Polynomiální matice, SNF, kanonické tvary operátorů

$\mathbb{Z}[\lambda] \supseteq (2,\lambda)$ není hlavní

Budeme uvažovat matice s prvky v okruhu $\mathbb{k}[\lambda]$, kde $\mathbb{k}$ je těleso
PID ;

$\rightsquigarrow$ $\mathrm{Mat}_{n\times m}\, \mathbb{k}[\lambda]$ matice $n\times m$ s prvky z $\mathbb{k}[\lambda]$

$\mathbb{k}[x,y] \supseteq (x,y)$ není hlavní

$\rightsquigarrow$ Lemma. $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}\, \mathbb{k}[\lambda]$ je invertibilní $\Leftrightarrow$ $n=m$ & $\det A \in \mathbb{k}^\times$.

konst. nenulové pol.

Věta (o SNF). $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}\, \mathbb{k}[\lambda]$ $\Rightarrow$ existují invertibilní matice P, Q t.ž.

- P, Q jsou součiny elementárních matic nad $\mathbb{k}[\lambda]$
- $PAQ = \left(\begin{array}{ccc|c} q_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & q_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right) = S$ přičemž $q_1 \mid \cdots \mid q_r$ } matice ve Smithově normálním tvaru
- polynomy $q_1 | \cdots | q_r$ jsou jednoznačné až na násobení nenulovým skalárem (pro nás normované $\Rightarrow$ jednoznačné); nazývají se invariantní faktory.
- konkrétněji:

  jediný minor $\det() = 1$?

  $$d_i = \gcd\{\text{minory } i\times i \text{ matice } A\}; \quad d_0 = 1$$
  $$q_i = d_i / d_{i-1}$$

  $d_1 = \gcd\{\text{prvky matice } A\}$

$A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}\, \mathbb{k}$ $\rightsquigarrow$ lineární zobrazení $\mathbb{k}^m \to \mathbb{k}^n$

$A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}\, \mathbb{Z}$ $\rightsquigarrow$ homomorfismus grup $\mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$

$A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}\, \mathbb{k}[\lambda]$ $\rightsquigarrow$ homomorfismus čeho? $\mathbb{k}[\lambda]^m \to \mathbb{k}[\lambda]^n$

} sčítání a násobení skaláry

"jediný" rozdíl je v tom, že $\mathbb{k}[\lambda]$ není těleso

Definice. $\mathbb{k}[\lambda]$-modul je abelovská grupa M společně s operací násobení skaláry

$$\mathbb{k}[\lambda] \times M \longrightarrow M$$
$$(p, x) \longmapsto p\cdot x$$

splňující
$$p\cdot(q\cdot x) = (p\cdot q)\cdot x, \quad 1\cdot x = x,$$
$$(p+q)\cdot x = p\cdot x + q\cdot x, \quad p\cdot(x+y) = p\cdot x + p\cdot y$$

Příklad. $M = \mathbb{k}[\lambda]^n$ s operacemi „po složkách"

$$p\cdot(q_1, \dots, q_n) = (p\cdot q_1, \dots, p\cdot q_n)$$

násobení polynomy $\Longleftrightarrow$ { násobení skaláry z $\mathbb{k}$
násobení monomem λ ... zobrazení $m_\lambda : M \to M$

násobení polynomy $\iff \begin{cases} \text{násobení skaláry z } \Bbbk \\ \text{násobení monomem } \lambda \ \dots \end{cases}$ zobrazení $m_\lambda : M \to M$, $x \mapsto \lambda\cdot x$

$\Rightarrow$ snadné

$\Leftarrow$ $p\cdot x = (p_0 + p_1\lambda + \dots + p_k\lambda^k)\cdot x = p_0 x + p_1(\lambda\cdot x) + \dots + p_k(\lambda\cdot(\dots\lambda\cdot(\lambda\cdot x)\dots))$

$$= p_0 x + p_1\, m_\lambda(x) + \dots + p_k\, m_\lambda^k(x)$$
$$= (p_0\, id + p_1 m_\lambda + \dots + p_k m_\lambda^k)(x)$$

