Multilineární algebra

Připomenutí: U v.p. nad $\mathbb{k}$ $\Rightarrow$ $U^* = \mathrm{Hom}(U, \mathbb{k})$ v.p. nad $\mathbb{k}$

$\alpha = (e_1, \dots, e_n)$ báze $\Rightarrow$ $\alpha^* = (f^1, \dots, f^n)^T$ báze

$$f^i(e_j) = \delta^i_j$$

Zobecnění pro bilineární formy:

U, V, W v.p. nad $\mathbb{k}$ $\to$ $\mathrm{Lin}_2(U, V; W)$ prostor bilineárních zobrazení

tj. zobrazení $F : U \times V \longrightarrow W$ splňujících

$F(k^1 u_1 + k^2 u_2, v) = k^1 F(u_1, v) + k^2 F(u_2, v)$

$F(-, v) : U \longrightarrow W$, $F(u, -) : V \longrightarrow W$ jsou lineární zobrazení

$\to$ opět vektorový prostor : $(k \cdot F + \ell \cdot G)(u, v) = k \cdot F(u, v) + \ell \cdot G(u, v)$

Speciálně dostáváme $\mathrm{Lin}_2(U, V; \mathbb{k})$ ... bilineární formy

Podobně: $\mathrm{Lin}_q(U_1, \dots, U_q; W)$ ... q-lineární zobrazení $\leftarrow$ $q=1$: lineární formy

$U_1 \times \dots \times U_q \longrightarrow W$ lin. v každé složce nebo multilineární zobrazení

Nechť $\eta \in U^*$, $\theta \in V^*$. Definujme

$x^1, \dots, x^n$ $y^1, \dots, y^n$

$\mathbb{k}^n \times \mathbb{k}^n \longrightarrow \mathbb{k}$

x^i y^j

$y^j \circ x^i : (x, y) \mapsto y^j x^i$

$f(x, y) = \sum a_{ij} y^j x^i$

opačné pořadí

$\theta \circ \eta \in \mathrm{Lin}_2(U, V; \mathbb{k})$, $\theta \circ \eta (u, v) = \theta(v) \cdot \eta(u)$

bez křížení

a_{11} a_{12} $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\leftrightarrow$

a_{21} a_{22} $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Snadno : $\theta \circ \eta$ je bilineární.

Věta. Nechť (e_i) je báze U s duální bází (f^i).
Nechť $(\bar{e}_j)$ je báze V s duální bází $(\bar{f}^j)$. Potom součiny
$\bar{f}^j \circ f^i$ tvoří bázi $\mathrm{Lin}_2(U, V; \mathbb{k})$.

$\left[f(x, y) = \sum a_{ij} y^j \cdot x^i \right.$ --- $y^j x^i$ tvoří bázi $\overset{j}{\underset{i \mapsto}{}} \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & 1 & \end{pmatrix} = E^{ij}$

Poznámka. V dalším budeme uvažovat báze neuspořádané, ale indexované

báze: místo $(e_1, \dots, e_n)$ $- I = \{1, \dots, n\}$ tedy $(e_i)_{i \in I}$ $\quad i \longmapsto e_i$

souřadnice: místo $(x^1, \dots, x^n)$ tedy $(x^i)_{i \in I}$ $\Big\}$ $\sum_i x^i e_i = u$ dává smysl

K větě: $(e_i)_{i \in I}$ báze U $\Rightarrow$ $(f^i)_{i \in I}$ báze U^* ... dualita $f^i(e_j) = \delta^i_j$

$\leadsto$ $(\bar{f}^j \circ f^i)_{(i,j) \in I \times J}$ indexované $I \times J$, souřadnice taktéž.

Důkaz. Nechť $\Phi \in \mathrm{Lin}_2(U, V; \mathbb{k})$ a hledejme koeficienty Φ_{rs} t.ž.

$$\Phi = \sum_{r,s} \Phi_{rs} \cdot (\bar{f}^s \circ f^r)$$

chceme: Φ_{rs} existují jediné

Podstatné: bilineární zobrazení jsou stejná $\Leftrightarrow$ mají stejné hodnoty na dvojicích bázových vektorů ...

