

o cv. Určete abelovské grupy prezentované maticemi z minima.

$$\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/9 \times \mathbb{Z}/5$$
$$\equiv \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/12 \times \mathbb{Z}/180$$

Domluva:

zkrácené termíny

2.2., 9.2., 16.2.

ONLINE

1 Cv. Pomocí vhodné matice řádkových úprav a sloupcových převedte

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

$$\boxed{k \cdot a + l \cdot b = d}$$

determinant matice P =  $\text{lcm}(a, b)$

$$d = \text{gcd}(a, b)$$

$$d \mid a, b \mid m$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k & l \\ -b/d & a/d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

$$i) \begin{pmatrix} k & l \\ -b/d & a/d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}$$

$P \in \text{invertibilní} \Leftrightarrow \det = 1$

$$ii) \underbrace{\begin{pmatrix} k & l \\ -b/d & a/d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} d & lb \\ 0 & m \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{lb}{d} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k & l \\ -b/d & a/d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{lb}{d} \\ 1 & \frac{ka}{d} \end{pmatrix}$$


---

2

Cv. Určete SNF matice

$$\begin{pmatrix} 12 & & & \\ & 10 & & \\ & & 50 & \\ & & & 45 \end{pmatrix}$$

↔ aplikací

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

a interpretyte výsledek v rámci abelovských grup.

$$\begin{pmatrix} 12 & & & \\ & 10 & & \\ & & 50 & \\ & & & 45 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 60 & & \\ & & 50 & \\ & & & 45 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 10 & & \\ & & 300 & \\ & & & 45 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 10 & & \\ & & 15 & \\ & & & 900 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 5 & & \\ & & 30 & \\ & & & 900 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 10 & & \\ & & 30 & \\ & & & 900 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{Z}/12 \times \mathbb{Z}/10 \times \mathbb{Z}/50 \times \mathbb{Z}/45 \cong \mathbb{Z}/10 \times \mathbb{Z}/30 \times \mathbb{Z}/900$$

3

Cv. Jakou abelovskou grupu prezentuje matice

$$\begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ?$$

$$\mathbb{Z}^4 \rightarrow \mathbb{Z}^5$$

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^5 / \text{im } A &\cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4 \times \underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} \\ &= \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}^2 \end{aligned}$$

4

Cv.  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & a \end{pmatrix}$

Určete SNF polynomiální matice  $A - \lambda E$ .

Věta.  $\text{SNF}(A - \lambda E) = \text{SNF}(B - \lambda E)$

$\Leftrightarrow A, B$  jsou podobné  $B = P \cdot A \cdot P^{-1}$

$\stackrel{\text{h. abg. ut.}}{\Leftrightarrow} A, B$  mají stejný JKT

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & 1 & & \\ & a-\lambda & 1 & \\ & & a-\lambda & 1 \\ & & & a-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \textcircled{1} & & & \\ a-\lambda & 1 & & \\ & a-\lambda & 1 & \\ & & a-\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \downarrow \\ \\ \downarrow \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -(a-\lambda)x \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & -(a-\lambda)^2 \\ 0 & a-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -(a-\lambda)x \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & -(a-\lambda)^2 \\ 0 & a-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -(a-\lambda)x \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & 0 & a-\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -(a-\lambda)x \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & 0 & (a-\lambda)^4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{SNF} \left( \begin{pmatrix} a-\lambda & 1 & & \\ & a-\lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & a-\lambda \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & (a-\lambda)^r \end{pmatrix}$$

5 Cv. Urcete SNF polynomialni matice  $A - \lambda E$ , kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

a odvodte JKT matice  $A$ .

Jaky je minimalni polynom matice  $A$ ?

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 & -2 \\ -1 & -\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -1-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2-\lambda \\ -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1-\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +\lambda x \\ +1x \\ -1x \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2-\lambda \\ 0 & 1-2\lambda & 1-2\lambda & -1+2\lambda-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -1+\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2x \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-2\lambda & -3+4\lambda-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -1+\lambda \end{pmatrix}$$

$$1-\lambda + (1-\lambda)(-3+4\lambda-\lambda^2) \\ = (1-\lambda)(-2+4\lambda-\lambda^2)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1-2\lambda & -3+4\lambda-\lambda^2 \\ 0 & (1-2\lambda)(1-\lambda) & (1-\lambda)(-2+4\lambda-\lambda^2) \\ 0 & 1-\lambda & -1+\lambda \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1+\lambda \\ 0 & (1-2\lambda)(1-\lambda) & (1-\lambda)(-2+4\lambda-\lambda^2) \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & (1-2\lambda)(1-\lambda) & (1-\lambda)(-1+2\lambda-\lambda^2) \\ 0 & 0 & -(1-\lambda)^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +1x \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda & 1-\lambda^3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1-\lambda & \\ & & & (1-\lambda)^3 \end{pmatrix}$$

$\hat{=}$   
SNF(A - λE)

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 1-\lambda & & & \\ \hline & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & (1-\lambda)^3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{c|ccc} 1-\lambda & & & \\ \hline & 1-\lambda & & \\ & & 1 & \\ & & & 1-\lambda \end{array} \right)$$

$\hat{=}$   
SNF  $\left( \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}}_J - \lambda E \right)$

A je podobná  $J = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

min. polynom A je  $(1-\lambda)^3$

$$(E-A)^3 = 0$$

$\Rightarrow$  A je "koreňami" char. poly  
"súčin inv. faktorů"

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \lambda-2 \\ & & & & (\lambda-2)(\lambda+1)^3 \end{pmatrix}$$

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 2 & & & \\ \hline & 2 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{array} \right)$$

6 Cv. Určete SNF polynomiální matice  $A - \lambda E$ , kde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a odvoďte JKT matice  $A$ .

Jaký je minimální polynom matice  $A$ ?

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 & 0 & -1 \\ -2 & -1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1-\lambda \\ -1-\lambda & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (-1-\lambda) \times \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1-\lambda \\ 0 & -1 & 1+\lambda & \lambda^2+2\lambda-1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & -1-\lambda \\ 0 & 1 & -1-\lambda & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-1-\lambda) \times \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1+\lambda & \lambda^2+2\lambda-1 \\ 0 & -(\lambda+1)^2 & -(\lambda+1)(\lambda^2+2\lambda) \\ 0 & 0 & \lambda^2+2\lambda+1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \lambda+1 & \\ & & & (\lambda+1)^3 \end{pmatrix}$$

min. poly

$$\left( \begin{array}{c|ccc} -1 & & & \\ \hline & -1 & 1 & \\ & & -1 & 1 \\ & & & -1 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \hline & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{array} \right)$$



7 Cv. Určete SNF polynomiální matice  $A - \lambda E$ , kde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a odvoďte JKT matice  $A$ .

Pokuste se najít matici přechodu.