Věta. Struktura $\Bbbk[\lambda]$-modulu na $M \iff \begin{cases} \text{struktura v.p.} / \Bbbk \text{ na } M \\ \text{lin. operátor } T : M \to M \end{cases}$

odpovídající $\Bbbk[\lambda]$-modul $=: (V,T)$

$T = m_\lambda$ je lineární: $m_\lambda(ax+by) = \lambda\cdot(ax+by) = a(\lambda x) + b(\lambda y) = a\, m_\lambda(x) + b\, m_\lambda(y)$

$\lambda\cdot ax = (\lambda a)\cdot x = (a\lambda)\cdot x = a\cdot\lambda x$

Podle předchozího můžeme psát $p\cdot x = p(T)x$

kde $p(T) = p_0\cdot Id + p_1\cdot T + \dots + p_k\cdot T^k$

Příklad. $\Bbbk[\lambda]$ jakožto $\Bbbk[\lambda]$-modul snadný; jakožto v.p. / $\Bbbk$ s operátorem

$$\left.\begin{aligned} \Bbbk[\lambda] = \Bbbk^{\oplus\mathbb{N}_0} = \{(a_0, a_1, \dots) \mid a_k = 0 \ \forall k \gg 0\} \\ T(a_0, a_1, \dots) = (0, a_0, a_1, \dots) \end{aligned}\right\} \text{ komplikovanější}$$

Definice. Zobrazení $\varphi : M \to N$ se nazývá homomorfismus $\Bbbk[\lambda]$-modulů, jestliže $\varphi(px+qy) = p\,\varphi(x) + q\,\varphi(y)$.

$M = (V,T)$, $N = (U,S)$

Věta. $\varphi : V \to U$ je homomorfismus $\Bbbk[\lambda]$-modulů, právě když je lineární a komutuje diagram

$$\begin{tikzcd} x \arrow[d, mapsto] & V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "m_\lambda = T"'] & U \arrow[d, "S = m_\lambda"] & \varphi(x) \arrow[d, mapsto] \\ \lambda\cdot x & V \arrow[r, "\varphi"] & U & \varphi(\lambda\cdot x) = \lambda\cdot\varphi(x) \end{tikzcd}$$

$\longleftarrow$ pro isomorfismus φ: $S = \varphi T \varphi^{-1}$ ... podobnost operátorů

Důkaz. linearita = zachovává násobení konst. polynomy

diagram = zachovává násobení polynomem λ $\square$

Věta. Homomorfismus $\Bbbk[\lambda]$-modulů $\varphi : \Bbbk[\lambda]^n \to M$ je jednoznačně určen (libovolnými) obrazy $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \in M$. Zejména homomorfismy $\Bbbk[\lambda]$-modulů $\Bbbk[\lambda]^m \to \Bbbk[\lambda]^n$ jsou v bijekci s maticemi z $\mathrm{Mat}_{n\times m}\, \Bbbk[\lambda]$.

$(1+\lambda)e_1 + (1-\lambda^2)e_2 + (\lambda+\lambda^2)e_3$

Důkaz. $\varphi\begin{pmatrix} p^1 \\ \vdots \\ p^n \end{pmatrix} = \varphi(p^1\cdot e_1 + \dots + p^n\cdot e_n) = p^1\cdot\varphi(e_1) + \dots + p^n\cdot\varphi(e_n)$

$$= (\varphi(e_1) \ \cdots \ \varphi(e_n)) \begin{pmatrix} p^1 \\ \vdots \\ p^n \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1+\lambda \\ 1-\lambda^2 \\ \lambda+\lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda^2\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \square$$

Alternativně můžeme psát $\begin{pmatrix}p_1\\ \vdots \\ p_n\end{pmatrix} = v_0 + \lambda v_1 + \dots + \lambda^k v_k \implies$

$\implies \varphi\begin{pmatrix}p_1\\ \vdots \\ p_k\end{pmatrix} = \varphi(v_0) + \lambda\varphi(v_1) + \dots + \lambda^k \varphi(v_k)$ ... pomocí lin. zobr. $\varphi : \Bbbk^n \to M$.

