Duální prostor – dokončení

Tvrzení. Nechť $\eta^1, \dots, \eta^k, \eta \in U^*$. Potom rovnice $\eta = 0$ plyne ze soustavy rovnic $\eta^1 = 0, \dots, \eta^k = 0$, právě když η je lin. kombinací $\eta^1, \dots, \eta^k$:

$$\left(\forall v \in V: \ \eta^1(v) = 0, \dots, \eta^k(v) = 0 \Rightarrow \eta(v) = 0\right) \overset{\Leftarrow}{\Longrightarrow} \eta \in [\eta^1, \dots, \eta^k]$$

Poznámka. Logický systém: lineární rovnice (+ logické spojky + kvantifikátory). pravdivé tvrzení vs. dokazatelné tvrzení (možné způsoby dedukce … tady čistě lineární kombinace (+ pravidla logiky). Úplnost = pravdivé ≡ dokazatelné v logice druhého řádu téměř nikdy neplatí (Kurt Gödel).

Podobnou teorii bychom mohli vytvořit pro nehomogenní lineární rovnice (pomocí $A_n \subseteq k^{n+1}$ a transformací na homogenní lin. rovnice na k^{n+1}), uvedeme ale pouze jednu pěknou aplikaci.

Věta. Soustava lin. rovnic $Ax + b = 0$ nemá řešení, právě když existuje lin. kombinace jejích řádků tvaru $1 = 0$.

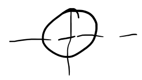
Důkaz. Homogenizace soustavy je $Ax + bx^0 = 0$ a pomocí ní se neřešitelnost napíše snadno: $Ax + bx^0 = 0 \Rightarrow x^0 = 0$.

Podle předchozího tvrzení to pak znamená, že x^0 je lin. kombinací řádků v $Ax + bx^0 \xRightarrow{x^0 = 1} 1$ je lin. komb. řádků v $Ax + b$. $\square$

Polyedrální kužely a polyedry

kvadratické rovnice $\xleftrightarrow{\text{mod } \mathbb{C}}$ kuželosečky

$x^2+y^2-1=0$



soustavy lin. rovnic

- homogenní $\longleftrightarrow$ vekt. podpr.
- nehomogenní $\longleftrightarrow$ afinní podpr.

soustavy lineárních nerovnic $\longleftrightarrow$ „polyedry"

prvně ovšem homogenní verze:

soustavy homogenních lineárních nerovnic $\longleftrightarrow$ „polyedrální kužely"

Galoisova konexe

Def. Galoisova konexe je dvojice zobrazení

$$F : A \rightleftarrows B : G$$

mezi uspořádanými množinami A, B splňující:

- F, G převrací uspořádání
- $a \leq FGa, \quad b \leq GFb$

Prvek $a \in A$ nazveme F-uzavřený, pokud $a = FGa \Rightarrow a \in \operatorname{im} F$.

Naopak, pokud $a \in \operatorname{im} F$, $a = Fb$: $b \leq GFb \Longrightarrow a = Fb \geq FGFb = FGa$

$a \leq FGa \longrightarrow a = FGa$

Dostáváme tak bijekci (anti-izomorfismus)

$$\underset{\operatorname{im} G}{\underset{\parallel}{\{G\text{-uz. prvky}\}}} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \underset{\operatorname{im} F}{\underset{\parallel}{\{F\text{-uz. prvky}\}}}$$

Příklady. {nenulové kvadr. rovnice až na násobek} $\cong$ {proj. nadkvadriky}

$$\parallel$$

$$\underbrace{P(S^2(\mathbb{k}^{n+1})^*)}_{\text{prostor kvadr. forem}} \qquad \mathbb{k} = \mathbb{C} \text{ nebo alg. uz.}$$

$$\{\text{vektorové podprostory } U^*\} \underset{(\ )^\perp}{\overset{(\ )^\perp}{\rightleftarrows}} \{\text{vektorové podprostory } U\}$$

dostaneme z libovolných podmnožin

$\rightarrow$ uzavřené jsou právě vektorové podprostory

Hlavní příklad této části bude

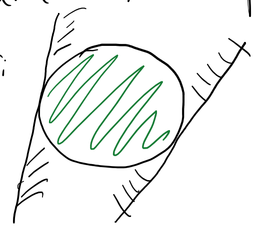
$$(\ )^{\square} : \{\text{podmn. } U^*\} \rightleftarrows \{\text{podmn. } U\} : (\ )^{\square}$$

