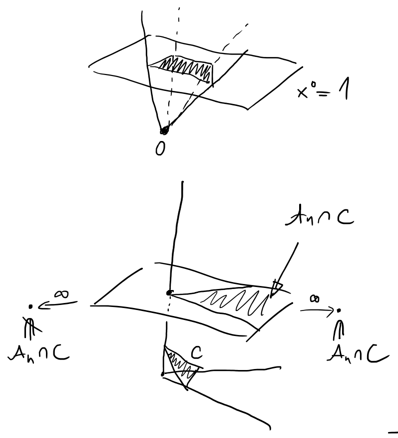
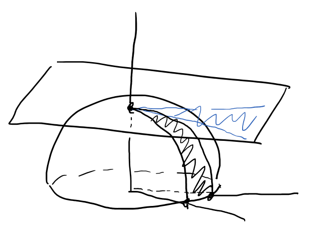
Polyedrální kužely a polyedry

Polyedry



← kužele uzavřené na nezáporné lineární kombinace ⇒ je to o polopřímkách
průnik s $x^0=1$ uzavřený na konvexní kombinace = nezáporné afinní
$t^0A_0+\dots+t^kA_k$, kde $t^0+\dots+t^k=1$, $t^i\geq 0$
⇒ potřeba rozlišovat nekonečna v opačných směrech

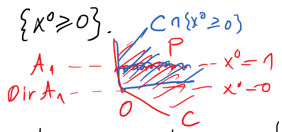
Budeme definovat $\overline{A}_n^+=\{$polopřímky $l\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ ležící v $x^0\geq 0\}$
↑ ve skutečnosti nebudeme používat (ale přímo $\mathbb{R}^{n+1}$)



$\overline{A}_n^+\approx$ hemisféra

Definice. Polyedr je podmnožina $P\subseteq A_n$ tvaru $P=\underbrace{A_n\cap C}_{C_1}$, kde C je libovolný polyedrální kužel.
$C_1\leftarrow\{x\in C\mid x^0=1\}$

Průnikem $\underbrace{C \text{ s } \{x^0\geq 0\}}_{\text{opět kužel}}$ můžeme předpokládat $C\subseteq\{x^0\geq 0\}$.



Protože C můžeme zadat systémem $(b|A)\binom{x^0}{x}\geq 0$, $bx^0+Ax\geq 0$

$$P=\{[x^1,\dots,x^n]\in A_n\mid b+Ax\geq 0\}$$ ← zadaný soustavou nehomogenních lineárních nerovnic

⇒ ekvivalentně polyedr ≡ množ. řešení soustav (nehomog.) lin. nerovnic

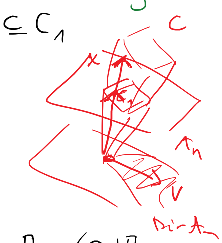
Ukážeme, že polyedr P určuje kužel C v jistém smyslu jednoznačně

$$\{\text{kužely } C\subseteq\mathbb{R}^{n+1}\}\ \underset{(\ )^{\square\square}}{\overset{(\ )_1}{\rightleftarrows}}\ \{\text{polyedry } P\subseteq A_n\}$$
kladné ↔ nepr. polyedry

Věta. Tato zobrazení jsou vzájemně inverzní, pokud levou stranu omezíme na nezáporné kužely. ← kladné kužely: leží v $\{x^0\geq 0\}$ ale ne v $\{x^0=0\}$
odpovídají $P\neq\emptyset$
odpovídá $P=\emptyset$ → nulový kužel 0 – budeme ignorovat

Důkaz. • P polyedr, $P=C_1$ ⇒ $P\subseteq P^{\square\square}\subseteq C$ ⇒ $P\subseteq(P^{\square\square})_1\subseteq C_1$
⇒ $P=(P^{\square\square})_1$

