Symetrické a antisymetrické tenzory

— odpovídá $S^pU \subseteq \otimes^p U$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\otimes^p U, V) & \overset{sym}{\supseteq} & \mathrm{Hom}(S^pU, V) \\ \wr\wr & & \wr\wr \\ \mathrm{Lin}_p(U,\dots,U;V) & \overset{sym}{\supseteq} & \mathrm{Lin}_p(U,\dots,U;V)_{sym} \end{array} \Rightarrow S^pU \text{ je} \dots$$

kvocient

$$\begin{tikzcd} \otimes^p U \arrow[r] \arrow[d, "pr"'] & V \\ S^pU \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

Definice. Řekneme, že p-lineární zobrazení $\Phi : U\times\dots\times U \to V$ je **symetrické**, jestliže pro každou permutaci $\sigma \in \Sigma_p$ platí

$$\Phi(u_{\sigma(1)},\dots,u_{\sigma(p)}) = \Phi(u_1,\dots,u_p)$$

$$\rho_\sigma : \otimes^p U \to \otimes^p U$$
$$u_1\otimes\dots\otimes u_p \mapsto u_{\sigma(1)}\otimes\dots\otimes u_{\sigma(p)}$$

$$\begin{array}{ccc} \Phi(u_{\sigma(1)},\dots,u_{\sigma(p)}) & = & \Phi(u_1,\dots,u_p) \\ \| & & \| \\ G(u_{\sigma(1)}\otimes\dots\otimes u_{\sigma(p)}) & & G(u_1\otimes\dots\otimes u_p) \end{array}$$

tj. budeme chtít $u_{\sigma(1)}\otimes\dots\otimes u_{\sigma(p)} - u_1\otimes\dots\otimes u_p \in \ker G$

Definice. Definujme **symetrickou mocninu** S^pU jakožto kvocient

$$S^pU = \otimes^p U / \mathrm{span}\{u_{\sigma(1)}\otimes\dots\otimes u_{\sigma(p)} - u_1\otimes\dots\otimes u_p \mid \sigma\in\Sigma_p,\ u_1,\dots,u_p\in U\}$$
$$= \mathrm{span}\{\rho_\sigma(t) - t \mid \sigma\in\Sigma_p,\ t\in\otimes^p U\}$$
$$= \sum \mathrm{im}(\rho_\sigma - id)$$

t lin. komb. $u_1\otimes\dots\otimes u_p$

$\rho_\sigma(t) - t$ lin. komb. $u_{\sigma(1)}\otimes\dots\otimes u_{\sigma(p)} - u_1\otimes\dots\otimes u_p$

Označme $pr : \otimes^p U \to S^pU$ kanonickou projekci

$$pr(u_1\otimes\dots\otimes u_p) = \text{třída } u_1\otimes\dots\otimes u_p =: u_1\vee\dots\vee u_p = u_1\cdots u_p$$

Protože
$$\begin{array}{ccc} pr(u_{\sigma(1)}\otimes\dots\otimes u_{\sigma(p)}) & \overset{\text{rozdíl } 0 \text{ v kvocientu}}{=} & pr(u_1\otimes\dots\otimes u_p) \\ \| & & \| \\ u_{\sigma(1)}\vee\dots\vee u_{\sigma(p)} & & u_1\vee\dots\vee u_p \end{array}$$

Př. $\mathbb{Z}/n = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}n$
$= \mathbb{Z}/(n=0)$

$2\cdot 3 = 1$ v $\mathbb{Z}/5$
$\quad 5+1$

je tento součin vektorů komutativní, lépe symetrický:

$$\begin{tikzcd} (u_1,\dots,u_p) \arrow[ddd, mapsto] & \Pi^p U \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "t"] \arrow[dd, bend right, "t^{sym}"', "sym\ p\text{-lin}"] & V \\ & \otimes^p U \arrow[ur, dashed, "\exists! G"] \arrow[d, "pr"] & \\ & S^pU \arrow[uur, dashed, "\exists! F"'] & \\ u_1\vee\dots\vee u_p & & \end{tikzcd}$$

Φ sym. p-lin.
$\Rightarrow$ ex. jediné G lineární a
$G(u_{\sigma(1)}\otimes\dots\otimes u_{\sigma(p)} - u_1\otimes\dots\otimes u_p) = 0$
$\Rightarrow$ ex. jediné F lineární
$F(u_1\vee\dots\vee u_p) = \Phi(u_1,\dots,u_p)$