$\Phi = \Psi$ $\Leftrightarrow$ $\Phi(e_i, \bar{e}_j) = \Psi(e_i, \bar{e}_j)$

$\Rightarrow$: triviální

$\Leftarrow$: $\Phi(u, v) = \Phi\left(\sum_i u^i e_i, \sum_j v^j \bar{e}_j\right)$

$\Phi(u^1 e_1 + \dots + u^n e_n, v)$

$= u^1 \Phi(e_1, v) + \dots + u^n \Phi(e_n, v)$

$= \sum_i \sum_j u^i v^j \, \Phi(e_i, \bar{e}_j)$

$\qquad \qquad \qquad \qquad \quad \shortparallel$

$= \sum_i \sum_j u^i v^j \, \Psi(e_i, \bar{e}_j)$

Tedy je tato rovnice ekvivalentní:

$$\Phi(e_i, \bar{e}_j) = \left(\sum_{r,s} \Phi_{rs} \cdot (\bar{f}^s \circ f^r) \right) (e_i, \bar{e}_j)$$

$\bar{f}^s \circ f^r (e_i, \bar{e}_j)$

$$= \sum \Phi_{rs} \cdot \bar{f}^s(\bar{e}_j) \, f^r(e_i)$$

$$\Psi(e_i, \bar{e}_j) = \Big(\sum_{r,s} \Psi_{rs}$$

$$\underbrace{f^s \odot f^r (e_i, \bar{e}_j)}$$

$$= \sum_{r,s} \Phi_{rs} \cdot f^s(\bar{e}_j)\, f^r(e_i)$$

$$= \Phi_{ij} \qquad \Longrightarrow \text{ jediné řešení} \Rightarrow \text{báze.}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\Phi(u^1 e_1 + \dots + u^n e_n, v)\\ &= u^1 \Phi(e_1, v) + \dots + u^n \Phi(e_n, v)\end{aligned}}$$

$$= \sum_i \sum_j u^i v^j \, \Psi(e_i, e_j)$$
$$\parallel$$
$$= \sum_i \sum_j u^i v^j \, \Psi(e_i, \bar{e}_j)$$
$$\dots = \Psi(u,v)$$
$$\square$$

Opět vidíme, že souřadnice jsou dány hodnotami $\Phi_{ij} = \Phi(e_i, \bar{e}_j)$, stejně jako u lineárních forem $\eta_i = \eta(e_i)$.

Pozn. $\mathrm{Lin}_q(U_1, \dots, U_q; \mathbb{k})$ … q-lin. formy: $(e_i^k)_{i \in I_k}$ báze U_k

(e_i^1) báze U_1
$\vdots$
(e_i^q) báze U_q

$(f_k^i)_{i \in I_k}$ duální báze U_k^*

$$\Rightarrow \Big(\overset{U_q^*}{\overset{\cup}{f_q^{i_q}}} \odot \dots \odot \overset{U_1^*}{\overset{\cup}{f_1^{i_1}}}\Big)_{(i_1, \dots, i_q) \in I_1 \times \dots \times I_q} \text{ je báze } \mathrm{Lin}_q(U_1, \dots, U_q; \mathbb{k}).$$

Dualita?

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, squiggly] & U^* \arrow[r, squiggly] & U^{**} = U \\ U,V \arrow[r, squiggly] \arrow[dr, squiggly] & \mathrm{Lin}_2(U,V;\mathbb{k}) \arrow[r, squiggly] & \mathrm{Lin}_2(U,V;\mathbb{k})^* = ? \\ & U^*, V^* \arrow[r, squiggly] & \mathrm{Lin}_2(U^*, V^*; \mathbb{k}) = ? \end{tikzcd}$$

dim = dim U · dim V

bude to tenzorový součin

(obecněji třeba: $\mathrm{Lin}_2(\mathrm{Lin}_2(U,V;\mathbb{k}), \mathrm{Lin}_2(W,X;\mathbb{k}); \mathbb{k}) = ?$)

Tenzorový součin

Motivace: $\mathrm{Lin}_2(U,V;W) \cong \mathrm{Hom}(U\otimes V, W)$

bilineární zobrazení $U\times V \to W$ jako lineární zobrazení $U\otimes V \to W$

↑ tenzor

$F: U\times V \to W$ určeno jednoznačně $F(e_i, \bar{e}_j)$

$\Rightarrow$ $(e_i, \bar{e}_j)$ je něco jako báze $U\otimes V$

$\dim U\otimes V = \dim U \cdot \dim V$

U, V kon. dim. $\Longrightarrow$ $\mathrm{Lin}_2(U,V;\mathbb{k})^* \cong \mathrm{Hom}(U\otimes V; \mathbb{k})^* = (U\otimes V)^{**} = U\otimes V$

Definice. U, V v.p. nad $\mathbb{k}$ konečné dimenze. Definujme

$$U\otimes V = \mathrm{Lin}_2(U,V;\mathbb{k})^*.$$

„druhý duál"

Speciální prvky vzniknou opět evaluací:

$u \mapsto ev_u = (-, u)$

$\eta \mapsto \eta(u)$

$u\in U,\ v\in V \rightsquigarrow u\otimes v \in U\otimes V \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Lin}_2(U,V;\mathbb{k})^*$

$u\otimes v(\Phi) = \Phi(u,v)$

Dostáváme tak zobrazení

$$T:\ U\times V \longrightarrow U\otimes V$$
$$(u,v) \longmapsto u\otimes v = T(u,v)$$

Lemma. Zobrazení T je bilineární.

