Autonomní systémy v rovině

Př. Je dána rovnice

$$x'' + x = 0.$$

Označme $y = x'$. Pak

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x \end{aligned}}$$

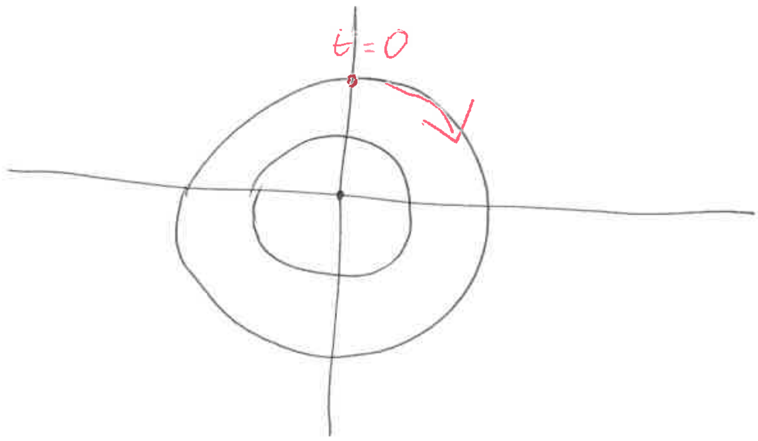
Řešením je vektorová fce $(x(t), y(t)) = (\sin t, \cos t)$

$(x(t), y(t)) = (0, 0)$ – počátek

Toto řešení lze interpretovat jako křivku v rovině, která je dána parametricky s parametrem t. „trajektorie systému"

Všechny trajektorie:

- počátek
- $(c_1 \sin t + c_2 \cos t,\ c_1 \cos t - c_2 \sin t)$ ... kružnice $r = c_1^2 + c_2^2$



Autonomní systém

$$(S) \qquad \begin{aligned} x' &= f(x,y) \\ y' &= g(x,y) \end{aligned}$$

f, g – spojité fce

- Řešení: vektorová fce $(x(t), y(t))$ ... křivka v rovině zadaná parametricky s parametrem t

trajektorie systému

Proměnná t – čas, lze volit $t_0 = 0$.

„Autonomní" – pravá strana nezávisí na t $\Rightarrow$

jestliže $(x(t), y(t))$ je řešení $(S) \Rightarrow (x(t+c), y(t+c))$ je řešení

- Singulární bod systému (S):

$$(*) \qquad \boxed{f(x_0, y_0) = 0 \quad a \quad g(x_0, y_0) = 0}$$

$f = 0$ ... $\vec{x}$-nulklina
$g = 0$ ... y-nulklina

je řešením – systém má konstantní řešení – stav se nemění

singulární bod ≡ stacionární bod / rovnovážný stav
equilibrium

Kdy je stacionární bod stabilní nebo nestabilní
se změnou času?

- Linearizace systému: PS v $(S) \leadsto$ Taylorův polynom + $(*)$

$$x' = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$
$$y' = g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Označme

$$u = x - x_0 \ , \ v = y - y_0$$

parciální derivace v (x_0, y_0) jako čísla a, b, c, d.

Pak linearizovaný systém k (S)

$$u' = au + bv$$

$$v' = cu + dv$$

lineární autonomní systém v rovině

matice $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$ nulový - pokud

Vlastní čísla a vlastní vektory

$\lambda \in \mathbb{C}$, x nenul. vektor $\quad Ax = \lambda x \quad$ λ - vlastní číslo matice A

$$Ax - \lambda x = 0 \iff (A - \lambda E)x = 0$$ x - vlastní vektor příslušný vl. číslu λ

$$|A - \lambda E| = 0$$ nalezení

charakteristická rovnice matice A

13.10.2020

Autonomní systémy v rovině: stacionární body

(S): $x' = f(x,y)$
$y' = g(x,y)$

Stacionární bod systému: $f(x_0,y_0)=0,\ g(x_0,y_0)=0$

x-nulklina: $f(x,y)=0$

y-nulklina: $g(x,y)=0$

Speciální případ (S): lineární systémy

stacionární bod

• nehomogenní (L_{nehom})

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + b_1 = 0$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y + b_2 = 0$$

Možné případy:

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right)$$

a) nemá řešení

$h(A) < h(\bar{A})$

b) nekonečně mnoho řešení

$h(A) = h(\bar{A}) = 1$

c) právě jedno řešení

$h(A) = h(\bar{A}) = 2$

Příklad. $\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases}$ každý bod je stacionární

$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 0 \end{cases}$ $x = t + c_1,\ y = c_2$ stacionární body: přímky

Nechť má (L_{nehom}) právě jeden stacionární bod (x_0, y_0).