$G(u_{\sigma(1)}\otimes\dots\otimes u_{\sigma(p)} - u_1\otimes\dots\otimes u_p)$
$= G(u_{\sigma(1)}\otimes\dots\otimes u_{\sigma(p)}) - G(u_1\otimes\dots\otimes u_p)$
$= \Phi(u_{\sigma(1)},\dots,u_{\sigma(p)}) - \Phi(u_1,\dots,u_p) \underset{\uparrow}{=} 0$
Φ symetrické

Reformulace. Zobrazení

$$\mathrm{Hom}(S^pU, V) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Lin}_p(U,\dots,U;V)_{sym}$$
$$F \longmapsto F\circ t^{sym}$$

je bijekce.

Poznámka. Dá se ukázat, že (S^pU) je kvocientem $(T^pU) = (T^p_0 U)$ podle ideálu $\Rightarrow$ je to opět algebra se součinem

$$\begin{tikzcd} T^pU\times T^qU \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "pr\times pr"] & T^{p+q}U \arrow[d, "pr"] \\ S^pU\times S^qU \arrow[r, dashed, "\vee"] & S^{p+q}U \end{tikzcd}$$

$(t,s) \longmapsto t\otimes s$
$(u_1\otimes\dots\otimes u_p, v_1\otimes\dots\otimes v_q) \longmapsto u_1\otimes\dots\otimes u_p\otimes v_1\otimes\dots\otimes v_q$

respektuje kvocient
tzn. lze definovat stejně na třídách
$(u_1\vee\dots\vee u_p, v_1\vee\dots\vee v_q) \mapsto u_1\vee\dots\vee u_p\vee v_1\vee\dots\vee v_q$

Označme $\underbrace{e_1\vee\dots\vee e_1}_{a_1\times}\vee\dots\vee\underbrace{e_n\vee\dots\vee e_n}_{a_n\times} = e_1^{a_1}\cdots e_n^{a_n}$

Označme $\underbrace{e_1 \vee \dots \vee e_1}_{a_1\times} \vee \dots \vee \underbrace{e_n \vee \dots \vee e_n}_{a_n\times} = e_1^{a_1} \dots e_n^{a_n}$

stejně na třídách $(u_1\vee\dots\vee u_p, v_1\vee\dots\vee v_q) \mapsto u_1\vee\dots\vee u_p \vee v_1\vee\dots\vee v_q$

$(u_2\otimes u_1 - u_1\otimes u_2)\otimes u_3 = u_2\otimes u_1\otimes u_3 - u_1\otimes u_2\otimes u_3$ ($\in$ ideál, $\in$ algebra)

Věta. $\{e_1^{a_1}\dots e_n^{a_n} \mid a_1+\dots+a_n = p\}$ tvoří bázi S^pU.

Důkaz. Je potřeba ukázat, že $F: S^pU \to V$ je jedn. určeno svými lib. hodnotami na $e_1^{a_1}\dots e_n^{a_n}$. Ekvivalentně $\Phi: U\times\dots\times U \to V$ symetrické p-lineární je jedn. určeno svými lib. hodnotami na $(e_1,\dots,e_1,\dots,e_n,\dots,e_n)$ ... tedy $(e_{i_1},\dots,e_{i_p})$ kde $i_1 \le \dots \le i_p$. □

$F(e_1^{a_1}\dots e_n^{a_n}) = F(e_1\vee\dots\vee e_n) = \Phi(e_1,\dots,e_n)$

$\Phi(e_1,e_1)$, $\Phi(e_1,e_2)$, $\Phi(e_2,e_2)$, atd

LD NE $\Phi(e_2,e_1) = \Phi(e_1,e_2)$

Příklad. $U = (\Bbbk^n)^*$ s bází $(f^1,\dots,f^n) = (x^1,\dots,x^n)$ ($x^i = f^i$ zobr. $x \mapsto x^i$)

$\Rightarrow$ $S^p(\Bbbk^n)^*$ má bázi $\underbrace{(x^1)^{a_1}\dots(x^n)^{a_n}}_{\text{monomy stupně } p}$ = homogenní polynomy stupně p

$S^p(\Bbbk^n)^* \cong \Bbbk^{(p)}[x^1,\dots,x^n]$

$\Rightarrow$ $S(\Bbbk^n)^* \cong \Bbbk[x^1,\dots,x^n]$ ... známe, z pohledu lin. alg. méně zajímavé

$x\cdot y = y\cdot x$ (S^2), $x\otimes y \neq y\otimes x$ ($\otimes^2$), symetrické tenzory = polynomy ($x\cdot y$)

Pozn. symetrie tenzorů $\neq$ symetrie polynomu

Pozn. $\otimes^pU \rightleftarrows S^pU$ $\Rightarrow$ S^pU je izomorfní podprostoru $S^pU \subseteq \otimes^pU$, viz cv.

