Multilineární algebra

Připomenutí: U v.p. nad $\mathbb{k}$ $\Rightarrow$ $U^* = \mathrm{Hom}(U, \mathbb{k})$ v.p. nad $\mathbb{k}$

$\alpha = (e_1, \dots, e_n)$ báze $\Rightarrow$ $\alpha^* = (f^1, \dots, f^n)^T$ báze

$$f^i(e_j) = \delta^i_j$$

Zobecnění pro bilineární formy:

U, V, W v.p. nad $\mathbb{k}$ $\to$ $\mathrm{Lin}_2(U, V; W)$ prostor bilineárních zobrazení

tj. zobrazení $F: U \times V \to W$ splňujících

$$F(-, v): U \to W, \quad F(u, -): V \to W \quad \text{jsou lineární zobrazení}$$

$\to$ opět vektorový prostor: $(k \cdot F + \ell \cdot G)(u, v) = k \cdot F(u, v) + \ell \cdot G(u, v)$

Speciálně dostáváme $\mathrm{Lin}_2(U, V; \mathbb{k})$ ... bilineární formy

Podobně: $\mathrm{Lin}_q(U_1, \dots, U_q; W)$ ... q-lineární zobrazení

nebo multilineární zobrazení

Nechť $\eta \in U^*$, $\theta \in V^*$. Definujme

$$\theta \odot \eta \in \mathrm{Lin}_2(U, V; \mathbb{k}), \quad \theta \odot \eta\,(u, v) = \theta(v) \cdot \eta(u)$$

opačné pořadí

bez křížení

Snadno: $\theta \odot \eta$ je bilineární.

Věta. Nechť (e_i) je báze U s duální bází (f^i).

Nechť $(\bar{e}_j)$ je báze V s duální bází $(\bar{f}^j)$. Potom součiny

$\bar{f}^j \odot f^i$ tvoří bázi $\mathrm{Lin}_2(U, V; \mathbb{k})$.

Poznámka. V dalším budeme uvažovat báze neuspořádané, ale indexované

báze: místo $(e_1, \dots, e_n)$ tedy $(e_i)_{i \in I}$

souřadnice: místo $(x^1, \dots, x^n)$ tedy $(x^i)_{i \in I}$

$\Big\}$ $\sum_i x^i e_i = u$ dává smysl

K větě: $(e_i)_{i \in I}$ báze U $\Rightarrow$ $(f^i)_{i \in I}$ báze U^* ... dualita $f^i(e_j) = \delta^i_j$

$\rightsquigarrow$ $(\bar{f}^j \odot f^i)_{(i,j) \in I \times J}$ indexované $I \times J$, souřadnice taktéž.

Důkaz. Nechť $\Phi \in \mathrm{Lin}_2(U, V; \mathbb{k})$ a hledejme koeficienty Φ_{rs} t.ž.

$$\Phi = \sum_{r,s} \Phi_{rs} \cdot (\bar{f}^s \odot f^r)$$

Podstatné: bilineární zobrazení jsou stejná $\Leftrightarrow$ mají stejné hodnoty na dvojicích bázových vektorů ...

Tedy je tato rovnice ekvivalentní:

$$\Phi(e_i, \bar{e}_j) = \Big(\sum_{r,s} \Phi_{rs} \cdot (\bar{f}^s \odot f^r)\Big)(e_i, \bar{e}_j)$$

$$= \sum_{r,s} \Phi_{rs} \cdot \bar{f}^s(\bar{e}_j) \cdot f^r(e_i)$$

$$= \Phi_{ij} \implies \text{jediné řešení} \Rightarrow \text{báze.} \quad \square$$

Opět vidíme, že souřadnice jsou dány hodnotami $\Phi_{ij} = \Phi(e_i, \bar{e}_j)$, stejně jako u lineárních forem $\eta_i = \eta(e_i)$.

Dualita?