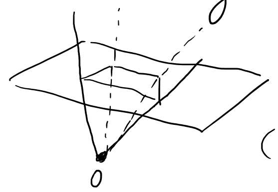
$$A \longmapsto A^{\square} = \{x \in U \mid \forall a \in A : ax \geq 0\}$$

$$\{a \in U^* \mid \forall x \in X : ax \geq 0\} = X^{\square} \longleftarrow X$$

Sice lze popsat $(\ )^{\square\square}$-uzavřené podmnožiny, ale budou nás zajímat napravo pouze podmnožiny tvaru $A^{\square}$ pro A konečnou:

ANO: 

NE: 



⟵ nehomogenní obrázky (později)

Pomocné pojmy: konvexní kužel generovaný množinou vektorů $X \subseteq U$ definujeme

$$\operatorname{cone} X = \{t^1x_1 + \cdots + t^kx_k \mid k \geq 0,\ t^i \geq 0,\ x_i \in X\}$$

⌞ mn. nezáp. lin. komb. prvků z X

$\mathcal{H}$-kužel = podmn. tvaru $A^{\square}$ pro A konečnou

$\mathcal{V}$-kužel = podmn. tvaru $(X^{\square})^{\square}$ pro X konečnou

Věta. Nechť $C \subseteq U$. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:

i) $C = X^{\square\square}$ pro nějakou konečnou množinu $X \subseteq U$, tj. C je $\mathcal{V}$-kužel

ii) $C = \operatorname{cone} X$ pro nějakou konečnou množinu $X \subseteq U$

iii) C je $\mathcal{H}$-kužel

Podmnožinám tohoto tvaru budeme říkat (polyedrální) kužely.

Hlavní ingredience: Motzkinova eliminace

- analogie Gaussovy eliminace: v soustavě eliminujeme jednu proměnnou při zachování řešitelnosti

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & * & \cdots & * & * \\ * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & * & * \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * & * \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

A řešitelná $\iff$ B řešitelná

řešení ⟵ řešení

⌞ zpětné dosazování

- mějme tedy soustavu nerovnic

$$\beta_i t + a_i x \geq 0 \quad ; \quad i = 1, \ldots, r$$

– tři možnosti

- $\beta_j = 0 \iff a_i x \geq 0$ netřeba nic, viz dále
- $\beta_k > 0 \iff t \geq -a_k/\beta_k\, x$ zadává dolní mez pro t
- $\beta_\ell > 0 \iff t \leq -a_\ell/\beta_\ell\, x$ zadává horní mez pro t

– soustava je řešitelná vzhledem k $\underline{t}$ (bereme $\underline{x}$ jako parametr), právě když

- jsou splněny nerovnice prvního typu
  $a_i x \geq 0$
- každá horní mez je $\geq$ každá dolní mez
  $-a_\ell/\beta_\ell\, x \geq -a_k/\beta_k \cdot x$ tj.
  $(a_k/\beta_k - a_\ell/\beta_\ell)\, x \geq 0$

Abstraktně: $\exists t : bt + Ax \geq 0 \iff A'x \geq 0$

soustava vzniklá podle Motzkinovy eliminace; má cca $\frac{1}{4}r^2$ řádků (iterace to dost bobtná; u Gaussovy eliminace počet řádků klesal)

tzv. eliminace kvantifikátorů; velice užitečné zde i jinde;
reformulace: $C \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$
$\downarrow pr$
$pr(C) \subseteq \mathbb{R}^n$

C je $\mathcal{H}$-kužel $\Rightarrow pr(C)$ je $\mathcal{H}$-kužel
$C = (b|A)^\square$, $pr(C) = (A')^\square$