Antisymetrické tenzory ← char $\Bbbk = 0$

Definice. Řekneme, že p-lineární zobrazení $\Phi: U\times\dots\times U \to V$ je antisymetrické (= alternující), jestliže pro každou permutaci $\sigma \in \Sigma_p$ platí

$$\Phi(u_{\sigma(1)},\dots,u_{\sigma(p)}) = \Phi(u_1,\dots,u_p)\cdot \operatorname{sign}\sigma$$

$$G(u_{\sigma(1)}\otimes\dots\otimes u_{\sigma(p)}) = G(u_1\otimes\dots\otimes u_p)\cdot\operatorname{sign}\sigma$$

$\mathrm{Lin}_p(U,\dots,U;V) \cong \mathrm{Hom}(\otimes^pU,V)$

$\cup \qquad \cup$

$\mathrm{Lin}_p(U,\dots,U;V)_{alt}$, $\mathrm{Hom}(\Lambda^pU,V)$

$\ni \Phi$, $\ni G$

tj. budeme chtít $u_{\sigma(1)}\otimes\dots\otimes u_{\sigma(p)} - u_1\otimes\dots\otimes u_p\cdot\operatorname{sign}\sigma \in \ker G$

Definice. Definujme antisymetrickou mocninu (= vnější mocnina) Λ^pU jakožto kvocient

$$\Lambda^pU = \otimes^pU / \operatorname{span}\{u_{\sigma(1)}\otimes\dots\otimes u_{\sigma(p)} - u_1\otimes\dots\otimes u_p\cdot\operatorname{sign}\sigma \mid \sigma\in\Sigma_p,\ u_1,\dots,u_p\in U\}$$

$$= \operatorname{span}\{\rho_\sigma(t) - t\cdot\operatorname{sign}\sigma \mid \sigma\in\Sigma_p,\ t\in\otimes^pU\} = \sum \operatorname{im}(\rho_\sigma - \mathrm{id}\cdot\operatorname{sign}\sigma)$$

Označme $pr: \otimes^pU \to \Lambda^pU$ kanonickou projekci

$pr(u_1\otimes\dots\otimes u_p) =$ třída $u_1\otimes\dots\otimes u_p =: u_1\wedge\dots\wedge u_p$ (wedge)

$u_1\otimes\dots\otimes u_p\otimes v_1\otimes\dots\otimes v_q$, $v_1\otimes\dots\otimes v_q\otimes u_1\otimes\dots\otimes u_p$

$t\in\Lambda^pU$, $s\in\Lambda^qU$: $t\wedge s = (-1)^{p\cdot q}\, s\wedge t$ graduovaně komutativní

Protože $pr(u_{\sigma(1)}\otimes\dots\otimes u_{\sigma(p)}) \overset{\text{rozdíl 0 v kvocientu}}{=} pr(u_1\otimes\dots\otimes u_p\cdot\operatorname{sign}\sigma)$

$$u_{\sigma(1)}\wedge\dots\wedge u_{\sigma(p)} = u_1\wedge\dots\wedge u_p\cdot\operatorname{sign}\sigma$$

je tento součin vektorů antikomutativní, lépe antisymetrický:

$$\begin{tikzcd}
\Pi^pU \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "t"] \arrow[dd, bend right, "t^{alt}\ \text{antisym. p-lin}"'] & V \\
\otimes^pU \arrow[ur, dashed, "\exists! G"] \arrow[d, "pr"] & \\
\Lambda^pU \arrow[uur, dashed, "\exists! F"'] &
\end{tikzcd}$$

$(u_1,\dots,u_p) \mapsto u_1\wedge\dots\wedge u_p$

Φ antisym. p-lin.