$U \rightsquigarrow U^* \rightsquigarrow U^{**} = U$

$U, V \rightsquigarrow \mathrm{Lin}_2(U, V; \mathbb{k}) \rightsquigarrow \mathrm{Lin}_2(U, V; \mathbb{k})^* = ?$ bude to tenzorový součin

$\rightsquigarrow U^*, V^* \rightsquigarrow \mathrm{Lin}_2(U^*, V^*; \mathbb{k}) = ?$

(obecněji třeba: $\mathrm{Lin}_2(\mathrm{Lin}_2(U, V; \mathbb{k}), \mathrm{Lin}_2(W, X; \mathbb{k}); \mathbb{k}) = ?$)

Tenzorový součin

Motivace: $\mathrm{Lin}_2(U,V;W) \cong \mathrm{Hom}(U\otimes V, W)$

bilineární zobrazení $U\times V \to W$ jako lineární zobrazení $U\otimes V \to W$

↑ tenzor

$$\mathrm{Lin}_2(U,V;\mathbb{k})^* \overset{U,V\text{ kon. dim.}}{\Longrightarrow} \cong \mathrm{Hom}(U\otimes V;\mathbb{k})^* = (U\otimes V)^{**} = U\otimes V$$

Definice. U,V v.p. nad $\mathbb{k}$ konečné dimenze. Definujme

$$U\otimes V = \mathrm{Lin}_2(U,V;\mathbb{k})^*.$$

Speciální prvky vzniknou opět evaluací:

$u \mapsto ev_u = (-,u)$
$\eta \mapsto \eta(u)$

$$u\in U,\ v\in V \rightsquigarrow u\otimes v \in U\otimes V = \mathrm{Lin}_2(U,V;\mathbb{k})^*$$
$$u\otimes v(\Phi) = \Phi(u,v)$$

Dostáváme tak zobrazení

$$T: U\times V \longrightarrow U\otimes V$$
$$(u,v) \longmapsto u\otimes v \quad = t(u,v)$$

Lemma. Zobrazení T je bilineární.

Důkaz.
$$(k^1u_1+k^2u_2)\otimes v \overset{?}{=} k^1\cdot u_1\otimes v + k^2\cdot u_2\otimes v \qquad / -(\Phi)$$
$$\big((k^1u_1+k^2u_2)\otimes v\big)(\Phi) \overset{?}{=} \big(k^1\cdot u_1\otimes v + k^2\cdot u_2\otimes v\big)(\Phi)$$
$$\Phi(k^1u_1+k^2u_2, v) \overset{?}{=} k^1\,\Phi(u_1,v) + k^2\,\Phi(u_2,v) \quad \checkmark$$
□

Věta. Nechť (e_i) je báze U, $(\bar e_j)$ je báze V. Potom $(e_i\otimes\bar e_j)$ je báze $U\otimes V$.

Důkaz. $U\otimes V = \mathrm{Lin}_2(U,V;\mathbb{k})^*$, stačí tedy ukázat, že $(e_i\otimes\bar e_j)$ je duální k bázi $\bar f^j\odot f^i$:

$$(e_r\otimes\bar e_s)(\bar f^j\odot f^i) = \bar f^j\odot f^i(e_r,\bar e_s) = \bar f^j(\bar e_s)\cdot f^i(e_r) = \delta^j_s\,\delta^i_r = \delta^{(i,j)}_{(r,s)}.$$
□

Poznámka. Pro U,V ne nutně kon. dim.

$$U\times V \xrightarrow{T} \mathrm{Lin}_2(U,V;\mathbb{k})$$
$$(u,v) \longmapsto u\otimes v$$

podobně $\mathrm{im}(U\to U^{**}) \cong U$

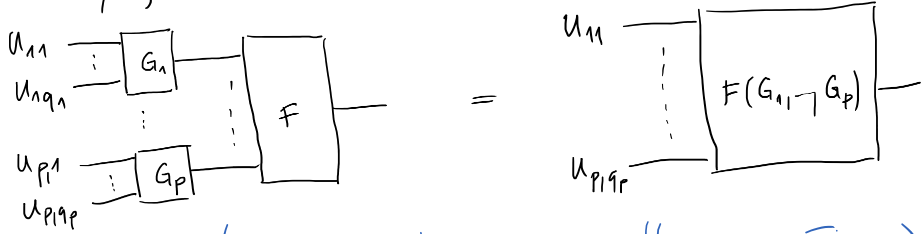
$U\otimes V = \mathrm{span}(\mathrm{im}\,T) \Rightarrow$ věta opět platí