Pak substituce

(*) $$\boxed{u = x - x_0 \qquad v = y - y_0}$$

$$\Downarrow$$

$u' = x'$, $v' = y'$; $x = u + x_0$

$$u' = a_{11} u + a_{11} x_0 + a_{12} v + a_{12} y_0 + b_1$$

$$v' = a_{21} u + a_{21} x_0 + a_{22} v + a_{22} y_0 + b_2$$

tj. dostáváme homogenní systém

(L) $$\begin{vmatrix} u' = a_{11} u + a_{12} v \\ v' = a_{21} u + a_{22} v \end{vmatrix} \qquad X' = AX$$

Stacionární bod systému (L): $[0,0]$ – je jediný

– přímka procházející počátkem

Shrnutí:

(S) (L_{nehom})	$\xrightarrow{(*)}$	(L)
stac. bod: (x_0, y_0)		$(0,0)$

Typy trajektorií:

Věta Systém (S) může mít trajektorie těchto typů:

1. Singulární body. Odpovídají konstantním řešením.
2. Uzavřené trajektorie (cykly). Odpovídají nekonstantním periodickým řešením.
3. Trajektorie, které samy sebe neprotínají.

Klasifikace stacionárních bodů systému (S) a (L)

Uvažujme počáteční problém: nechť (x, y) je řešení systému

$$(S) \quad \begin{aligned} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y) \end{aligned}$$

které splňuje počáteční podmínky $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$.

Předpokládejme, že řešení existuje a je jediné.

Stacionární bod $[x_0, y_0]$ se nazývá

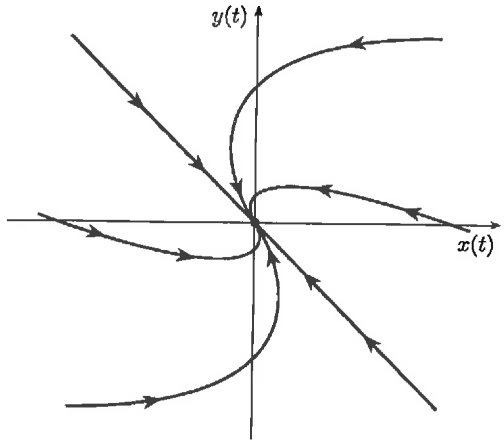
Uzel – všechny trajektorie z okolí bodu $[x_0, y_0]$ konvergují pro $t \to \pm\infty$ do tohoto bodu $[x_0, y_0]$ tak, že
- kolem $[x_0, y_0]$ nedochází k oscilacím

Ohnisko – –"–
- kolem $[x_0, y_0]$ dochází k oscilacím se zmenšující se amplitudou.

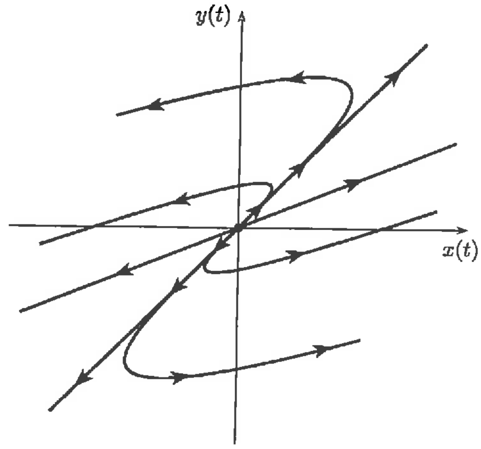
Sedlo – existuje konečný počet trajektorií, které pro $t \to \pm\infty$ konvergují k $[x_0, y_0]$

Střed – všechny trajektorie z okolí bodu $[x_0, y_0]$ jsou cykly, tj. uzavřené a obalují se okolo vnitřku $[x_0, y_0]$

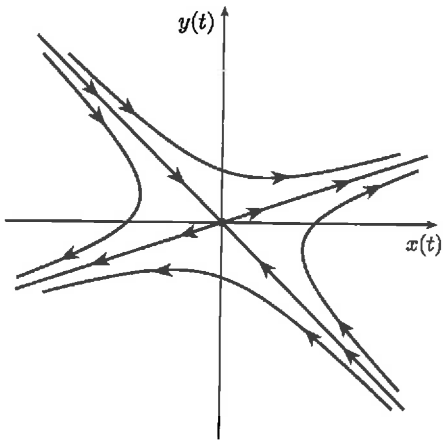
Bod rotace – každé okolí bodu $[x_0, y_0]$ obsahuje nekonečně mnoho cyklů