$\Rightarrow$ ex. jediné G lineární a

$G(u_{\sigma(1)}\otimes\dots\otimes u_{\sigma(p)} - u_1\otimes\dots\otimes u_p\cdot\operatorname{sign}\sigma) = 0$

$\Rightarrow$ ex. jediné F lineární

$F(u_1\wedge\dots\wedge u_p) = \Phi(u_1,\dots,u_p)$

$u_1 \wedge \dots \wedge u_p$

Reformulace Zobrazení

$$\mathrm{Hom}(\Lambda^p U, V) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Lin}_p(U, \dots, U; V)_{alt}$$
$$F \longmapsto F \circ t^{alt}$$

je bijekce.

Věta. $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p} \mid i_1 < \dots < i_p\}$ tvoří bázi $\Lambda^p U$.

Důkaz. Je potřeba ukázat, že $F: \Lambda^p U \to V$ je jedn. určeno svými lib. hodnotami na $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$. Ekvivalentně $\Phi: U \times \dots \times U \to V$ antisymetrické p-lineární je jedn. určeno svými lib. hodnotami na $(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$, kde $i_1 < \dots < i_p$.

Nová ingredience: $\Phi(\dots, e_j, e_i, \dots) = (-1) \cdot \Phi(\dots, e_i, e_j, \dots) \Rightarrow$ nulová hodnota. □

prohození = transpozice $\Rightarrow$ znaménko (-1)

$u \wedge u = (-1) \cdot u \wedge u$

$2 \cdot u \wedge u = 0 \overset{\mathrm{char} \neq 2}{\Longrightarrow} u \wedge u = 0$

S posledním řádkem se váže: $u_1 \wedge \dots \wedge u_p = 0$ pokud $u_i = u_j$ pro nějaké $i \neq j$.

Věta. $u_1 \wedge \dots \wedge u_p = 0 \iff$ vektory $u_1, \dots, u_p$ jsou lineárně závislé.

Důkaz. Nechť jsou $u_1, \dots, u_p$ lin. záv., například $u_p = a^1 u_1 + \dots + a^{p-1} u_{p-1}$

$t^{alt}(u_1, \dots, u_{p-1}, a^1 u_1 + \dots + a^{p-1} u_{p-1})$

$$\Rightarrow u_1 \wedge \dots \wedge u_{p-1} \wedge u_p = u_1 \wedge \dots \wedge u_{p-1} \wedge (a^1 u_1 + \dots + a^{p-1} u_{p-1})$$
$$= a^1 \cdot u_1 \wedge \dots \wedge u_{p-1} \wedge u_1 + \dots + a^{p-1} u_1 \wedge \dots \wedge u_{p-1} \wedge u_{p-1}$$
$$= 0 \quad \text{(vždy jeden vektor dvakrát)}$$

Nechť jsou $u_1, \dots, u_p$ lin. nezáv. a doplníme je do báze $u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n$. Pak $u_1 \wedge \dots \wedge u_p$ je jeden z bázových vektorů $\Lambda^p U \Rightarrow$ je nenulový □

$\Rightarrow \dim \Lambda^p U = \binom{n}{p}$, zejména

$\dim \Lambda^p U = \#\{i_1 < \dots < i_p\}$
$= \#\{p\text{-prvková podmn. } \{1, \dots, n\}\}$
$= \binom{n}{p}$

- $\Lambda^p U = 0$ pokud $p > \dim U$
- $\Lambda^n U$ má dimenzi 1 pro $n = \dim U$
  $\ni e_1 \wedge \dots \wedge e_n$ generátor

Věta. $\varphi: U \to V$ lin. zobr. $\alpha = (e_1, \dots, e_n)$ báze U, $\bar{\alpha} = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ báze V

$$\Rightarrow \Lambda^n \varphi(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) = \det(\varphi)_{\bar{\alpha}\alpha} \cdot \bar{e}_1 \wedge \dots \wedge \bar{e}_n$$

nemusí být báze

$$\begin{tikzcd}
\Pi^n U \arrow[r, "\Pi^n \varphi"] \arrow[d, "t"'] & \Pi^n V \arrow[d, "t"] \\
\otimes^n U \arrow[r, dashed, "\otimes^n \varphi"] \arrow[d, "pr"'] & \otimes^n V \arrow[d, "pr"] \\
\Lambda^n U \arrow[r, dashed, "\Lambda^n \varphi"] & \Lambda^n V
\end{tikzcd}$$

