VYBRANÁ CVIČENÍ (TŘETÍ PARALELKA)

1 Náhodné jevy (příklady 28—32)

Cvičení 1. Při výrobě bot se na náhodně vybraném páru provádí tři zkoušky kvality. Označme jevy: A = zkoušený pár bot vyhoví první zkoušce, B = vyhoví druhé zkoušce, C = vyhoví třetí zkoušce. Zapište pomocí nich jevy, že zkoušený pár bot vyhoví:

(a) při první zkoušce

(b) pouze při první zkoušce

(c) alespoň při jedné zkoušce

(d) právě při jedné zkoušce

(e) při všech zkouškách

(f) při nejvýše dvou zkouškách

Cvičení 2. Výrobky dělíme do 3 skupin: na standardní (A), použitelné (B) a nepoužitelné (C). Vyjádřete následující jevy:

(a) $A \cup B$

(b) $\overline{A \cup C}$

(c) $A \cap C$

(d) $(A \cap B) \cup C$

(e) $A \cup B \cup C$

Cvičení 3. Strojovna je tvořena dvěma paralelně zapojenými kotli, za nimiž je sériově připojen stroj. Označme S = stroj je provozuschopný, K_1 = kotel 1 je provozuschopný, K_2 = kotel 2 je provozuschopný. Vyjádřete pomocí těchto jevů jev C = strojovna je provozuschopná a jev $\bar{C}$.

Cvičení 4. Máme 4 výrobky. Jev A znamená, že alespoň jeden z nich je zmetek. jev B znamená, že zmetky jsou nejvýše dva. Vyjádřete, co znamenají jevy $\bar{A}$ a $\bar{B}$.

Cvičení 5. Nechť $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ je prostor elementárních jevů. Vypište všechna možná jevová pole $\mathcal{A}$ na Ω.

2 Kombinatorika (příklady 1—13)

Cvičení 1. V závodní jídelně si zákazník skládá menu v konstantní ceně dle vlastního výběru. Vybírá jednu ze 3 druhů polévek, jeden z 8 hlavních chodů, jeden ze 4 salátů a jeden z 5 druhů nápojů. Kolik je všech možností sestavení plného menu?

Cvičení 2. Na konferenci promluvilo 5 řečníků – A, B, C, D, E – každý právě jednou.

(a) Určete počet všech možných pořadí jejich vystoupení.

(b) (a), má-li řečník B vystoupit ihned po řečníkovi A.

(c) (a), má-li řečník B vystoupit až po řečníkovi A.

Cvičení 3.

(a) Kolik přesmyček (anagramů) lze získat ze slova MISSISSIPPI?

(b) V kolika z nich jsou všechna čtyři I hned za sebou?

(c) V kolika z nich nejsou všechna čtyři I hned za sebou?

(d) V kolika z nich jsou všechna čtyři S hned za sebou?

(e) V kolika z nich jsou všechna čtyři I hned za sebou i všechna čtyři S hned za sebou?

(f) V kolika z nich jsou všechna čtyři I hned za sebou nebo všechna čtyři S hned za sebou?

(g) V kolika z nich nejsou všechna čtyři S hned za sebou ani všechna čtyři I hned za sebou?

Cvičení 4.

(a) Kolik různých pěticiferných čísel lze sestavit z číslic 0, 1, 4, 7, 9, aniž by se číslice opakovaly?

(b) Kolik z těchto čísel je sudých?

Cvičení 5. Uvažujme všechna nezáporná celá čísla menší než 10^6.

(a) Kolik je těch, které ve svém ciferním zápisu nemají ani jednu devítku?

(b) Kolik je těch, které ve svém ciferním zápisu mají alespoň jednu devítku?

Cvičení 6. Loučí se pět přátel. Kolik stisků ruky si vymění?

Cvičení 7. Kolika způsoby můžeme mezi 7 dětí rozdělit 5 míčů stejné barvy?

Cvičení 8. Na mistrovství světa v ledním hokeji je vysláno 22 hráčů, z toho 12 útočníků, 8 obránců a 2 brankáři. Kolik různých sestav (3 útočníci, 2 obránci a brankář) je možno vytvořit?

Cvičení 9. Kolika způsoby si 4 děti mohou mezi sebou rozdělit 10 modrých, 15 červených a 8 zelených kuliček, když každé dítě musí dostat alespoň jednu kuličku od každé barvy?