Věta. Nechť $C \subseteq \mathcal{U}$. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:

i) $C = X^{\square\square}$ pro nějakou konečnou množinu $X \subseteq \mathcal{U}$, tj. C je $\mathcal{V}$-kužel
ii) $C = \operatorname{cone} X$ pro nějakou konečnou množinu $X \subseteq \mathcal{U}$
iii) C je $\mathcal{H}$-kužel

Důkaz. i) $\iff$ ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ i)

- „ii) $\Rightarrow$ iii)" používá Motzkinovu eliminaci: $X = \{x_1, \dots, x_r\}$

$$C = \operatorname{cone} X = \{t^1 x_1 + \dots + t^r x_r \mid t^i \geq 0\}$$

$$= \{x \in \mathcal{U} \mid \underbrace{\exists t^1 \dots \exists t^r}_{\overset{\text{Motzkin}}{=}\ A'x \geq 0} : \underbrace{x = t^1 x_1 + \dots + t^r x_r,\ t^1 \geq 0, \dots, t^r \geq 0}_{\text{soustava homogenních lineárních nerovnic}}\}$$

$$= \{x \in \mathcal{U} \mid A'x \geq 0\} = (A')^\square$$

- „i) $\iff$ ii)" je důkaz $X^{\square\square} = \operatorname{cone} X$, vynutíme již dokázaného

$X^{\square\square}$ = nejmenší $\square$-uzavřená podmnožina obsahující X
$= \min \{ A^\square \mid X \subseteq A^\square \}$
cone X = nejmenší podmnožina obsahující X uz. na nezáp. lin. komb.

Přitom $A^\square$ je vždy uz. na nezáp. lin. komb. $\Rightarrow$ cone $X \subseteq X^{\square\square}$
Podle předch. víme $X \subseteq$ cone $X = (A')^\square$ $\Rightarrow$ $X^{\square\square} \subseteq$ cone X.

- „iii) ⇒ i)" plyne z „i) ⇒ iii)" a duality:

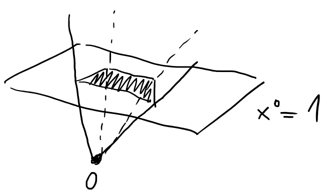
Protože $\{\square\text{-uz. podmn. } U^*\} \cong \{\square\text{-uz. podmn. } U\}$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}\text{-kužely} & \longleftrightarrow & \mathcal{V}\text{-kužely} \\ & & \Downarrow \\ \mathcal{V}\text{-kužely} & \longleftrightarrow & \mathcal{H}\text{-kužely} \end{array}$$ $\square$

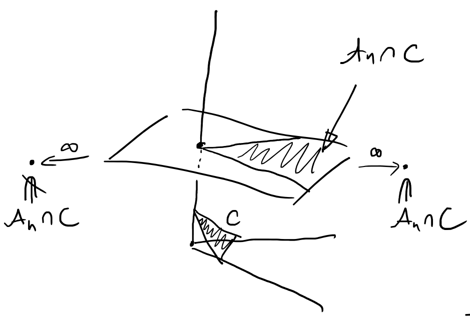
Důsledek (Farkasovo lemma pro kužely).
Nechť $C: Ax \geq 0$ je polyedrální kužel (tj. $C = A^\square$). Pak C splňuje lineární nerovnici $cx \geq 0$, právě když je tato nezáp. lin. komb. řádků soustavy $Ax \geq 0$, tj. ex. $\underbrace{y \geq 0}_{(y_1,\dots,y_r) \text{ t.ž. } \forall i:\ y_i \geq 0}$: $c = y \cdot A$.