$e_1 \wedge \dots \wedge e_n \in \Lambda^n U$, $\quad \bar{e}_1 \wedge \dots \wedge \bar{e}_n \in \Lambda^n V$

$$\otimes^n \varphi(u_1 \otimes \dots \otimes u_n) = \varphi(u_1) \otimes \dots \otimes \varphi(u_n)$$

$$\Lambda^n \varphi(u_1 \wedge \dots \wedge u_n) = \varphi(u_1) \wedge \dots \wedge \varphi(u_n)$$

Důkaz. Jedná se o výpočet:

$$\varphi(u) = \sum \underbrace{a^i_j u^j}_{A \cdot [u]_\alpha} \cdot \bar{e}_i \qquad \varphi(e_1) = \sum a^i_j \delta^j_1 \bar{e}_i = \sum a^i_1 \bar{e}_i$$

$A = (\varphi)_{\bar{\alpha}\alpha}$

$$\Lambda^n \varphi(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) \overset{\text{"def"}}{=} \varphi(e_1) \wedge \dots \wedge \varphi(e_n)$$
$$= \left(\sum_{i_1} a^{i_1}_1 \bar{e}_{i_1}\right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{i_n} a^{i_n}_n \bar{e}_{i_n}\right)$$
$$= \sum a^{i_1}_1 \cdots a^{i_n}_n \; \bar{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{i_n} \qquad i_1 = \sigma(1), \dots, i_n = \sigma(n)$$

$$= \Big(\sum_{i_1} a_1^{i_1}\bar e_{i_1}\Big)\wedge\dots\wedge\Big(\sum_{i_n} a_n^{i_n}\bar e_{i_n}\Big)$$

$(\varphi)_{\bar\alpha\alpha}$

$$= \sum_{i_1,\dots,i_n} a_1^{i_1}\cdots a_n^{i_n}\;\bar e_{i_1}\wedge\dots\wedge\bar e_{i_n} \qquad \underbrace{i_1=\sigma(1),\dots,i_n=\sigma(n)}_{\text{jinak}\ \bar e_{i_1}\wedge\dots\wedge\bar e_{i_n}=0}$$

$$= \sum_{\sigma} a_1^{\sigma(1)}\cdots a_n^{\sigma(n)}\;\bar e_{\sigma(1)}\wedge\dots\wedge\bar e_{\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma} a_1^{\sigma(1)}\cdots a_n^{\sigma(n)}\,\operatorname{sign}\sigma\cdot\;\bar e_1\wedge\dots\wedge\bar e_n$$

$$= \det\varphi\cdot\;\bar e_1\wedge\dots\wedge\bar e_n.$$

□

Důsledek. $\alpha=(e_1,\dots,e_n)$, $\bar\alpha=(\bar e_1,\dots,\bar e_n)$ báze U, $(e_1,\dots,e_n)=(\bar e_1,\dots,\bar e_n)\cdot P$ $\qquad \varphi=id$

$\Rightarrow e_1\wedge\dots\wedge e_n = \det P\cdot\;\bar e_1\wedge\dots\wedge\bar e_n$ $\qquad \dots\ P=(id)_{\bar\alpha\alpha}$

Důsledek. $\alpha=(e_1,\dots,e_n)$ báze U, $\varphi: U\to U$ operátor $\qquad \alpha=\bar\alpha$

$\Rightarrow \Lambda^n\varphi: \Lambda^n U\to\Lambda^n U$ je násobení číslem $\det\varphi=\det(\varphi)_{\alpha\alpha}$ nezávisle na α.

$e_1\wedge\dots\wedge e_n\longmapsto c\cdot e_1\wedge\dots\wedge e_n$ $\qquad \det(P^{-1}AP)=\det A$

$c\cdot$

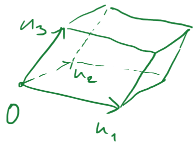
$\Rightarrow \det(\psi\circ\varphi)=\det\psi\cdot\det\varphi$

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^n U \arrow[r, "\Lambda^n\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\Lambda^n(\psi\circ\varphi)"'] & \Lambda^n U \arrow[r, "\Lambda^n\psi"] & \Lambda^n U
\end{tikzcd}$$

Objemy, orientace

Definice. Objemová forma na vektorovém prostoru U dimenze n je nenulová antisymetrická n-lineární forma

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Lin}_n(U,\dots,U;\mathbb{k})_{alt} & \cong & \mathrm{Hom}(\Lambda^n U,\mathbb{k}) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \mathrm{Vol} & \longleftrightarrow & \mathrm{vol} \end{array}$$