$\exists x: x^0>0,\ x\in C \Rightarrow \frac{1}{x^0}x\in C_1$ ⇐



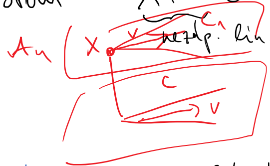
• Naopak nechť $C\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ je kladný kužel. Ukážeme, že $(C_1)^\square\overset{?}{=}C^\square$, pak $(C_1)^{\square\square}=C^{\square\square}=C$.
↑ protože C je kužel

Zjevně pokud $cx\geq 0$ platí na C, platí na C_1 → $C^\square\subseteq(C_1)^\square$.
Nechť naopak $cx\geq 0$ platí na C_1. Pokud $x\in C$ s $x^0>0$, potom $cx\geq 0 \Leftarrow c(\underbrace{\tfrac{1}{x^0}x}_{\text{leží v } C_1})\geq 0$ ✓. Pokud $v\in C$ s $v^0=0$:
a nechť $X\in C_1$ libovolný (protože C neleží v $\{x^0=0\}$, obsahuje bod A_n)
Potom $X+tv\in C_1$ pro $t\geq 0$ a tedy $c(X+tv)\geq 0$, $cX+t\,cv\geq 0$ $\forall t\geq 0$

A_n / X C_1 nezáp. lin. komb.

Potom $X + tv \in C_1$ pro $t \geq 0$ a tedy $c(X+tv) \geq 0$ $\forall t \geq 0$

$cX + t\cdot cv \geq 0$



$\Rightarrow$ $cv \geq 0$, tj. $cx \geq 0$ platí na v. $\square$

Poznámka. Pojem H-kužele jsme přepsali do řeči polyedrů. $(b|A)\binom{x^0}{x} \geq 0$, $b + Ax \geq 0$

Ekvivalentní pojem V-kužele $C = X^{\square\square} = \text{cone}\, X$ pro konečnou množinu $X = \{\underbrace{A_0, \dots, A_r}_{\in A_n}, \underbrace{v_1, \dots, v_s}_{\in \text{Dir}\, A_n}\}$ pak dává

nezáp. (lin.) komb. bodů z X

$$P = C_1 = A_n \cap \{\lambda^0 A_0 + \dots + \lambda^r A_r + t^1 v_1 + \dots + t^s v_s \mid \lambda^i \geq 0,\ t^j \geq 0\}$$

$$= \{\lambda^0 A_0 + \dots + \lambda^r A_r + t^1 v_1 + \dots + t^s v_s \mid \lambda^0 + \dots + \lambda^r = 1,\ \lambda^i \geq 0,\ t^j \geq 0\}$$

0-tá souřadnice této lin. komb.

$$= \text{conv}\{A_0, \dots, A_r\} + \text{cone}\{v_1, \dots, v_s\}$$

($\subseteq A_n$, $\subseteq \text{Dir}\, A_n$)

$\{\lambda^0 A_0 + \dots + \lambda^r A_r \mid \lambda^0 + \dots + \lambda^r = 1,\ \lambda^0, \dots, \lambda^r \geq 0\}$

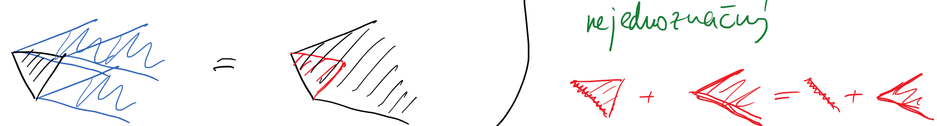
konvexní komb.

polytop

kužel

Minkowského rozklad

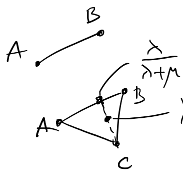
nejednoznačný



Poznámka. $\text{conv}\, X = \{\text{konvexní kombinace bodů z } X\} = \text{konvexní obal } X$

$\lambda A + \mu B$

$\lambda A + \mu B + \nu C$



$\frac{\lambda}{\lambda+\mu} A + \frac{\mu}{\lambda+\mu} B$

$\lambda A + \mu B + \nu C = (\lambda+\mu)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} A + \frac{\mu}{\lambda+\mu} B\right) + \nu C$

$\text{conv}\{A, B, C, D, E\} = \text{conv}\{A, D, C, B\}$

$\Rightarrow$ nejmenší podmnožina obsahující X a s každými dvěma body i úsečku jimi určenou.