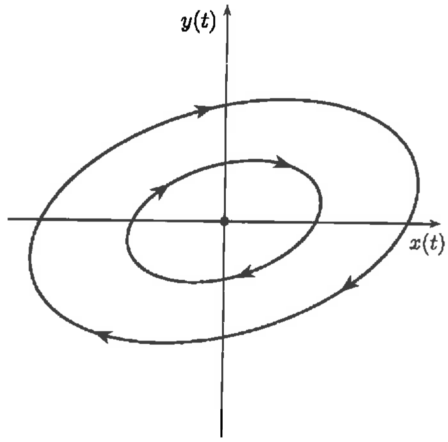
Obr. 1.6: stabilní uzel



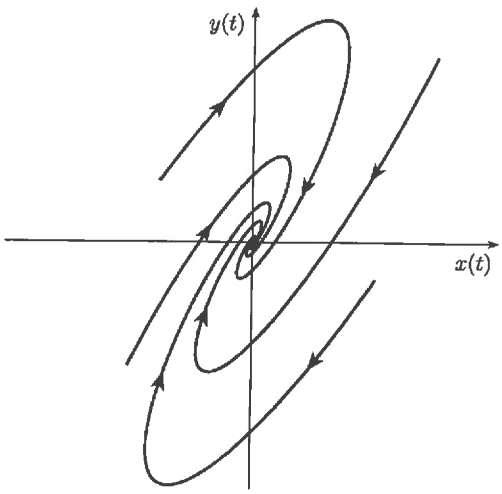
Obr. 1.7: nestabilní uzel



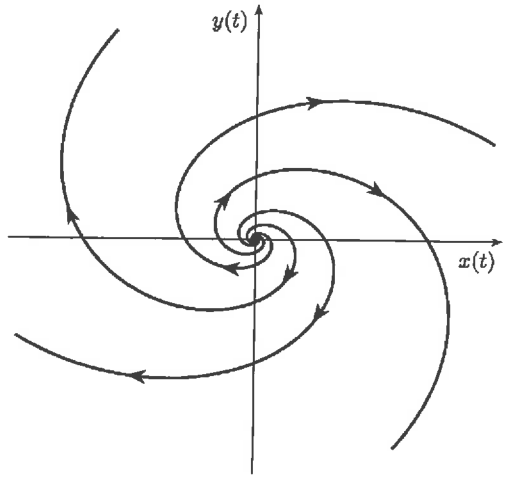
Obr. 1.8: sedlo



Obr. 1.9: střed



Obr. 1.10: stabilní ohnisko



Obr. 1.11: nestabilní ohnisko

Tím dostaneme systém

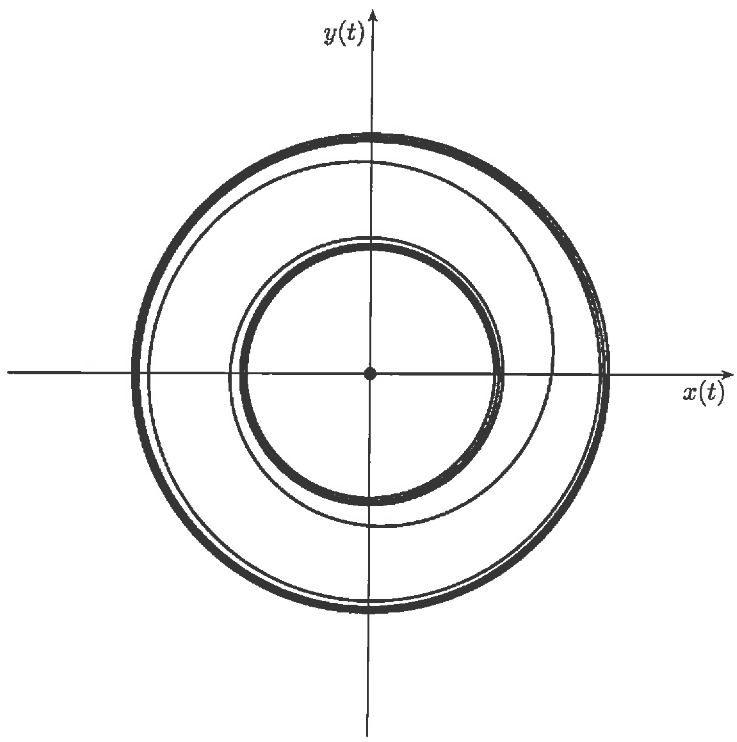
$$\begin{cases} u' = f_x(x_0, y_0)u + f_y(x_0, y_0)v \\ v' = g_x(x_0, y_0)u + g_y(x_0, y_0)v, \end{cases}$$