↑ důležité, ne každý prvek $U\otimes V$ je tvaru $u\otimes v$ ... „jednoduché" tenzory (rozložitelné)

Důsledek. $\dim(U\otimes V) = \dim U\cdot\dim V$

Tvrzení. Složením multilineárních zobrazení vznikne multilineární zobrazení, tj. $F(G(u,v),H(w,x)) = K(u,v,w,x)$ je 4-lineární atd.

Tvrzení: Složením multilineárních zobrazení vznikne multilineární zobrazení, tj. $F(G(u,v), H(w,x)) = K(u,v,w,x)$ je 4-lineární atd.



cvičení

Věta (univerzální vlastnost tenzorového součinu)

$$\begin{tikzcd} U\times V \arrow[r, "F"] \arrow[d, "T"'] & W \\ U\otimes V \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

$\forall F$ bilineární $\exists!\ \varphi$ lineární:

$$F = \varphi \circ T$$

Důkaz.

$$\begin{tikzcd} (e_i, \bar{e}_j) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & F(e_i, \bar{e}_j) \\ e_i\otimes \bar{e}_j \arrow[ur, dashed, mapsto] & \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ musíme vyžadovat $\varphi(e_i \otimes \bar{e}_j) = F(e_i, \bar{e}_j)$ a existuje jediné takové lineární φ (protože $e_i \otimes \bar{e}_j$ tvoří bázi)

Potom $F = \varphi \circ T$, protože to jsou bilineární zobrazení a mají stejné hodnoty na dvojicích bázových vektorů. □

Interpretace: $\mathrm{Hom}(U\otimes V, W) \longrightarrow \mathrm{Lin}_2(U, V; W)$ je bijekce; ve skutečnosti
$\varphi \longmapsto \varphi\circ T$ je to izomorfismus.

(a také je to izomorfní $\mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}(V,W))$)

Vlastnosti tenzorového součinu:

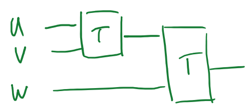
analogie $(U\times V)\times W \equiv U\times V\times W \cong U\times(V\times W)$
$((u,v),w) \leftrightarrow (u,v,w) \leftrightarrow (u,(v,w))$

- asociativita: $(U\otimes V)\otimes W \xleftarrow{\cong} U\otimes V\otimes W \xrightarrow{\cong} U\otimes(V\otimes W)$

  $(u\otimes v)\otimes w \longleftrightarrow u\otimes v\otimes w \longleftrightarrow u\otimes(v\otimes w)$ ← nejsou obecné prvky!

  zobrazení se dají snadno vyrobit z univerzální vlastnosti

$$\begin{tikzcd} (u,v,w) \arrow[rr, mapsto] \arrow[dd, mapsto] & & (u\otimes v)\otimes w \\ & U\times V\times W \arrow[r, "F"] \arrow[d, "T"'] & (U\otimes V)\otimes W \\ & U\otimes V\otimes W \arrow[ur, dashed, "a"'] & \\ u\otimes v\otimes w \arrow[uurr, dashed, mapsto, bend right] & & \end{tikzcd}$$



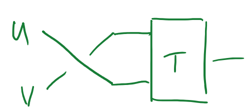
$\Rightarrow$ trilineární

zobrazení a je izomorfismus, protože posílá bázi $e_i\otimes \bar{e}_j \otimes \bar{\bar{e}}_k$ na bázi $(e_i \otimes \bar{e}_j)\otimes \bar{\bar{e}}_k$.