$T(k^1u_1+k^2u_2, v) \overset{?}{=} k^1\, T(u_1,v) + k^2\, T(u_2,v)$

např. $(u^1+u^2)\otimes v = u^1\otimes v + u^2\otimes v$

$(ku)\otimes v = k\cdot u\otimes v$

Důkaz. $(k^1u_1+k^2u_2)\otimes v \overset{?}{=} k^1\cdot u_1\otimes v + k^2\cdot u_2\otimes v \quad / -(\Phi)$

$((k^1u_1+k^2u_2)\otimes v)(\Phi) \overset{?}{=} (k^1\cdot u_1\otimes v + k^2\cdot u_2\otimes v)(\Phi)$

$\Phi(k^1u_1+k^2u_2, v) \overset{?}{=} k^1\,\Phi(u_1,v) + k^2\,\Phi(u_2,v)$ ✓ □

Věta. Nechť (e_i) je báze U, $(\bar{e}_j)$ je báze V. Potom $(e_i\otimes\bar{e}_j)$ je báze $U\otimes V$.

$(e_i)_{i\in I}$, $(\bar{e}_j)_{j\in J} \rightsquigarrow (e_i\otimes\bar{e}_j)_{(i,j)\in I\times J}$

Důkaz. $U\otimes V = \mathrm{Lin}_2(U,V;\mathbb{k})^*$, stačí tedy ukázat, že $(e_i\otimes\bar{e}_j)$ je duální k bázi $\bar{f}^j\circ f^i$:

$$(e_r\otimes\bar{e}_s)(\bar{f}^j\circ f^i) = \bar{f}^j\circ f^i(e_r,\bar{e}_s) = \bar{f}^j(\bar{e}_s)\cdot f^i(e_r) = \delta^j_s\,\delta^i_r = \delta^{(i,j)}_{(r,s)}.$$ □

Poznámka. Pro U, V ne nutně kon. dim.

$U\times V \xrightarrow{T} \mathrm{Lin}_2(U,V;\mathbb{k})^*$

$(u,v) \longmapsto u\otimes v$

$\hookrightarrow \Phi \longmapsto \Phi(u,v)$

podobně $\mathrm{im}(U\to U^{**}) \cong U$

souřadnicová definice $U\otimes V$: má bázi $e_i\otimes\bar{e}_j$

$U\otimes V = \mathrm{span}(\mathrm{im}\,T) \Rightarrow$ věta opět platí

↑ důležité, ne každý prvek $U\otimes V$ je tvaru $u\otimes v$ … jednoduché tenzory (rozložitelné)

Důsledek. $\dim(U\otimes V) = \dim U\cdot\dim V$

$\dim(U\oplus V) = \dim U + \dim V$

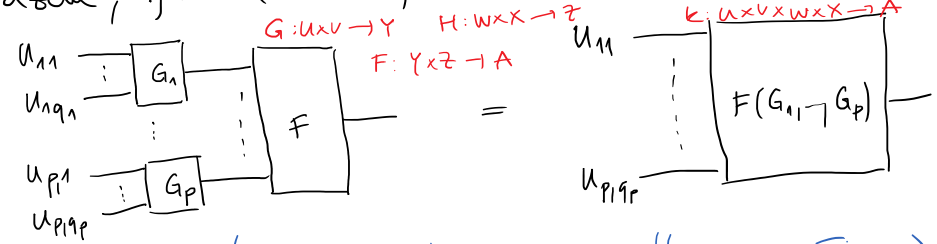
$\mathbb{k}^2\otimes\mathbb{k}^2$

$\ni t = a^{11}e_1\otimes e_1 + a^{12}e_1\otimes e_2 + a^{21}e_2\otimes e_1 + a^{22}e_2\otimes e_2$

Tvrzení. Složením multilineárních zobrazení vznikne multilineární zobrazení, tj. $F(G(u,v), H(w,x)) = K(u,v,w,x)$ je 4-lineární atd.