který je kýženou linearizací systému (1.4.2). V maticovém tvaru máme

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{1.4.3}$$

Matice tohoto lineárního systému se nazývá **Jacobiho matice** vyčíslená v bodě $[x_0, y_0]$ a typ stacionárního bodu $[x_0, y_0]$ zjistíme nalezením vlastních čísel této matice. Mají-li nenulovou reálnou část, stacionární bod lze klasifikovat, přičemž vlastní čísla odpovídají stejnému typu, jako u lineárních systémů.

Jsou-li ale vlastní čísla ryze imaginární, nelze tento stacionární bod tímto způsobem přesně klasifikovat. Tím se dostáváme k problémům spojeným s ryze imaginárními vlastními čísly u nelineárních systémů. Jediné, co můžeme o takovém bodě říct je, že je buď ohnisko, nebo střed, nebo bod rotace. Přesně klasifikovat takový bod vyžaduje náročnější techniky, kterým se v této práci bohužel věnovat nebudeme. Přesto v druhé kapitole narazíme na nelineární systém, ve kterém se uzavřené trajektorie vyskytují a v tom konkrétním případě si ukážeme, jak uzavřené trajektorie odhalit. Ilustrační obrázek bodu rotace lze vidět na obrázku 1.13.



Obrázek 1.13: Bod rotace

Určení typu stacionárních bodů pro lineární systémy

(podle vlastních čísel matice systému)

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $|A| \neq 0 \iff [0,0]$ je jediný stacion. bod

Vlastní čísla: $|A - \lambda E| = 0$ ... λ_1, λ_2

Případy:

1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ reálná různá

(L) $\to$ Jordanův kanonický tvar $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ $\quad u' = \lambda_1 u$, $v' = \lambda_2 v$

$u(t) = u_0 e^{\lambda_1 t}$, $v(t) = v_0 e^{\lambda_2 t}$

$u_0, v_0 \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{u(t)}{u_0}\right)^{\lambda_2} = e^{\lambda_1 \lambda_2 t} = \left(\frac{v(t)}{v_0}\right)^{\lambda_1}$

$v = k u^{\lambda_2/\lambda_1}$ .... mocninné fce

- $\operatorname{sgn} \lambda_1 = \operatorname{sgn} \lambda_2$ ... uzel $<$ nestabilní uzel $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$; stabilní uzel $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$
- opačné znaménko ... sedlo

2, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ a $h(A - \lambda E) = 1$

(L) $\rightarrow$ Jordanův kanonický tvar $u' = \lambda u + v$

$v' = \lambda v$

Trajektorie: $u = e^{\lambda t}(u_0 + v_0 t)$, $v = v_0 e^{\lambda t}$, uzel

3, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ a $h(A - \lambda E) = 0$ $\rightarrow$ $u' = \lambda u$, $v' = \lambda v$ $\Rightarrow$

Trajektorie: $v = k u$ uzel

4) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i \; , \beta \neq 0$

$$u' = \alpha u + \beta v \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$
$$v' = -\beta u + \alpha v$$

- $\alpha = 0$ ... kružnice   střed
- $\alpha \neq 0$ ... logaritmické spirály   ohnisko
  - $\alpha < 0$ ... stabilní ohnisko
  - $\alpha > 0$ ... nestabilní ohnisko

13

$p = a_{11} + a_{22} = \operatorname{Tr} A$

$q = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = \det A$

$q < 0$			sedlo
$q > 0$	$p > 0$	$4q \leq p^2$	nestabilní uzel
		$4q > p^2$	nestabilní ohnisko
	$p < 0$	$4q \leq p^2$	stabilní uzel
		$4q > p^2$	stabilní ohnisko
	$p = 0$		střed

Tabulka 1.1: Klasifikace stacionárních bodů podle stopy a determinantu matice A

Vlastní čísla matice: $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 0$

$\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$	$\lambda_{1,2} < 0$	stabilní uzel
	$\lambda_{1,2} > 0$	nestabilní uzel
	$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	sedlo
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$\alpha < 0$	stabilní ohnisko
	$\alpha > 0$	nestabilní ohnisko
	$\alpha = 0$	střed

Tabulka 1.2: Klasifikace stacionárních bodů podle vlastních čísel matice A