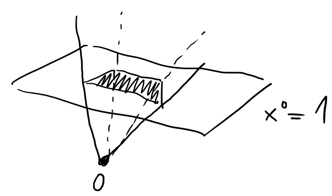
Polyedrální kužely a polyedry

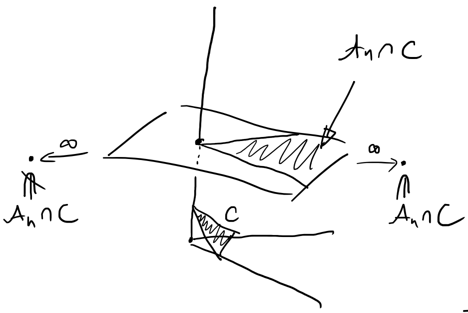
Polyedry



← kužele uzavřené na nezáporné lineární kombinace → je to o polopřímkách
průnik s $x^0=1$ uzavřený na konvexní kombinace = nezáporné afinní

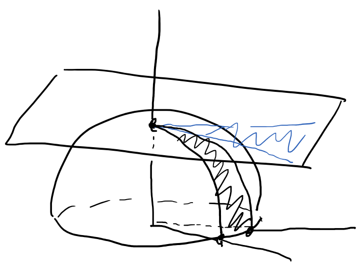
$t^0A_0+\dots+t^kA_k$, kde $t^0+\dots+t^k=1$, $t^i\ge 0$

⇒ potřeba rozlišovat nekonečna v opačných směrech



Budeme definovat $\overline{A}_n^+ = \{$polopřímky $\ell\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ ležící v $x^0\ge 0\}$

↑ ve skutečnosti nebudeme používat (ale přímo $\mathbb{R}^{n+1}$)



A_n

$\overline{A}_n^+ \approx$ hemisféra

Definice. Polyedr je podmnožina $P\subseteq A_n$ tvaru $P=\underbrace{A_n\cap C}_{C_1}$, kde C je libovolný polyedrální kužel.

Průnikem $\underbrace{C \text{ s } \{x^0\ge 0\}}_{\text{opět kužel}}$ můžeme předpokládat $C\subseteq\{x^0\ge 0\}$.

Protože C můžeme zadat systémem $bx^0+Ax\ge 0$

$$P=\{[x^1,\dots,x^n]\in A_n \mid b+Ax\ge 0\}$$ ← zadaný soustavou nehomogenních lineárních nerovnic

Ukážeme, že polyedr P určuje kužel C v jistém smyslu jednoznačně

$$\{\text{kužely } C\subseteq\mathbb{R}^{n+1}\} \underset{(\ )^{\square\square}}{\overset{(\ )_1}{\rightleftarrows}} \{\text{polyedry } P\subseteq A_n\}$$

Věta. Tato zobrazení jsou vzájemně inverzní, pokud levou stranu omezíme na nezáporné kužely. ← kladné kužely: ležící v $\{x^0\ge 0\}$ ale ne v $\{x^0=0\}$

nulový kužel 0 – budeme ignorovat

Důkaz. • P polyedr, $P=C_1$ ⇒ $P\subseteq P^{\square\square}\subseteq C$ ⇒ $P\subseteq(P^{\square\square})_1\subseteq C_1$

⇒ $P=(P^{\square\square})_1$

• Naopak nechť $C\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ je kladný kužel. Ukážeme, že $(C_1)^{\square}\overset{?}{=}C^{\square}$, pak $(C_1)^{\square\square}=C^{\square\square}=C$.