Definice. $N \subseteq M$ $\Bbbk[\lambda]$-podmodul $\implies$ $M/N = \{x + N \mid x \in M\}$ je opět $\Bbbk[\lambda]$-modul s násobením skaláry

$$p\cdot(x+N) \overset{def}{=} px + N.$$

ab. grupy: coker $A = \mathbb{Z}^n/\operatorname{im} A$ kvocient!

Kanonická prezentace operátoru na $\Bbbk^n$

Mějme operátor T na $\Bbbk^n$, tj. $T \in \mathrm{Mat}_{n\times n}\Bbbk$.

$$\Bbbk[\lambda]^n \xrightarrow{T-\lambda E} \Bbbk[\lambda]^n \xrightarrow{\varphi} (\Bbbk^n, T)$$

$e_i \longmapsto e_i \implies \varphi(v_0 + \lambda v_1 + \dots + \lambda^k v_k) = v_0 + Tv_1 + \dots + T^k v_k$

Věta. $\operatorname{im}(T-\lambda E) = \ker\varphi \implies (\Bbbk^n, T) \cong \operatorname{coker}(T-\lambda E) = \Bbbk[\lambda]^n/\operatorname{im}(T-\lambda E)$

Důkaz. $\subseteq$ znamená $\varphi\circ(T-\lambda E) = 0 \iff \varphi((T-\lambda E)e_i) = 0$

ale $\varphi((T-\lambda E)e_i) = \varphi(Te_i - \lambda e_i) = Te_i - Te_i = 0$ ✓

$\supseteq$ nechť $x = v_0 + \lambda v_1 + \dots + \lambda^k v_k \in \ker\varphi$, ukážeme, že $v \equiv 0$ (mod $\operatorname{im}(T-\lambda E)$)

přitom $Tv \equiv \lambda v$ (mod $\operatorname{im}(T-\lambda E)$)

$\Rightarrow x \equiv v_0 + Tv_1 + \dots + T^k v_k = \varphi(x) = 0$ ✓ □

$\implies$ opět SNF$(T-\lambda E)$ má zásadní roli při klasifikaci $\Bbbk[\lambda]$-modulů $(\Bbbk^n, T)$ až na isomorfismus

= operátorů T na $\Bbbk^n$ až na podobnost.

Věta. Operátory T, T' jsou podobné, právě když $T-\lambda E$, $T'-\lambda E$ mají stejný SNF. ← lze algoritmicky testovat, ale JKT těžko

Důkaz. SNF$(T-\lambda E)$ = SNF$(T'-\lambda E)$ $\iff P(\lambda)(T-\lambda E)Q(\lambda) = T' - \lambda E$

„$\Rightarrow$": $PTP^{-1} = T' \Rightarrow P(T-\lambda E)P^{-1} = T' - \lambda E$

„$\Leftarrow$":

$$\begin{tikzcd}
\Bbbk[\lambda]^n \arrow[r, "T-\lambda E"] & \Bbbk[\lambda]^n \arrow[r] \arrow[d, "P(\lambda)", "\cong"'] & (\Bbbk^n, T) \arrow[d, "P", "\cong"'] \\
\Bbbk[\lambda]^n \arrow[u, "Q(\lambda)", "\cong"'] \arrow[r, "T'-\lambda E"'] & \Bbbk[\lambda]^n \arrow[r] & (\Bbbk^n, T')
\end{tikzcd}$$

← izomorfismus P indukovaný $P(\lambda)$ = podobnost $PTP^{-1} = T'$ □

Poznámka.

$$\begin{tikzcd}
v \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & v \\
P(\lambda)\cdot v
\end{tikzcd}$$

$\parallel$

$P(\lambda) = P_0 + \lambda P_1 + \dots + \lambda^k P_k$

P ... matice podobnosti

$$P_0v+\lambda\cdot P_1v+\dots+\lambda^k\cdot P_kv \longmapsto P_0v+T'P_1v+\dots+(T')^kP_kv = p^{left}(T')v$$