$\Rightarrow$ $\mathrm{Vol}(u_1,\dots,u_n) = \mathrm{vol}(u_1\wedge\dots\wedge u_n)$ ... orientovaný objem rovnoběžnostěnu určeného $u_1,\dots,u_n$

$\Rightarrow$ vol jednoznačně určeno lib. hodnotou

$$0 \neq \mathrm{vol}(e_1\wedge\dots\wedge e_n) = \mathrm{Vol}(e_1,\dots,e_n) \quad \dots \quad (e_1,\dots,e_n) \text{ báze } U$$

Díky předchozímu: $(u_1,\dots,u_n) = (e_1,\dots,e_n)\cdot P$ — matice souřadnic vektorů $u_1,\dots,u_n$ vzhledem k bázi $e_1,\dots,e_n$

$P = \big((u_1)_\alpha \ \cdots \ (u_n)_\alpha\big)$

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(u_1,\dots,u_n) &= \mathrm{vol}(u_1\wedge\dots\wedge u_n) = \mathrm{vol}(\det P\cdot e_1\wedge\dots\wedge e_n) \\ &= \det P\cdot \mathrm{vol}(e_1\wedge\dots\wedge e_n) \\ &= \det P\cdot \mathrm{Vol}(e_1,\dots,e_n) \end{aligned}$$

Příklad. Standardní objemovou formou na $\mathbb{k}^n$ rozumíme tu, pro kterou $\mathrm{Vol}(\underbrace{e_1,\dots,e_n}_{\text{std. báze } \mathbb{k}^n}) = 1$. Pak

$$\mathrm{Vol}(u_1,\dots,u_n) = \det(u_1 \cdots u_n).$$

Nechť $\varphi: U\to U$ je operátor. Pak

$$\mathrm{Vol}(\varphi(u_1),\dots,\varphi(u_n)) = \det\varphi\cdot \mathrm{Vol}(u_1,\dots,u_n)$$

tj. zobrazení φ zvětšuje orientovaný objem $\det\varphi$-krát.

orientovaný objem = orientovaný + objem

$$\mathrm{Vol}(u_1,\dots,u_n) = \mathrm{sign}\,\mathrm{Vol}(e_1,\dots,e_n)\cdot|\mathrm{Vol}(e_1,\dots,e_n)|$$

Definice. Orientace reálného vektorového prostoru U je zobrazení

$$\mathrm{sign}: \{\text{báze } U\} \longrightarrow \{\pm 1\}$$

splňující $\bar\alpha = \alpha\cdot P \Rightarrow \mathrm{sign}\,\bar\alpha = \mathrm{sign}\det P\cdot \mathrm{sign}\,\alpha$

$\bar e_1\wedge\dots\wedge\bar e_n = c\cdot e_1\wedge\dots\wedge e_n$ pro $c>0$ resp. $c<0$

Podrobněji ... $\mathrm{sign}\,\bar\alpha = \mathrm{sign}\,\alpha$ pro souhlasně orientované báze

$\mathrm{sign}\,\bar\alpha = -\,\mathrm{sign}\,\alpha$ pro opačně orientované báze

Pozn. souhlasná orientace $\longrightarrow$ rozklad na dvě třídy, sign = označení $\begin{cases}\text{kladné báze}\\ \text{záporné báze}\end{cases}$

Příklad. • $\mathbb{R}^n$ má standardní orientaci danou tím, že standardní báze je kladná: $\operatorname{sign}(e_1, \dots, e_n) = +1$.

• Komplexní vektorový prostor U chápaný jako reálný vektorový prostor $U^{\mathbb{R}}$ má standardní orientaci danou:

$(e_1, \dots, e_n)$ báze U $\Rightarrow$ $(e_1, \dots, e_n, i\cdot e_1, \dots, i\cdot e_n)$ kladná báze $U^{\mathbb{R}}$

• Vektorový prostor dimenze 0, tj. $0 = \{0\}$ má jedinou bázi a ta může být pořád kladná nebo záporná.

Orientovaný euklidovský prostor

Nechť U je or. eukl. pr., $\alpha = (e_1, \dots, e_n)$, $\bar{\alpha} = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ dvě kladné ortonormální báze. Pak $\bar{\alpha} = \alpha \cdot P$ a P má:

- $\det P > 0$ protože $\bar{\alpha}, \alpha$ mají souhlasnou orientaci
- $|\det P| = 1$ protože P je ortogonální $(P^* P = E \Rightarrow |\det P|^2 = 1)$

$\Rightarrow \det P = 1$.