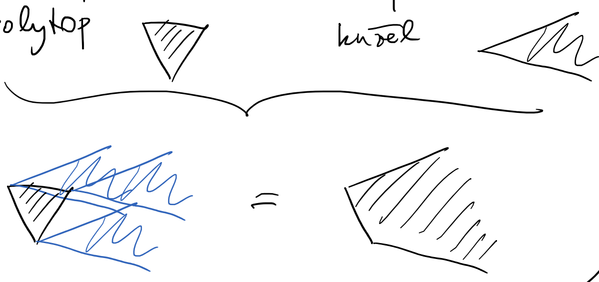
Zjevně pokud $cx \geq 0$ platí na C, platí na C_1 ↖ protože C je kužel $\rightarrow C^A \subseteq (C_1)^A$.
Nechť naopak $cx \geq 0$ platí na C_1. Pokud $x \in C$ s $x^0 > 0$, pak $cx \geq 0 \iff c(\underbrace{\tfrac{1}{x^0} \cdot x}_{\in C_1}) \geq 0$ je splněno. Nechť $v \in C$ s $v^0 = 0$ a nechť $X \in C_1$ libovolný (protože C neleží v $\{x^0 = 0\}$, obsahuje bod A_n).
Potom $\underbrace{X + tv}_{\text{nezáp. lin. komb.}} \in C_1$ pro $t \geq 0$ a tedy $c(X+tv) \geq 0$, $cX + t \cdot cv \geq 0$ $\forall t \geq 0$

$\Rightarrow cv \geq 0$, tj. $cx \geq 0$ platí na v. □

Poznámka. Pojem $\mathcal{H}$-kužele jsme přepsali do řeči polyedrů. Ekvivalentní pojem $\mathcal{V}$-kužele $C = X^{AA} = \operatorname{cone} X$ pro konečnou množinu $X = \{\underbrace{A_0, \dots, A_r}_{\in \mathcal{A}_n}, \underbrace{v_1, \dots, v_s}_{\in \operatorname{Dir} \mathcal{A}_n}\}$ pak dává

$$P = C_1 = \mathcal{A}_n \cap \{\lambda^0 A_0 + \dots + \lambda^r A_r + t^1 v_1 + \dots + t^s v_s \mid \lambda^i \geq 0,\ t^j \geq 0\}$$
$$= \{\lambda^0 A_0 + \dots + \lambda^r A_r + t^1 v_1 + \dots + t^s v_s \mid \lambda^0 + \dots + \lambda^r = 1,\ \lambda^i \geq 0,\ t^j \geq 0\}$$
$$= \operatorname{conv}\{A_0, \dots, A_r\} + \operatorname{cone}\{v_1, \dots, v_s\}$$

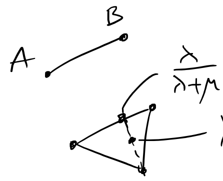
↑ polytop ↑ kužel



Minkowského rozklad
nejednoznačný

Poznámka. $\operatorname{conv} X = \{$konvexní kombinace bodů z $X\}$ = konvexní obal X

↖ $\lambda A + \mu B$



$\frac{\lambda}{\lambda+\mu} A + \frac{\mu}{\lambda+\mu} B$

$\lambda A + \mu B + \nu C$

$\lambda A + \mu B + \nu C = (\lambda+\mu)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} A + \frac{\mu}{\lambda+\mu} B\right) + \nu C$

$\Rightarrow$ nejmenší podmnožina obsahující X a s každými dvěma body i úsečku jimi určenou.

Věta (Farkasovo lemma pro polyedry).
Nechť $\emptyset \neq P: Ax \geq b$ je polyedr. Pak $cx \geq \delta$ platí na P, právě když je nezápornou lin. kombinací nerovnic z $Ax \geq b$ a triviální nerovnice $0x \geq -1$.

Věta (Farkasovo lemma pro polyedry).

Nechť $P: Ax \geq b$ je polyedr. Pak $P = \emptyset$, právě když nezápornou lin. kombinací řádků $Ax \geq b$ lze vyrobit neplatnou nerovnici $0x \geq 1$.

Důkazy. První formulace: $0x \geq -x^0$

Položme $C: Ax \geq bx^0,\ x^0 \geq 0 \Rightarrow C$ je kladný kužel

Podle důkazu korespondence $P^{\square} = C^{\square} = \{Ax - bx^0, x^0\}^{\square\square}$, tj. nezáp. lin. komb. generujících nerovnic $C \longrightarrow$ přechodem $x^0 = 1$ nezáp. lin. komb. řádků $Ax \geq b$, $0x \geq -1$.