$G: U\times V\to Y$ $\quad H: W\times X\to Z$ $\quad K: U\times V\times W\times X\to A$

Tvrzení. Složením multilineárních zobrazení vznikne multilineární zobrazení, tj. $F(G(u,v), H(w,x)) = K(u,v,w,x)$ je 4-lineární atd.



cvičení

Věta (univerzální vlastnost tenzorového součinu)

$$\begin{tikzcd} U\times V \arrow[r, "F"] \arrow[d, "T"'] & W \\ U\otimes V \arrow[ur, dashed, "\exists!\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

$\forall F$ bilineární $\exists!\ \varphi$ lineární:

$F = \varphi\circ T$ ← diagram komutuje
trojúhelník

Důkaz.

$$\begin{tikzcd} (e_i,\bar{e}_j) \arrow[r, mapsto] \arrow[dd, mapsto] & F(e_i,\bar{e}_j) \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] \\ & \varphi(e_i\otimes\bar{e}_j) \\ e_i\otimes\bar{e}_j \arrow[ur, dashed, mapsto] & \end{tikzcd}$$

⟹ musíme vyžadovat $\varphi(e_i\otimes\bar{e}_j) = F(e_i,\bar{e}_j)$ a existuje jediné takové lineární φ (protože $e_i\otimes\bar{e}_j$ tvoří bázi)

Potom $F=\varphi\circ T$, protože to jsou bilineární zobrazení a mají stejné hodnoty na dvojicích bázových vektorů. $\square$

! T hraje zásadní roli

Interpretace:

$$\mathrm{Hom}(U\otimes V, W) \longrightarrow \mathrm{Lin}_2(U,V;W)$$ je bijekce; ve skutečnosti

$$\varphi \longmapsto \underset{F}{\underset{\shortparallel}{\varphi\circ T}}$$ je to izomorfismus.

(a také je to izomorfní $\mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}(V,W))$)

Vlastnosti tenzorového součinu:

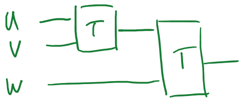
analogie $(U\times V)\times W \cong U\times V\times W \cong U\times(V\times W)$
$((u,v),w) \leftrightarrow (u,v,w) \leftrightarrow (u,(v,w))$

- asociativita:

$$\begin{array}{ccccc}(U\otimes V)\otimes W & \xleftarrow{\cong} & U\otimes V\otimes W & \xrightarrow{\cong} & U\otimes(V\otimes W)\\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (u\otimes v)\otimes w & \longleftrightarrow & u\otimes v\otimes w & \longleftrightarrow & u\otimes(v\otimes w)\end{array}$$
← nejsou obecné prvky!

zobrazení se dají snadno vyrobit z univerzální vlastnosti

$$\begin{tikzcd} (u,v,w) \arrow[rr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] & & (u\otimes v)\otimes w \\ & U\times V\times W \arrow[r, "F"] \arrow[d, "T"'] & (U\otimes V)\otimes W \\ & U\otimes V\otimes W \arrow[ur, dashed, "a"] & \\ u\otimes v\otimes w \arrow[uurr, dashed, mapsto, bend right] & & \end{tikzcd}$$



⟹ trilineární

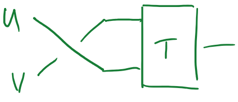
zobrazení a je izomorfismus, protože posílá bázi $e_i\otimes\bar{e}_j\otimes\bar{\bar{e}}_k$ na bázi $(e_i\otimes\bar{e}_j)\otimes\bar{\bar{e}}_k$.

⟹ budeme různá uzávorkování ~~ztotožňovat~~ ztotožňovat (jako u kartézského součinu)

- komutativita: $U\otimes V \xrightarrow{\cong} V\otimes U$

$$\begin{tikzcd} (u,v) & & & v\otimes u \\ & U\times V \arrow[r, "F"] \arrow[d, "T"'] & V\otimes U & \\ & U\otimes V \arrow[ur, dashed, "c"] & & \\ u\otimes v \arrow[uuurrr, mapsto, bend right] & & & \end{tikzcd}$$

⟹ $F(u,v) = v\otimes u$
$c(u\otimes v) = v\otimes u$
není definice, $u\otimes v$ není obecný prvek $U\otimes V$!