Důkaz. Platí $C = A^\square$. Pak C splňuje $cx \geq 0$ znamená
$c \in C^\square = A^{\square\square} =$ cone A ... nezáp. lin. komb. řádků A. $\square$

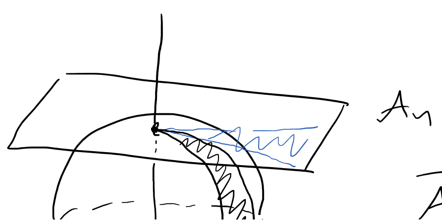
Polyedry



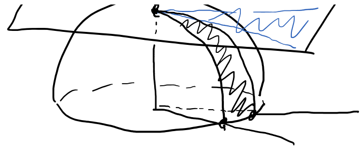
← kužele uzavřené na nezáporné lineární kombinace ⇒ je to o polopřímkách
průnik s $x^0 = 1$ uzavřený na konvexní kombinace = nezáporné afinní
$t^0 A_0 + \dots + t^k A_k$, kde $t^0 + \dots + t^k = 1$, $t^i \geq 0$
⇒ potřeba rozlišovat nekonečna v opačných směrech



Budeme definovat $\bar{A}_n^+ = \{$polopřímky $\ell \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ležící v $x^0 \geq 0\}$



$\bar{A}_n^+ \approx$ hemisféra



$\bar{A}_n^+ \approx$ hemisféra

Definice. Polyedr je podmnožina $P \subseteq A_n$ tvaru $P = \underbrace{A_n \cap C}_{C_1}$, kde C je libovolný polyedrální kužel.

Průnikem $\underbrace{C \text{ s } \{x^0 \geq 0\}}_{\text{opět kužel}}$ můžeme předpokládat $C \subseteq \{x^0 \geq 0\}$.

Protože C můžeme zadat systémem $bx^0 + Ax \geq 0$

$$P = \{[x^1, \ldots, x^n] \in A_n \mid b + Ax \geq 0\}$$ ← zadaný soustavou nehomogenních lineárních nerovnic

Ukážeme, že polyedr P určuje kužel C v jistém smyslu jednoznačně

$$\{\text{kužely } C \subseteq \mathbb{R}^{n+1}\} \underset{(\ )^{\square\square}}{\overset{(\ )_1}{\rightleftarrows}} \{\text{polyedry } P \subseteq A_n\}$$

Věta. Tato zobrazení jsou vzájemně inverzní, pokud levou stranu omezíme na nezáporné kužely. ← kladné kužely: ležící v $\{x^0 \geq 0\}$ ale ne v $\{x^0 = 0\}$

nulový kužel 0 – budeme ignorovat

Důkaz.
- P polyedr, $P = C_1 \Rightarrow P \subseteq P^{\square\square} \subseteq C \Rightarrow P \subseteq (P^{\square\square})_1 \subseteq C_1$

$\Rightarrow P = (P^{\square\square})_1$

- Naopak nechť $C \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ je kladný kužel. Ukážeme, že $(C_1)^{\square} \overset{?}{=} C^{\square}$, pak $(C_1)^{\square\square} = C^{\square\square} = C$.
  ↑ protože C je kužel

Zjevně pokud $cx \geq 0$ platí na C, platí na $C_1 \to$ platí na $(C_1)^{\square}$.

Nechť naopak $cx \geq 0$ platí na C_1. Pokud $x \in C$ s $x^0 > 0$, pak $cx \geq 0 \Leftrightarrow c(\underbrace{\tfrac{1}{x^0} \cdot x}_{\in C_1}) \geq 0$ je splněno. Nechť $v \in C$ s $v^0 = 0$

a nechť $X \in C_1$ libovolný (protože C neleží v $\{x^0 = 0\}$, obsahuje bod A_n)

Potom $\underbrace{X + tv}_{\text{nezáp. lin. komb.}} \in C_1$ pro $t \geq 0$ a tedy $c(X + tv) \geq 0$
$cX + t \cdot cv \geq 0 \quad \forall t \geq 0$

$\Rightarrow cv \geq 0$, tj. $cx \geq 0$ platí na v. $\square$

Poznámka. Pojem H-kuželu jsme přepsali do řeči polyedrů.