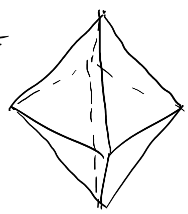
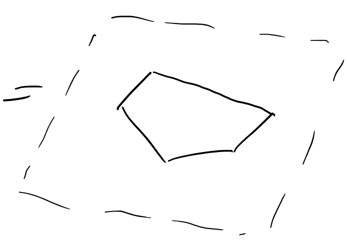
Druhá formulace:

Položme $C: Ax \geq bx^0$. Pak $P = \emptyset$, právě když $C \subseteq \{x^0 \leq 0\}$ ($0x \geq x^0$)

$\Leftrightarrow$ na C platí $0x \geq x^0$ $\Leftrightarrow$ $0x \geq x^0$ je nezáp. lin. komb. řádků $Ax \geq bx^0$

$\Leftrightarrow$ $0x \geq 1$ je nezáp. lin. komb. řádků $Ax \geq b$. $\square$

Afinní obal polyedru

$P =$  $\Rightarrow$ aff. span $P = \mathbb{A}_3$ | $P =$  $\leftarrow$ aff. span P

Popišeme nyní polyedry $P \subseteq \mathbb{A}_n$ s aff. span $P = \mathbb{A}_n$:

Lemma. Nechť $P: Ax \geq b$ je neprázdný polyedr. Násl. podm. jsou ekvivalentní:

1) P nesplňuje žádnou netriviální lineární rovnici. (tj. P neleží ve vlast. af. podpr.)
2) P nesplňuje žádnou netriv. nerovnici z $Ax \geq b$ jako rovnici.
3) Existuje bod splňující všechny netriv. nerovnice z $Ax \geq b$ ostře.

$\hookrightarrow$ vnitřek polyedru P; pokud chápeme $P \subseteq$ aff. span P $\Rightarrow$ 1) platí $\Rightarrow$ relativní vnitřek P

Důkaz. $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$

$1 \Rightarrow 2$: triviální

$2 \Rightarrow 3$: nechť $a_i x \geq \beta_i$ splňuje bod x_i ostře, zbylé neostře

$\Rightarrow \frac{1}{t}(x_1 + \dots + x_t)$ splňuje všechny nerovnice ostře

$3 \Rightarrow 1$: nechť $cx \geq \delta$ je netriv. nerovnice splněná na P

$\Rightarrow cx \geq \delta$ je netriv. nezáp. kombinací $Ax \geq b$, $0x \geq -1$

$\Rightarrow$ libovolný vnitřní bod P splňuje všechny ostře

$\Rightarrow$ splňuje ostře i $cx \geq \delta$ a neplatí jako rovnice $\square$

Stěny polyedru.

Definice. Nechť $cx \geq \delta$ platí na polyedru P.
Pak $P \cap \{cx = \delta\}$ nazveme stěnou polyedru P.

$0x \geq 0$: P je stěnou P
$0x \geq -1$: $\emptyset$ je stěnou P

Obecně: $cx \geq \delta$ je nezáp. komb. $Ax \geq b$, $0x \geq -1$
Je-li odpovídající stěna nepr., musí být koef. u $0x \geq -1$ nulový.

Tvrzení. Nechť $P: Ax \geq b$. Pak stěny P vzniknou nahrazením některých nerovnic $Ax \geq b$ rovnicemi.

Důkaz. Nechť $cx \geq \delta$ je nezápornou kombinací řádků $Ax \geq b$.

$$\sum \lambda_i a_i x = \sum \lambda_i \beta_i \xLeftrightarrow{\text{na } P} \forall i: \lambda_i > 0 \Rightarrow a_i x = \beta_i$$

$$\sum \underbrace{\lambda_i}_{\geq 0} \underbrace{(a_i x - \beta_i)}_{\geq 0} = 0$$

Naopak to funguje stejně. $\square$

Důsledek. Minimální stěny (tj. min. nepr.) jsou afinní prostory.
Navíc jsou tvaru $\{A'x = b'\}$, kde $A'x \geq b'$ je podsystém $Ax \geq b$.
$\llcorner$ tj. nerovnice nejsou potřeba

Důkaz. Obecná stěna je $\{Ax \geq b, A'x = b'\} \subseteq \{A'x = b'\}$
$\llcorner$ každá nerovnice musí být triviální $\Rightarrow$ rovnost. $\square$

Definice. Pokud je (min.) stěna bodem, nazývá se vrchol.
Polyedr, jehož min. stěny jsou body se nazývá bodovaný.

