Autonomní systémy v rovině

Př. Je dána rovnice

$$x'' + x = 0.$$

Označme $y = x'$. Pak

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x \end{aligned}}$$

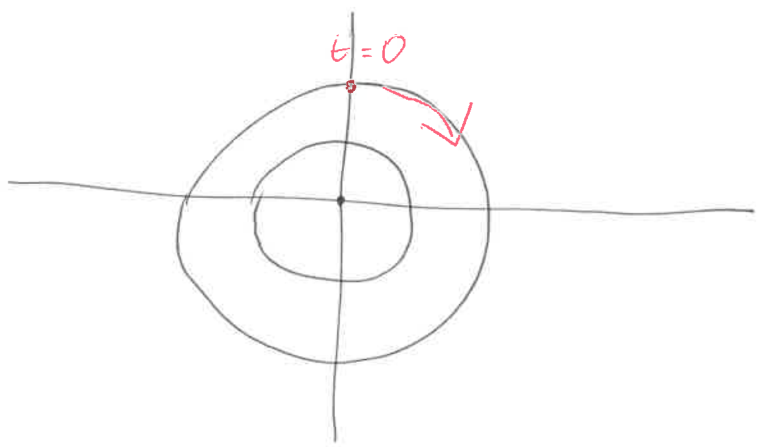
Řešením je vektorová fce $(x(t), y(t)) = (\sin t, \cos t)$

$(x(t), y(t)) = (0, 0)$ – počátek.

Toto řešení lze interpretovat jako křivku v rovině, která je dána parametricky s parametrem t. „trajektorie systému"

Všechny trajektorie:

- počátek
- $(c_1 \sin t + c_2 \cos t,\ c_1 \cos t - c_2 \sin t)$ … kružnice $r = c_1^2 + c_2^2$



Autonomní systém

$$(S)\qquad \begin{aligned} x' &= f(x,y) \\ y' &= g(x,y) \end{aligned}$$

f, g – spojité fce

- Řešení: vektorová fce $(x(t), y(t))$ … křivka v rovině zadaná parametricky s parametrem t

  trajektorie systému

  Proměnná t – čas, lze volit $t_0 = 0$.

  „Autonomní" – pravá strana nezávisí na t $\Rightarrow$

  jestliže $(x(t), y(t))$ je řešení (S) $\Rightarrow$ $(x(t+c), y(t+c))$ je řešení

- Singulární bod systému (S):

$$(*)\qquad \boxed{f(x_0, y_0) = 0 \quad a \quad g(x_0, y_0) = 0}$$

je řešením – systém má konstantní řešení – stav se nemění

singulární bod ≡ stacionární bod / rovnovážný stav

equilibrium

Kdy je stacionární bod stabilní nebo nestabilní se změnou času?

- Linearizace systému: PS v (S) ⇝ Taylorův polynom + (*)

$$x' = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$y' = g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Označme

$$u = x - x_0 \,, \quad v = y - y_0$$

parciální derivace v (x_0, y_0) jako čísla a, b, c, d.

Pak linearizovaný systém k (S)

$$u' = au + bv$$

$$v' = cu + dv$$

lineární autonomní systém v rovině