Racionální kanonický tvar

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{k}[\lambda]^n & \xrightarrow{T-\lambda E} & \mathbb{k}[\lambda]^n & \longrightarrow & (\mathbb{k}^n, T) \\ Q(\lambda)\uparrow\cong & & \cong\downarrow P(\lambda) & & P\downarrow\cong \\ \mathbb{k}[\lambda]^n & \xrightarrow[S]{} & \mathbb{k}[\lambda]^n & \longrightarrow & \mathbb{k}[\lambda]/(q_1)\times\dots\times\mathbb{k}[\lambda]/(q_r) \end{array}$$

$$S = \left(\begin{array}{ccc|c} q_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & q_r & \\ \hline 0 & & & 0 \end{array}\right) \Rightarrow r=n \quad \text{(jinak by mělo kojádro } \dim=\infty\text{)}$$

ale většina $q_i = 1$!

$$q = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \lambda^k$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{k}[\lambda]/(q)$ má bázi $\alpha = ([1], [\lambda], \dots, [\lambda^{k-1}])$

a operátor m_λ má vzhledem k α matici

$$C(q) = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & -a_{k-1} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \lambda\cdot[1] = [\lambda], \dots, \lambda\cdot[\lambda^{k-2}] = [\lambda^{k-1}] \\ \lambda\cdot[\lambda^{k-1}] = [\lambda^k] = [-a_0 - a_1\lambda - \dots - a_{k-1}\lambda^{k-1}] \end{array}$$

$$\Rightarrow (\mathbb{k}^n, T) \cong \mathbb{k}[\lambda]/(q_1)\times\dots\times\mathbb{k}[\lambda]/(q_n) \cong \left(\mathbb{k}^n, \begin{pmatrix} C(q_1) & & \\ & \ddots & \\ & & C(q_n) \end{pmatrix}\right), \quad q_1 | \dots | q_n$$

racionální kanonický tvar

součin modulů = bloková matice (většina bloků 0×0 … $q_i = 1$)

Věta. Každý operátor je podobný jedinému operátoru v racionálním kanonickém tvaru.

Důsledek (Cayleyho–Hamiltonova věta).
Nechť $\chi(\lambda) = \det(T-\lambda E)$ značí charakteristický polynom operátoru T.
Potom platí $\chi(T) = 0$.

Důkaz. $(\mathbb{k}^n, T) \cong \mathbb{k}[\lambda]/(q_1)\times\dots\times\mathbb{k}[\lambda]/(q_n)$, přičemž napravo platí

$\forall x: q_n\cdot x = 0 \rightarrow$ nalevo platí $\forall v: q_n\cdot v = 0$ tj. $q_n(T)\cdot v = 0 \Leftrightarrow q_n(T) = 0$.

Přitom $\chi(\lambda) = \det(T-\lambda E) = \pm\det(S) = \pm\, q_1(\lambda)\cdots q_n(\lambda)$.

determinant se násobí pouze skaláry (SNF) $\square$

$\det(T-\lambda E) = d_n = \det S$

Poznámka. Zjevně minimální polynom „anihilující" $(\mathbb{k}^n, T) \cong \mathbb{k}[\lambda]/(q_1)\times\dots\times\mathbb{k}[\lambda]/(q_n)$ je právě poslední invariantní faktor q_n. Nazývá se **minimální polynom** operátoru T.

Jordanův kanonický tvar.

$$q = (\lambda-\lambda_1)^{r_1} \cdots (\lambda-\lambda_k)^{r_k}$$

$$\begin{pmatrix} (\lambda-\lambda_1)^{r_1} & & \\ & \ddots & \\ & & (\lambda-\lambda_k)^{r_k} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & q \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{k}[\lambda]/((\lambda-\lambda_1)^{r_1}) \times \dots \times \mathbb{k}[\lambda]/((\lambda-\lambda_k)^{r_k}) \cong \mathbb{k}[\lambda]/(q)$$

mocniny prvočísel

Jak vypadá $\mathbb{k}[\lambda]/((\lambda-\lambda_0)^r)$ jako v.p. s operátorem ?