Příklad. $P: Ax = b, x \geq 0$ je bodovaný, protože neobsahuje žádnou přímku. Předpokládejme, že $Ax = b$ má lin. nez. řádky.
Potom vrcholy jsou tvaru $\{Ax = b, x_M = 0\}$ pro $M \subseteq \{1, \dots, n\}$;
zjevně můžeme předpokládat, že $|M| = n - k$, kde $k = \text{rk } A$.
= počet řádků A

řádků A

Věta. Nechť $P: Ax \geq b$ má nepr. vnitřek (tj. aff. span $P = A_n$) a žádná definující nerovnice není nadbytečná. Pak stěny P kodimenze 1 odpovídají jednotlivým nerovnicím $Ax \geq b$.

Důkaz. ve skriptech

Duálně. Nechť $P = \operatorname{conv} X$ a žádný bod X není nadbytečný. Pak body X jsou právě stěny dimenze 0 = vrcholy.

Věta. Každý polyedr P je disjunktním sjednocením relativních vnitřků jednotlivých stěn $P: Ax \geq b$.

Důkaz. Musíme ukázat, že každý bod P leží ve vnitřku jediné stěny P: Nechť tento bod splňuje $A'x \geq b'$ jako rovnice a $A''x \geq b''$ ostře. Pak

$$P \cap \{A'x = b'\}$$

je jediná stěna P obsahující tento bod v rel. vnitřku. $\square$

Lineární programování

$\min\{\underbrace{cx}_{\text{lin. fce}} \mid \underbrace{Ax \geq b}_{\text{polyedr}}\}$

$A_n \xrightarrow{c} \mathbb{R}$
$\cup|$
$P = \operatorname{conv} X + \operatorname{cone} V$

$cP = \underbrace{\operatorname{conv} cX}_{\text{omezený interval}} + \underbrace{\operatorname{cone} cV}_{0 / \mathbb{R}_+ / \mathbb{R}_- / \mathbb{R}} \leftarrow \underline{\text{interval}}$

zdola neomezená / min. ex.
$\Uparrow$

Pokud $\min = \delta$, pak nastává na množině

$P \cap \{cx = \delta\} \leftarrow$ stěna (protože $cx \geq \delta$ na P)

Pokud je P bodovaný, obsahuje každá stěna vrchol (min. stěna).
simplexová metoda – chytré prohledávání vrcholů $\to \min$

$$\min\{cx \mid Ax \geq b\} \underset{x = x_+ - x_-}{=} \min\{cx_+ - cx_- \mid Ax_+ - Ax_- \geq b,\ x_+ \geq 0,\ x_- \geq 0\}$$

$$\min\{cx \mid Ax \geq b,\ x \geq 0\} \underset{s = Ax - b}{=} \min\{cx \mid Ax - s = b,\ x \geq 0,\ s \geq 0\}$$

$\min\{cx \mid \underbrace{Ax = b,\ x \geq 0}_{\text{bodovaný polyedr}}\}$ je úloha lin. progr.

Dualita

Věta. $\min\{cx \mid Ax \geq b\} = \max\{yb \mid c = yA,\ y \geq 0\}$

infimum = max. dolní závora

Důkaz. $\min\{cx \mid Ax \geq b\} = \max\{\delta \mid cx \geq \delta \text{ platí na } P: Ax \geq b\}$

$= \max\{\delta \mid \exists y \geq 0:\ \underbrace{c = yA,\ \delta = yb}_{(c \mid \delta) = y \cdot (A \mid b)}\}$

$= \max\{yb \mid c = yA,\ y \geq 0\}.$ $\square$

Symetrická verze:

$\min\{cx \mid Ax \geq b,\ x \geq 0\} = \max\{yb \mid c \geq yA,\ y \geq 0\}$