⟹ bilineární

$2.\ u\otimes v$
$(2u)\otimes v = u\otimes(2v)$

neboť c posílá bázi $e_i\otimes\bar{e}_j$ na bázi $\bar{e}_j\otimes e_i$ (nebo inverze opět $\overset{U\otimes V}{c}$ $\longmapsto$ posílá bázi $e_i\otimes\bar{e}_j$ na bázi $\bar{e}_j\otimes e_i$ (nebo inverze je opět c, ale pro dvojici V,U)

$\Rightarrow$ nebudeme ztotožňovat ... $U=V$ nechceme $(u,v)=(v,u)$!

obecněji: $U_1\otimes\cdots\otimes U_q \xrightarrow{\rho_\sigma} U_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes U_{\sigma(q)}$ pro lib. permutaci $\sigma\in\Sigma_q$ na množině $\{1,\ldots,q\}$

$$\rho_\sigma(u_1\otimes\cdots\otimes u_q)=\underline{\underline{u_{\sigma(1)}}}\otimes\cdots\otimes u_{\sigma(q)}$$

$\rho_{(12)}\ (u\otimes v\otimes w)=v\otimes u\otimes w$

$\rho_{(23)}\ (u\otimes v\otimes w)=u\otimes w\otimes v$

$\rho_{(123)}\ (u\otimes v\otimes w)=v\otimes w\otimes u$

$\sigma(1)=2\quad \sigma(3)=1$

$\sigma(2)=3$

$$\underline{\underline{\rho_{\sigma\circ\tau}=\rho_\tau\circ\rho_\sigma}}\ ?$$

- jednotka: $\mathbb{k}\otimes U\xrightarrow{\cong}U$ $\quad V\otimes U\cong U$

$(k,u)\longmapsto k\cdot u$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{k}\times U \arrow[r, "\cdot"] \arrow[d, "T"'] & U \\
\mathbb{k}\otimes U \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
k\cdot u & u \arrow[d] & ku \arrow[d] \\
k\otimes u \arrow[u, mapsto] & 1\otimes u & k\otimes u = 1\otimes ku \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$\vee\qquad /\!/$

$k\cdot(1\otimes u)$

- vztah k duálním prostorům:

$V^*\otimes U^*\longrightarrow \mathrm{Lin}_2(U,V;\mathbb{k})\cong(U\otimes V)^*$

$\theta\otimes\eta\longmapsto\theta\circ\eta$

$\Rightarrow$ budeme ztotožňovat, takže můžeme zapomenout na $\circ$

$$\begin{tikzcd}
V^*\times U^* \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Lin}_2(U,V;\mathbb{k}) \\
V^*\otimes U^* \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

+ báze na bázi

$\bar{f}^j\otimes f^i\longmapsto\bar{f}^j\circ f^i$

Věta. Je-li U kon. dim., pak zobrazení

$$V\otimes U^*\longrightarrow \mathrm{Hom}(U,V)\ ,\quad v\otimes\eta\longmapsto\big(v\cdot\eta: u\longmapsto v\cdot\eta(u)\big)$$

je izomorfismus.

Důkaz. Nechť $\varphi\in\mathrm{Hom}(U,V)$ a hledejme vzor, ve tvaru

$$\sum_{i,j}a^i_j\cdot(\bar{e}_i\otimes f^j)$$

v souřadnicích

$\bar{e}_i\otimes f^j\longmapsto\bar{e}_i\cdot f^j=E^j_i$

$v\otimes\eta\longmapsto v\cdot\eta\qquad {\scriptstyle i}\begin{pmatrix} & \overset{j}{\vdots} & \\ \cdots & 1 & \end{pmatrix}$

$\uparrow$ součin matic

$U\xrightarrow{\eta}\mathbb{k}\xrightarrow{v}V$

tedy hledáme koeficienty a^i_j tak, aby

$$\sum_{i,j}a^i_j\,(\bar{e}_i\cdot f^j)=\varphi$$

$$\Leftrightarrow\quad\sum_{i,j}a^i_j\,(\bar{e}_i\cdot f^r(e_s))=\varphi(e_s)$$

$$\sum_i a^i_s\,\bar{e}_i=\varphi(e_s)\quad\xrightarrow{\bar{f}^r(\,)}\quad a^r_s=\bar{f}^r(\varphi(e_s))$$

takže koeficienty existují jediné $\longrightarrow$ $a^r_s=r$-tá souřadnice $\varphi(e_s)$. □

Poznámka. Souřadnice a^i_j jsou prvky matice zobrazení φ

horní index i je řádkový index ... vektory $\begin{pmatrix}x^1\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix}$

dolní index j je sloupcový index ... formy $(y_1\cdots y_n)$

Poznámka. Jednoduché tenzory $v\otimes\eta$ odpovídají

pokud $v=0$ nebo $\eta=0$)

Poznámka. Jednoduché tenzory $v \otimes \eta$ odpovídají zobrazením $v \cdot \eta$ hodnosti 1 (případně 0, pokud $v=0$ nebo $\eta=0$) a těch moc není $\Rightarrow$ většina tenzorů není jednoduchých!