$\Longrightarrow$ budeme různá uzávorkování ztotožňovat (jako u kartézského součinu)

- komutativita: $U\otimes V \xrightarrow{\cong} V\otimes U$

$$\begin{tikzcd} U\times V \arrow[r, "F"] \arrow[d, "T"'] & V\otimes U \\ U\otimes V \arrow[ur, dashed, "c"'] & \end{tikzcd}$$



$\Rightarrow$ bilineární

opět c posílá bázi $e_i \otimes \bar{e}_j$ na bázi $\bar{e}_j \otimes e_i$ (nebo inverze je opět c, ale pro dvojici V, U)

$\Rightarrow$ nebudeme ztotožňovat ... $U = V$ nechceme $(u,v) = (v,u)$!

obecněji: $U_1 \otimes \cdots \otimes U_q \xrightarrow{p_\sigma} U_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes U_{\sigma(q)}$ pro lib. permutaci $\sigma \in \Sigma_q$ na množině $\{1, \dots, q\}$

$$p_\sigma(u_1 \otimes \cdots \otimes u_q) = u_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(q)}$$

- jednotka: $\Bbbk \otimes U \xrightarrow{\cong} U$

$$\begin{tikzcd} \Bbbk \times U \arrow[r, "\cdot"] \arrow[d, "T"'] & U \\ \Bbbk \otimes U \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & k \cdot u & u \arrow[dl] \\ k \otimes u \arrow[ur] \arrow[<-, ur] & 1 \otimes u & \end{tikzcd}$$

- vztah k duálním prostorům:

$$V^* \otimes U^* \longrightarrow Lin_2(U, V; \Bbbk) \cong (U \otimes V)^*$$
$$\theta \otimes \eta \longmapsto \theta \circ \eta$$

$\Rightarrow$ budeme ztotožňovat, takže můžeme zapomenout na $\circ$

$$\begin{tikzcd} V^* \times U^* \arrow[r] \arrow[d] & Lin_2(U, V; \Bbbk) \\ V^* \otimes U^* \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

+ báze na bázi $\bar{f}^{j} \otimes f^{i} \longmapsto \bar{f}^{j} \circ f^{i}$

Věta. Je-li U kon. dim., pak zobrazení

$$V \otimes U^* \longrightarrow Hom(U, V), \quad v \otimes \eta \longmapsto (v \cdot \eta : u \longmapsto v \cdot \eta(u))$$

je izomorfismus.

Důkaz. Nechť $\varphi \in Hom(U, V)$ a hledejme vzor, ve tvaru

$$\sum_{i,j} a^i_j \cdot (\bar{e}_i \otimes f^j)$$

v souřadnicích $\bar{e}_i \otimes f^j \longmapsto \bar{e}_i \cdot f^j = E^j_i$

tedy hledáme koeficienty a^i_j tak, aby

$v \otimes \eta \longmapsto v \cdot \eta$; $\begin{pmatrix} \vdots \\ \cdots 1 \end{pmatrix}$ součin matic

$$\sum_{i,j} a^i_j (\bar{e}_i \cdot f^j) = \varphi$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i,j} a^i_j (\bar{e}_i \cdot f^j(e_s)) = \varphi(e_s)$$

$U \xrightarrow{\eta} \Bbbk \xrightarrow{v} V$

$$\sum_i a^i_s \bar{e}_i = \varphi(e_s) \quad \xrightarrow{\bar{f}^r()} \quad a^r_s = \bar{f}^r(\varphi(e_s))$$

takže koeficienty existují jediné $\rightarrow$ a^r_s = r-tá souřadnice $\varphi(e_s)$. □

Poznámka. Souřadnice a^i_j jsou prvky matice zobrazení φ

horní index i je řádkový index ... vektory $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$

dolní index j je sloupcový index ... formy $(y_1 \cdots y_n)$

Poznámka. Jednoduché tenzory $v \otimes \eta$ odpovídají ... 1 ... 0 pokud $v=0$ nebo $\eta=0$)

Poznámka. Jednoduché tenzory $v \otimes \eta$ odpovídají zobrazením $v \cdot \eta$ hodnosti 1 (případně 0, pokud $v=0$ nebo $\eta=0$) a těch moc není $\Rightarrow$ většina tenzorů není jednoduchých!