3 Klasická pravděpodobnost (příklady 14—27, 33—35)

Cvičení 1. Kostku, která má nabarvené všechny stěny stejnou barvou, rozřežeme na 1000 menších stejně velkých kostiček stejných rozměrů (na 10 řezů v každé ze 3 os). Kostičky poté zamícháme a náhodně vybereme jednu z nich. Jaká je pravděpodobnost, že vytažená kostička má právě 3 obarvené stěny?

Cvičení 2. Házíme dvěma kostkami. S jakou pravděpodobností padne součet rovný 6?

Cvičení 3. Na stěnu nádraží se má namontovat 10 automatů na prodej jízdenek, z toho 3 automaty jsou určeny pro prodej jízdenek do zahraničí. Spočítejte pravděpodobnost, že právě tyto 3 automaty budou namontovány hned vedle sebe.

Cvičení 4. Házíme klasickou kostkou desetkrát po sobě. Spočítejte pravděpodobnost, že v prvních 4 hodech padnou čísla větší než 4 a v posledních 5 hodech čísla menší než 5.

Cvičení 5. V dodávce 100 křišťálových váz je 5 vadných. Při kontrole je náhodně vybrány 4 vázy. Spočítejte pravděpodobnost, že:

(a) právě jedna z kontrolovaných váz je vadná.

(b) alespoň jedna z kontrolovaných váz je vadná.

Cvičení 6. V urně je deset lístků označených postupně přirozenými čísly od 1 do 10. Náhodně vytahujeme 4 lístky po jednom, přičemž každý lístek po vytažení vracíme zpět. Jaká je pravděpodobnost, že:

(a) na lístcích jsou 4 různá čísla.

(b) na všech čtyřech lístcích je stejné číslo.

(c) na lístcích je jedno číslo dvakrát a dále dvě další různá čísla.

Cvičení 7. Dva hráči střídavě házejí férovou mincí. Vyhrává ten hráč, jemuž dříve padne líc. Určete pravděpodobnosti výhry jednotlivých hráčů.

Cvičení 8. Čtyři osoby si při vstupu do baru odložily na věšák své čtyři klobouky. Po jisté době strávené konzumací odcházejí a klobouky si berou náhodně. Spočítejte pravděpodobnost, že alespoň jedna osoba si vezme svůj klobouk.

Cvičení 9. Do výtahu n-poschoďové budovy nastoupilo k osob, $k \geq n$. Za předpokladu, že každá z k osob vystoupí se stejnou pravděpodobností v libovolném z n pater, určete pravděpodobnost, že v každém poschodí vystoupí alespoň jedna osoba.

4 Geometrická pravděpodobnost (příklady 36—44)

Cvičení 1. Pevnina zabírá $149 \cdot 10^6$ km^2 povrchu Země a moře tvoří $361 \cdot 10^6$ km^2. Jaká je pravděpodobnost, že padající meteorit dopadne na pevninu?

Cvičení 2. Dva přátelé si domluvili schůzku na určitém místě, ale nedohodli se na přesném čase, jen že se sejdou mezi 17.00 a 18.00, přičemž každý z nich počká 20 minut (potom odejde). Předpokládáme, že oba přijdou kdykoliv během smluvené doby nezávisle na sobě. Spočítejte pravděpodobnost, že se skutečně potkají.

Cvičení 3. Zvolme náhodně dvě čísla $x, y \in (0, 1)$. Určete pravděpodobnost, že jejich součet je menší než 1 a jejich součin je menší nebo rovný 0,09.

Cvičení 4. Proti dostatečně velké síti se čtvercovými oky velikosti 8×8 cm kolmo hodíme míček o průměru 5 cm. jaká je pravděpodobnost, že míček proletí bez doteku sítě?

5 Nezávislost (příklady 45—48, 53, některé podúlohy 49–73)

Cvičení 1. V krabici jsou čtyři lístky s čísly 000, 110, 101, 011. Náhodně vytáhneme jeden lístek. Označme jevy A_i = vytažený lístek má na i-tém místě jedničku, $i = 1, 2, 3$. Jsou jevy A_1, A_2, A_3 stochasticky nezávislé, resp. po dvou nezávislé?

Cvičení 2. Házíme naráz dvěma kostkami – modrou a červenou. Označíme jevy: $A = \{$na modré kostce padlo liché číslo$\}$, $B = \{$na červené kostce padlo sudé číslo$\}$, $C = \{$součet padlých čísel je lichý$\}$. Jsou jevy A, B, C stochasticky nezávislé, resp. po dvou nezávislé?