Ekvivalentní pojem V-kuželu $C = X^{\square\square} = \operatorname{cone} X$ pro konečnou množinu $X = \{\underbrace{A_0, \ldots, A_r}_{\in A_n}, \underbrace{v_1, \ldots, v_s}_{\in \operatorname{Dir} A_n}\}$ pak dává

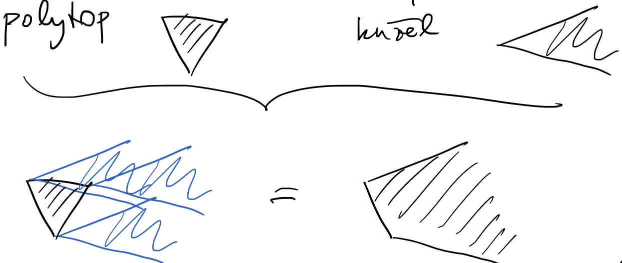
$$P = C_1 = A_n \cap \{\lambda^0 A_0 + \cdots + \lambda^r A_r + t^1 v_1 + \cdots + t^s v_s \mid \lambda^i \geq 0, t^j \geq 0\}$$

$$= \{\lambda^0 A_0 + \cdots + \lambda^r A_r + t^1 v_1 + \cdots + t^s v_s \mid \lambda^0 + \cdots + \lambda^r = 1, \lambda^i \geq 0, t^j \geq 0\}$$

$= \{\lambda^0 A_0 + \dots + \lambda^r A_r + t^1 v_1 + \dots + t^s v_s \mid \lambda^0 + \dots + \lambda^r = 1,\ \lambda^i \geq 0,\ t^j \geq 0\}$

$= \underbrace{\operatorname{conv}\{A_0, \dots, A_r\} + \operatorname{cone}\{v_1, \dots, v_s\}}$

polytop ↑ kužel ↑

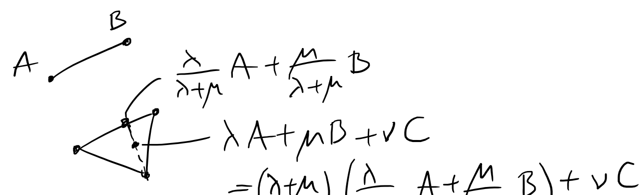


Minkowského rozklad

Poznámka. $\operatorname{conv} X = \{$konvexní kombinace bodů z $X\}$ = konvexní obal X

$\lambda A + \mu B$

$\lambda A + \mu B + \nu C$



$\Rightarrow$ nejmenší podmnožina obsahující X a s každými dvěma body i úsečku jimi určenou.

Věta (Farkasovo lemma pro polyedry). Nechť $\emptyset \neq P: Ax \geq b$ je polyedr. Pak $cx \geq \delta$ platí na P, právě když je nezápornou lin. kombinací nerovnic z $Ax \geq b$ a triviální nerovnice $0x \geq -1$.

Věta (Farkasovo lemma pro polyedry). Nechť $P: Ax \geq b$ je polyedr. Pak $P = \emptyset$, právě když nezápornou lin. kombinací řádků $Ax \geq b$ lze vyrobit neplatnou nerovnici $0x \geq 1$.

Důkazy. První formulace: $0x \geq -x^0$

Položme $C: Ax \geq bx^0,\ x^0 \geq 0$ $\Rightarrow$ C je kladný kužel.

Podle důkazu korespondence $P^\square = C^\square = \{Ax - bx^0, x^0\}^{\square\square}$, tj. nezáp. lin. komb. generujících nerovnic C $\longrightarrow$ přechodem $x^0 = 1$ nezáp. lin. komb. řádků $Ax \geq b$, $0x \geq -1$.

Druhá formulace:

Položme $C: Ax \geq bx^0$. Pak $P = \emptyset$, právě když $C \subseteq \{x^0 \leq 0\}$ ($0x \geq x^0$)

$\Leftrightarrow$ $C^\square \supseteq \{0x \geq x^0\}$ $\Leftrightarrow$ $0x \geq x^0$ je nezáp. lin. komb. řádků $Ax \geq bx^0$

($C^\square = \{Ax - bx^0\}^{\square\square}$) $\Leftrightarrow$ $0x \geq 1$ je nezáp. lin. komb. řádků $Ax \geq b$. $\square$

Dále: • struktura polyedrů — afinní obal, vnitřek, stěny, vrcholy

↑ nerovnice systému

- lineární programování