$\forall A, B \in X:\ \lambda A + \mu B \in X$

Věta (Farkasovo lemma pro polyedry). Nechť $\emptyset \neq P: Ax \geq b$ je polyedr. Pak $cx \geq \delta$ platí na P, právě když je nezápornou lin. kombinací nerovnic z $Ax \geq b$ a triviální nerovnice $0x \geq -1$.

$P: x \geq 0$ $P = \mathbb{R}_+$

$x \geq -1$ platí na P

Věta (Farkasovo lemma pro polyedry). Nechť $P: Ax \geq b$ je polyedr. Pak $P = \emptyset$, právě když nezápornou lin. kombinací řádků $Ax \geq b$ lze vyrobit neplatnou nerovnici $0x \geq 1$.

Důkazy. První formulace: $0x \geq -x^0$

Položme $C: Ax \geq bx^0,\ x^0 \geq 0$ $\Rightarrow$ C je kladný kužel

Podle důkazu korespondence $P^\square = C^\square = \{Ax - bx^0, x^0\}^{\square\square}$, tj. nezáp. lin. komb. generujících nerovnic C $\longrightarrow$ přechodem $x^0 = 1$ nezáp. lin. komb. řádků $Ax \geq b$, $0x \geq -1$.

$x^0 = 1$

Druhá formulace:

Položme $C: Ax \geq bx^0$. Pak $P = \emptyset$, právě když $C \subseteq \{x^0 \leq 0\}$

$0x \geq x^0$

$x^0 \leq 0$

$\Leftrightarrow$ na C platí $0x \geq x^0$ $\Leftrightarrow$ $0x \geq x^0$ je nezáp. lin. komb. řádků $Ax \geq bx^0$

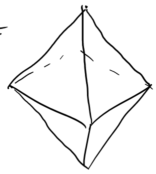
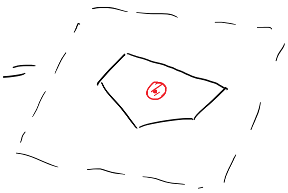
$\overset{x^0=1}{\Leftrightarrow}$ $0x \geq 1$ je nezáp. lin. komb. řádků $Ax \geq b$. $\square$

Afinní obal polyedru

$\longrightarrow$ $\dim P := \dim \text{aff. span}\, P$

aff. span P

Afinní obal polyedru → dim P := dim aff. span P

P =  ⇒ aff. span P = A_3 | P = 

Popíšeme nyní polyedry $P \subseteq A_n$ s aff. span $P = A_n$:

Lemma. Nechť $P: Ax \ge b$ je neprázdný polyedr. Násl. podm. jsou ekvivalentní:

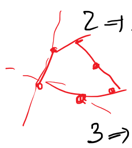
1) P nesplňuje žádnou netriviální (různou od $0x=0$) lineární rovnici. (tj. P neleží ve vlast. af. podpr.)
2) P nesplňuje žádnou netriv. nerovnici z $Ax \ge b$ jako rovnici.
3) Existuje bod splňující všechny netriv. (různou od $0x \ge \gamma$ ($\gamma \le 0$)) nerovnice z $Ax \ge b$ ostře.

