$ $\quad u \in \mathbb{R}$ *značíme* $\boxed{U \sim N(0,1)}$.

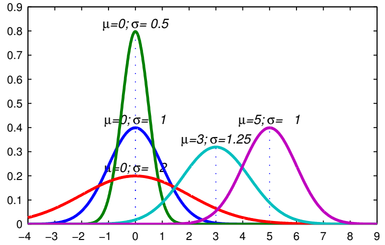
Standardizace: $U = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$

Hustota $\varphi(u)$ *je hustotou tzv.* **standardizovaného normálního rozdělení**. *Bývá zvykem značit její distribuční funkci jako* $\Phi(u) = \int\limits_{-\infty}^{u} \varphi(t)dt$.

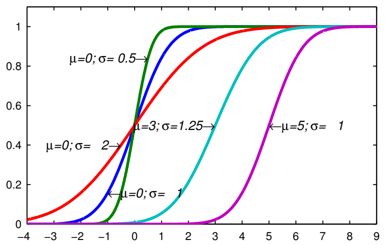
Distribuční funkci normálního rozdělení $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$ *nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí, lze ji však zapsat pomocí mocninných řad.*

Příklad

Hustoty



Distribuční funkce



Příklad

Příklad 5

Při prodeji vánočních kaprů má hmotnost kapra v jedné z kádí přibližně normální rozdělení s parametry $\mu = 2,3$ *a* $\sigma^2 = 0,3^2$. *Jaký podíl kaprů přesáhne svou hmotností 2,6 kg?*

X ... hmotnost kapra $\Rightarrow$ $\boxed{X \sim N(2,3; 0,3^2)}$

$$P(X > 2,6) = 1 - P(X \leq 2,6) = 1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{2,6-2,3}{0,3}\right)$$
$$= 1 - P(U \leq 1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0,84 = 0,16$$

Příklad

Příklad 6 (Exponenciální rozdělení)

Nechť jev A se vyskytuje v náhodných okamžicích a předpokládáme, že výskyty tohoto jevu v nepřekrývajících se intervalech jsou nezávislé.
Označme

X ... *náhodná veličina udávající čas, kdy poprvé nastane sledovaný jev A.*

Distribuční funkce

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Hustota

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Řekneme, že X má **exponenciální** *rozdělení s parametrem λ a značíme* $\boxed{X \sim Ex(\lambda)}$.

Příklad

Příklad 7

V porodnici se narodí v průměru každé 2 hodiny dítě. Určete pravděpodobnost, že se v daném dni nenarodí žádné dítě.

X ... **čas** do narození prvního dítěte (jednotka $=$ 1 den), 1 dítě za 2 hodiny $\Rightarrow$ 12 dětí za den $\Rightarrow$ $\boxed{X \sim Ex(12)}$

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - (1 - e^{-12}) = e^{-12} = 6,14 \cdot 10^{-6}$$

nebo

X ... **počet** narozených dětí za 1 den $\Rightarrow$ $\boxed{X \sim Po(12)}$

$$P(X = 0) = p(0) = e^{-12} \frac{12^0}{0!} = e^{-12} = 6,14 \cdot 10^{-6}$$

Příklad

Příklad 8 (Gamma rozdělení)

Jestliže náhodná veličina X *má hustotu*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu^a \Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\frac{x}{\mu}} & a > 0, x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

značíme $X \sim Gamma(a, \mu)$

Speciální případy: $a = 1$ exponenciální rozdělení

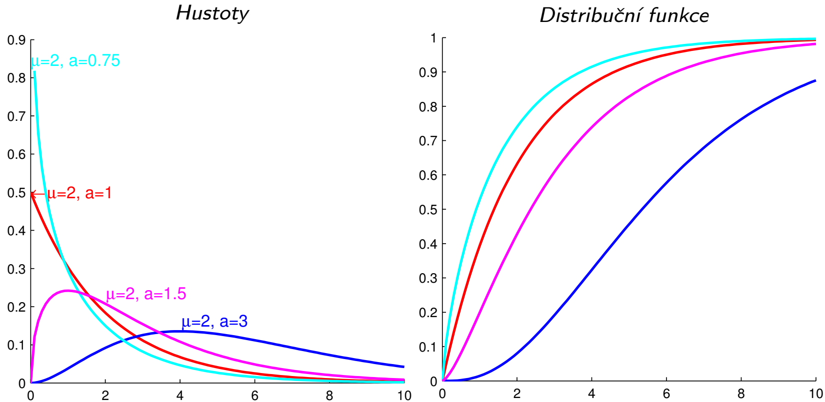
$a = n \in N$ Erlangovo rozdělení

Funkce Γ je pro $a > 0$ definována předpisem $\Gamma(a) = \int\limits_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$.

Její nejčastěji používané vlastnosti jsou

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a),$$
$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$
$$\Gamma(n) = (n-1)! \text{ pro } n \in \mathbb{N}$$

Příklad



Gamma rozdělení se používá především v teorii spolehlivosti, kdy například exponenciální rozdělení modeluje dobu do poruchy u komponent, které nejsou trvale namáhány, Erlangovo rozdělení se využívá pro popis doby života do n-té poruchy apod.

Příklad

Příklad 9 (Beta rozdělení)

Jestliže náhodná veličina X *má hustotu*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} & a,b > 0, x \in \langle 0,1 \rangle \\ 0 & \textit{jinak} \end{cases} \qquad \textit{značíme } \boxed{X \sim Beta(a,b)}$$

Speciální případy: $a = 1,\ b = 1$ ROVNOMĚRNÉ ROZDĚLENÍ $Ro(0,1)$

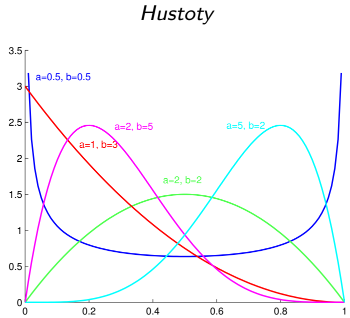
Funkce $B(a,b)$ je pro $a,b > 0$ definována předpisem

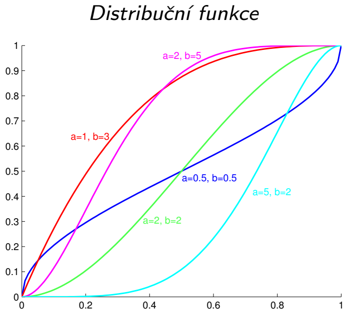
$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx.$$

Platí vztah mezi beta a gamma funkcí

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Příklad





V souvislosti s předchozími rozděleními se dají ukázat vztahy

$$\lim_{n\to\infty} nBeta(1,n) = Exp(1),$$
$$\lim_{n\to\infty} nBeta(k,n) = Gamma(k,1).$$