Cvičení 3. Střelec střílí třikrát nezávisle na sobě na terč. Pravděpodobnosti zásahů při jednotlivých opakováních jsou postupně 0,4; 0,5; 0,7. Spočítejte pravděpodobnost, že střelec zasáhne terč

(a) právě jednou;

(b) alespoň jednou;

(c) právě dvakrát.

Cvičení 4. Semínko slunečnice vyklíčí s pravděpodobností 0,4. Když zasejeme 7 takových semínek, jaká je pravděpodobnost, že z nich vyklíčí

(a) alespoň jedno;

(b) právě 1;

(c) právě 2;

(d) právě k?

6 Podmíněná pravděpodobnost (část příkladů 49—73)

Cvičení 1. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padly dvě pětky, je-li známo, že součet ok je dělitelný pěti?

Cvičení 2. Nechť platí $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}4$ a $P(A \cup B) = 0{,}6$. Spočítejte $P(A|B)$ a $P(B|A)$.

Cvičení 3. První dělník vyrobí denně 60 výrobků, z toho 10 % zmetků. Druhý dělník vyrobí denně 40 výrobků, z toho 5 % zmetků. Z denní produkce náhodně vybereme jeden výrobek. Jaká je pravděpodobnost, že je zmetek a pochází od prvního dělníka?

Cvičení 4. Z pěti výrobků, mezi nimž jsou právě tři zmetky, vybíráme třikrát bez vracení po jednom výrobku. Označíme $A_i = \{i\text{-tý vybraný výrobek je zmetek}\}$, $i = 1, 2, 3$. Spočítejte pravděpodobnost společného nastoupení jevů $\bar{A}_1, A_2, A_3$.

Cvičení 5. Tenista má první podání úspěšné s pravděpodobností 0,6, příp. druhé podání pak s pravděpodobností 0,8. Spočítejte pravděpodobnost, že se tenista při podání dopustí dvojchyby.

Cvičení 6. Roztržitý profesor zapomene v obchodě deštník s pravděpodobností 1/4. Vyrazí-li z fakulty s deštníkem a cestou domů navštíví 4 obchody, jaká je pravděpodobnost, že ve 4. obchodě zapomene deštník?

7 Věta o úplné pravděpodobnosti (část příkladů 49—73)

Cvičení 1. První dělník vyrobí denně 60 výrobků, z toho 10 % zmetků. Druhý dělník vyrobí denně 40 výrobků, z toho 5 % zmetků. Z denní produkce náhodně vybereme jeden výrobek. Jaká je pravděpodobnost, že je zmetek?

Cvičení 2. Ve studijní skupině je 23 studentů. Pravděpodobnost úspěchu u zápočtové písemky z *Pravděpodobnosti a statistiky I* je pro 8 studentů $0,9$, pro dalších 12 studentů $0,6$ a pro poslední 3 studenty $0,4$. Spočítejte pravděpodobnost, že náhodně vybraný student u zápočtové písemky uspěje.

Cvičení 3. U testů na odhalení nemocí se udávají údaje o *senzitivitě* a *specificitě*. Senzitivita je pravděpodobnost, že člověku s danou nemocí ukáže test pozitivní výsledek, a specificita testu je pravděpodobnost, že člověku bez dané nemoci ukáže test negativní výsledek. U jednoho z antigenových testů použitých během plošného testováni na COVID-19 na Slovensku uvádí výrobce senzitivitu $0,914$ a specificitu $0,998$. Pozitivní výsledek si domů odneslo 1,06 % otestované populace. Kdyby testy použity během plošného testování opravdu měli tuto senzitivitu a specificitu, u kolika procent slovenské populace bychom očekávali přítomnost nemoci COVID-19 (t.j. co bychom byli schopni říci o *prevalenci* COVID-19 na Slovensku)?

Cvičení 4. Na pultě v galanterii leží 10 stejných krabiček. V každé z nich je 10 knoflíků, přičemž v i-té krabičce je právě i knoflíků černých a $(10 - i)$ bílých. Zákazník náhodně zvolí jednu krabičku a z ní náhodně vybere jeden knoflík. Jaká je pravděpodobnost, že je černý?

8 Bayesova věta (část příkladů 49—73)

Cvičení 1. Má-li antigenový test na COVID-19 senzitivitu $0,914$ a specificitu $0,998$ a je-li prevalence COVID-19 v populaci $0,94\,\%$,

(a) jaká je pravděpodobnost, že člověk s certifikátem o negativním výsledku testu opravdu nemá COVID-19?

(b) jaká je pravděpodobnost, že člověk s pozitivním testem opravdu má COVID-19?