↳ vnitřek polyedru P; pokud chápeme $P \subseteq$ aff. span P ⇒ 1) platí
⇒ relativní vnitřek P

Důkaz. 1 ⇒ 2 ⇒ 3 ⇒ 1

1 ⇒ 2: triviální

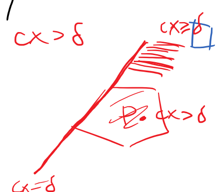
2 ⇒ 3: nechť $a_i x \ge \beta_i$ (i-tá nerovnice z $Ax \ge b$) splňuje bod x_i ostře, zbylé neostře
⇒ $\frac{1}{t}(x_1 + \dots + x_t)$ splňuje všechny nerovnice ostře ($\frac{1}{t}x_1 + \dots + \frac{1}{t}x_t \in P$)



3 ⇒ 1: nechť $cx \ge \delta$ je netriv. nerovnice splněná na P
$\overset{\text{Farkas}}{\Rightarrow}$ $cx \ge \delta$ je netriv. nezáp. kombinací $Ax \ge b$, $0x \ge -1$
⇒ libovolný vnitřní bod P splňuje všechny ostře
⇒ splňuje ostře i $cx \ge \delta$ a neplatí jako rovnice (ve vnitřním bodě $cx > \delta$)

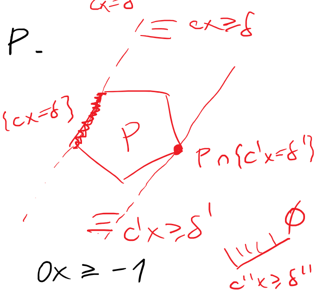
spor s předp., že $cx = \delta$ platí na P ⇒ $cx \ge \delta$ platí na P

Stěny polyedru



Definice. Nechť $cx \ge \delta$ platí na polyedru P. Pak $P \cap \{cx = \delta\}$ nazveme stěnou polyedru P.

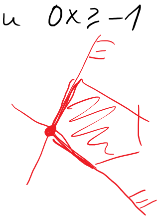
mnohoúhelník P ↳ konv.
stěny: P, hrany P, vrcholy P, ∅



$0x \ge 0$: P je stěnou P

$0x \ge -1$: ∅ je stěnou P

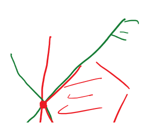
Obecně: $cx \ge \delta$ je nezáp. komb. $Ax \ge b$, $0x \ge -1$
Je-li odpovídající stěna nepr., musí být koef. u $0x \ge -1$ nulový.



Tvrzení. Nechť $P: Ax \ge b$. Pak nepr. stěny P vzniknou nahrazením některých nerovnic $Ax \ge b$ rovnicemi.

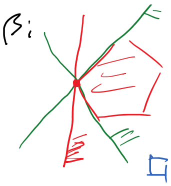
Důkaz. Nechť $cx \ge \delta$ je nezápornou kombinací řádků $Ax \ge b$.

$$\sum \lambda_i a_i x = \sum \lambda_i \beta_i \overset{\text{na } P}{\Longleftrightarrow} \forall i: \lambda_i > 0 \Rightarrow a_i x = \beta_i$$
$$\sum \lambda_i (a_i x - \beta_i) = 0$$



$$\sum \lambda_i a_i x = \sum \lambda_i \beta_i \overset{\text{na } F}{\Longleftrightarrow} \forall i: \lambda_i > 0 \Rightarrow a_i x = \beta_i$$

$$\sum \underbrace{\lambda_i}_{\geq 0} \underbrace{(a_i x - \beta_i)}_{\geq 0} = 0$$

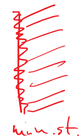


Naopak to funguje stejně. □

Důsledek. Minimální stěny (tj. min. nepr.) jsou afinní podprostory. Navíc jsou tvaru $\{A'x = b'\}$, kde $A'x \geq b'$ je podsystém $Ax \geq b$.
└ tj. nerovnice nejsou potřeba

Důkaz. Obecná stěna je $\{Ax \geq b,\ A'x = b'\} \subseteq \{A'x = b'\}$
↳ každá nerovnice musí být triviální $\Rightarrow$ rovnost. □
└ vždy splněna

Definice. Pokud je (min.) stěna bodem, nazývá se vrchol. Polyedr, jehož min. stěny jsou body se nazývá bodovaný.



min. st.