Zvolme bázi $\alpha = ([(\lambda-\lambda_0)^{r-1}], \dots, [\lambda-\lambda_0], [1]) \Rightarrow$ m_λ má matici
$\left(m_{\lambda-\lambda_0} \text{ má matici } \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}\right)$

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

Věta. Je-li $\mathbb{k}$ alg. uz. nebo pokud se $\chi(\lambda)$ zcela rozkládá, je operátor T podobný jedinému operátoru v JKT (až na pořadí bloků).

Příklad. Najděte JKT operátoru T a matici zprostředkující podobnost.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T-\lambda E = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0-\lambda & 1 & -1 & 1 & 1 & & & \\ -1 & 2-\lambda & -1 & 1 & & 1 & & \\ -1 & 1 & 1-\lambda & 0 & & & 1 & \\ -1 & 1 & 0 & 1-\lambda & & & & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 2-\lambda & -1 & 1 & & 1 & & \\ -1 & 1 & 1-\lambda & 0 & & & 1 & \\ -1 & 1 & 0 & 1-\lambda & & & & 1 \\ -\lambda & 1 & -1 & 1 & 1 & & & \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & \cancel{2-\lambda} & \cancel{-1} & \cancel{1} & & 1 & & \\ 0 & -1+\lambda & 2-\lambda & -1 & & -1 & 1 & \\ 0 & -1+\lambda & 1 & -\lambda & & -1 & & 1 \\ 0 & (1-\lambda)^2 & -1+\lambda & 1-\lambda & 1 & -\lambda & & \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & & 1 & & \\ 0 & -1 & -1+\lambda & 2-\lambda & & -1 & 1 & \\ 0 & -\lambda & -1+\lambda & 1 & & -1 & & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & -1 & -1+\lambda & 2-\lambda & & -1 & 1 & \\ 0 & -\lambda & -1+\lambda & 1 & & -1 & & 1 \\ 0 & 1-\lambda & (1-\lambda)^2 & -1+\lambda & 1 & -\lambda & & \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & & 1 & & \\ 0 & -1 & \cancel{-1+\lambda} & \cancel{2-\lambda} & & -1 & 1 & \\ 0 & 0 & -(1-\lambda)^2 & \cancel{(1-\lambda)^2} & & -1+\lambda & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & (1-\lambda)^2 & 1 & -1 & 1-\lambda & \end{array}\right)$$

$$-1+\lambda + (1-\lambda)(2-\lambda)$$
$$= -1+\lambda + 2 - 3\lambda + \lambda^2$$
$$= 1 - 2\lambda + \lambda^2$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & -1 & 1 & \\ 0 & 0 & (1-\lambda)^2 & 0 & & -1+\lambda & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & (1-\lambda)^2 & 1 & -1 & 1-\lambda & \end{array}\right)$$

$$P(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(e_1, e_2, e_3, e_4) \longmapsto (e_1, e_2, e_3, e_4)$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}[\lambda]^4 \arrow[r, "T-\lambda E"] & \mathbb{K}[\lambda]^4 \arrow[r] \arrow[d, "P(\lambda)", "\cong"'] & (\mathbb{K}^4, T) \arrow[d, "P"', "\cong"] \\ \mathbb{K}[\lambda]^4 \arrow[u, "Q(\lambda)"] \arrow[r, "S"'] & \mathbb{K}[\lambda]^4 \arrow[r] & (\mathbb{K}^4, J) \end{tikzcd}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1+\lambda \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0-\lambda \\ 1-\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

vyjádříme v bázi $((\lambda-1)e_3, e_3, (\lambda-1)e_4, e_4)$ mod $(e_1, e_2, (1-\lambda)^2 e_3, (1-\lambda)^2 e_4)$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P$$

(bohužel ve špatném směru – lze řešit přes inverzi nebo přes sloupcové operace)

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$ — báze, ve které T nabývá JKT