Definujme kanonickou objemovou formu požadavkem

$$\operatorname{Vol}(e_1, \dots, e_n) = 1 \quad \text{pro libovolnou kladnou ortonormální bázi}$$

$$\left(\Rightarrow \operatorname{Vol}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n) = \det P \cdot \operatorname{Vol}(e_1, \dots, e_n) = \operatorname{Vol}(e_1, \dots, e_n)\right)$$

Nechť $(u_1, \dots, u_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot P \quad \Rightarrow \quad P = \left((u_1)_\alpha \cdots (u_n)_\alpha\right) = \left(f^i(u_j)\right)$

Pak

$$\operatorname{Vol}(u_1, \dots, u_n) = \det P \cdot \operatorname{Vol}(e_1, \dots, e_n) = \det P$$

$$\operatorname{Vol}(u_1, \dots, u_n)^2 = \det P^T \cdot \det P = \det(P^T \cdot P)$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} (u_1)_\alpha^T \\ \vdots \\ (u_n)_\alpha^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (u_1)_\alpha & \cdots & (u_n)_\alpha \end{pmatrix}\right)$$

$$\underbrace{= \det \underbrace{\begin{pmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \cdots & \langle u_1, u_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle u_n, u_1 \rangle & \cdots & \langle u_n, u_n \rangle \end{pmatrix}}_{\text{Gramova matice}}}_{\text{Gramův determinant}} = \det(\langle u_i, u_j \rangle)$$

Věta. • $\operatorname{Vol}(u_1, \dots, u_n) = \det(f^i(u_j))$ v lib. kl. ortonorm. bázi ... znaménko

• $\operatorname{Vol}(u_1, \dots, u_n)^2 = \det(\langle u_i, u_j \rangle)$ nezávislé na orientaci

Pozn. Gramův–Schmidtův ortogonalizační proces

$(u_1, \dots, u_n) \rightsquigarrow \underset{\text{ortogonální}}{(v_1, \dots, v_n)}$ $\qquad v_i = u_i + \text{lin. komb. } u_1, \dots, u_{i-1}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det P = 1$$

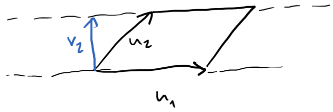
$$\Rightarrow \operatorname{Vol}(u_1, \dots, u_n)^2 = \operatorname{Vol}(v_1, \dots, v_n)^2$$

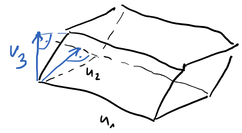
$$\Rightarrow \quad Vol(u_1, \dots, u_n)^2 = Vol(v_1, \dots, v_n)^2$$

$$= \det \begin{pmatrix} |v_1|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |v_n|^2 \end{pmatrix} = |v_1|^2 \cdots |v_n|^2$$

$$\Rightarrow \quad |Vol(u_1, \dots, u_n)| = |v_1| \cdots |v_n| = \text{objem rovnoběžnostěnu}$$

je to fakt objem?





Geometrie v orientované euklidovské rovině.

$$Vol(u,v)^2 = \det \begin{pmatrix} \langle u,u \rangle & \langle u,v \rangle \\ \langle v,u \rangle & \langle v,v \rangle \end{pmatrix} = |u|^2 |v|^2 - (|u| \cdot |v| \cdot \cos\alpha)^2$$

$$= |u|^2 \cdot |v|^2 \cdot \sin^2\alpha$$

$$|Vol(u,v)| = |u| \cdot |v| \cdot \sin\alpha$$

Zavedeme orientovaný úhel $\measuredangle(u,v) \in (-\pi, \pi]$:

$$\cos\alpha = \frac{\langle u,v \rangle}{|u| \cdot |v|} \qquad \sin\alpha = \frac{Vol(u,v)}{|u| \cdot |v|}$$

$|v| = |u|$, $\measuredangle(u,v) = +90°$

$\Leftrightarrow$ násobení i

$=$ rotace o $+90°$

$\Rightarrow$ vektorový prostor nad $\mathbb{C}$: $(a + i \cdot b)\, u = a u + b v$

Naopak násobení komplexními čísly dá orientaci + sk. součin až na násobek

$$\measuredangle(u,v) = \arg\left(\frac{v}{u}\right) \qquad \frac{|v|}{|u|} = \left|\frac{v}{u}\right| = \text{relativní velikost}$$