$Ax \geq b, -Ax \geq -b$; $x^1, \dots, x^n \geq 0$; $x + t \cdot v \supseteq [x^1 + tv^1, \dots, x^n + tv^n]$

Příklad. $P: Ax = b,\ x \geq 0$ je bodovaný, protože neobsahuje žádnou přímku. Předpokládejme, že $Ax = b$ má lin. nez. řádky. Potom vrcholy jsou tvaru $\{Ax = b,\ x_M = 0\}$ pro $M \subseteq \{1, \dots, n\}$; zjevně můžeme předpokládat, že $|M| = n - k$, kde $k = \mathrm{rk}\, A$.
= počet řádků A

neleží v 1. ortantu $\Rightarrow$ neleží v P

Věta. Nechť $P: Ax \geq b$ má nepr. vnitřek (tj. aff. span $P = A_n$) a žádná definující nerovnice není nadbytečná. Pak stěny P kodimenze 1 odpovídají jednotlivým nerovnicím $Ax \geq b$.

Důkaz ve skriptech

Duálně. Nechť $P = \mathrm{conv}\, X$ a žádný bod X není nadbytečný. Pak body X jsou právě stěny dimenze 0 = vrcholy.

Věta. Každý polyedr P je disjunktním sjednocením relativních vnitřků jednotlivých stěn $P: Ax \geq b$.

Důkaz. Musíme ukázat, že každý bod P leží ve vnitřku jediné stěny P: Nechť tento bod splňuje $A'x \geq b'$ jako rovnice ($A'x = b'$) a $A''x \geq b''$ ostře ($A''x > b''$). Pak

$$P \cap \{A'x = b'\}$$

je jediná stěna $\neq \emptyset$ obsahující tento bod v rel. vnitřku. □

P = 

Lineární programování

$$\min\{\underbrace{cx}_{\text{lin. fce}} \mid \underbrace{Ax \geq b}_{\text{polyedr}}\}$$

$$A_n \xrightarrow{c} \mathbb{R}$$
$$\cup|$$
$$P = \operatorname{conv} X + \operatorname{cone} V$$

zdola neomezená / min. ex.

$\Uparrow$

$$cP = \underbrace{\operatorname{conv} cX}_{\text{omezený interval}} + \underbrace{\operatorname{cone} cV}_{0/\mathbb{R}_+/\mathbb{R}_-/\mathbb{R}} \leftarrow \underline{\text{interval}}$$

Pokud $\min = \delta$, pak nastává na množině

$$P \cap \{cx = \delta\} \leftarrow \text{stěna} \quad (\text{protože } cx \geq \delta \text{ na } P)$$

Pokud je P bodovaný, obsahuje každá stěna vrchol (min. stěna).
simplexová metoda – chytré prohledávání vrcholů $\to \min$

$$\min\{cx \mid Ax \geq b\} \underset{x = x_+ - x_-}{=} \min\{cx_+ - cx_- \mid Ax_+ - Ax_- \geq b,\ x_+ \geq 0,\ x_- \geq 0\}$$

$$\min\{cx \mid Ax \geq b,\ x \geq 0\} \underset{s = Ax - b}{=} \min\{cx \mid Ax - s = b,\ x \geq 0,\ s \geq 0\}$$

$$\min\{cx \mid \underbrace{Ax = b,\ x \geq 0}_{\text{bodovaný polyedr}}\} \quad \text{je úloha lin. progr.}$$

Dualita

Věta. $\min\{cx \mid Ax \geq b\} = \max\{yb \mid c = yA,\ y \geq 0\}$

Důkaz.

infimum = max. dolní závora

$$\min\{cx \mid Ax \geq b\} = \max\{\delta \mid cx \geq \delta \text{ platí na } P: Ax \geq b\}$$
$$= \max\{\delta \mid \exists y \geq 0: \underbrace{c = yA,\ \delta = yb}_{(c\mid\delta) = y\cdot(A\mid b)}\}$$
$$= \max\{yb \mid c = yA,\ y \geq 0\}. \qquad \square$$

Symetrická verze:

$$\min\{cx \mid Ax \geq b,\ x \geq 0\} = \max\{yb \mid c \geq yA,\ y \geq 0\}$$