Cvičení 2. Test obsahuje 100 otázek, z nichž si zkoušený jednu vylosuje. Potom se zkoušený rozhoduje takto: zná-li správnou odpověď, zvolí ji; nezná-li správnou odpověď, volí jednu ze 4 nabízených odpovědí náhodně. Předpokládejme, že zkoušený zná správné odpovědi na právě k ze 100 otázek.

(a) S jakou pravděpodobností zkoušený na otázku odpoví správně?

(b) Když zkoušený odpoví správně, s jakou pravděpodobností odpověď pouze hádal?

Cvičení 3. Máme tři stejné krabice. První obsahuje 1 bílou, 2 černé a 3 zelené kuličky, druhá obsahuje 2 bílé, 1 černou a 1 zelenou kuličku a v poslední krabici jsou 4 bílé, 5 černých a 3 zelené kuličky. Náhodně jsme zvolili jednu krabici a z ní vytáhli bez vracení dvě kuličky: bílou a zelenou. Spočítejte pravděpodobnosti, že jsme tyto dvě kuličky vytáhli z první krabice.

Cvičení 4. Uvažujeme dvě osudí: osudí A obsahuje 1 černou a 1 bílou kuličku, v osudí B jsou 2 černé a 3 bílé kuličky. Z osudí A vytáhneme náhodně jednu kuličku a vložíme ji do osudí B. Potom vytáhneme jednu kuličku z osudí B. Jaká je pravděpodobnost, že:

(a) kulička z osudí A a kulička z osudí B mají stejnou barvu;

(b) kulička z osudí A byla bílá, víme-li, že kulička tažená z osudí B je černá?

Cvičení 5. Krabice obsahuje n, $n > 2$, koulí – bílé a černé. Byla naplněna takto: n-krát bylo hozeno kostkou; pokud padla šestka, do krabice byla vložena bílá koule, jinak byla vložena černá koule. Z takto naplněné krabice byla náhodně vylosována jedna koule a zjistilo se, že je bílá. Spočítejte pravděpodobnost, že krabice před tímto tahem obsahovala právě jednu bílou kouli.

Cvičení 6. Roztržitý profesor zapomene v obchodě deštník s pravděpodobností $1/4$. Z fakulty vyrazil s deštníkem, cestou domů navštívil 4 obchody a domů přišel bez deštníku. Jaká je pravděpodobnost, že deštník zapoměl ve 4. obchodě?

9 Diskrétní náhodná veličina (příklady 74—77)

Cvičení 1. Náhodná veličina X udává číslo, které padlo při hodu klasickou kostkou.

(a) Zkonstruujte pravděpodobnostní prostor, díky kterému můžeme X považovat za náhodnou veličinu.

(b) Určete pravděpodobnostní funkci této náhodné veličiny.

(c) Spočítejte $\mathrm{P}(1 \leq X \leq 6)$.

(d) Spočítejte $\mathrm{P}(X \leq 2)$.

(e) Určete distribuční funkci náhodné veličiny X a nakreslete její graf.

Cvičení 2. Řidič musí projet čtyři křižovatky řízené semafory. Na každé křižovatce svítí zelená a červená s pravděpodobnostmi 0,5 (oranžovou pro jednoduchost neuvažujeme). Náhodná veličina X udává počet projetých křižovatek, než řidič musí na červenou zastavit.

(a) Určete pravděpodobnostní funkci této náhodné veličiny.

(b) Určete distribuční funkci a nakreslete její graf.

Cvičení 3. Házíme klasickou kostkou. Náhodná veličina X nabývá hodnoty 1, padne-li šestka, a 0 jinak. Určete pravděpodobnostní funkci této náhodné veličiny. O jaké rozdělení se jedná?

Cvičení 4. Házíme třikrát klasickou kostkou. Náhodná veličina X udává počet padnutých šestek. Určete pravděpodobnostní funkci této náhodné veličiny. O jaké rozdělení se jedná?

Cvičení 5. Házíme klasickou kostkou, dokud nepadne šestka. Náhodná veličina X udává počet hodů předcházejících padnutí šestky. Určete pravděpodobnostní funkci této náhodné veličiny. O jaké rozdělení se jedná?

Cvičení 6. Házíme klasickou kostkou, dokud nepadnou dvě šestky. Náhodná veličina X udává počet hodů předcházejících padnutí dvou šestek. Určete pravděpodobnostní funkci této náhodné veličiny. O jaké rozdělení se jedná?

Cvičení 7. Jaká jiná rozdělení diskrétních náhodných veličin ještě znáte?