

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Diplomová práce

BRNO 2018

PŘEMYSL PLEVA



MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY



Autonomní systémy v rovině

Diplomová práce

Přemysl Pleva

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Zuzana Došlá, DSc.

Brno 2018

Bibliografický záznam

Autor:	Přemysl Pleva Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a statistiky
Název práce:	Autonomní systémy v rovině
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Učitelství matematiky pro střední školy
Vedoucí práce:	Prof. RNDr. Zuzana Došlá, DSc.
Akademický rok:	2016/2017
Počet stran:	xiii + 71
Klíčová slova:	Autonomní systémy; trajektorie; linearizace; fázový portrét; stacionární bod; Richardsonova teorie konfliktů; Lanchesterovy modely bitev; Zákon konkurenčního vyloučení; Lotkův-Volterrův model; Matematika manželských konfliktů

Bibliographic Entry

Author: Přemysl Pleva
Faculty of Science, Masaryk University
Department of mathematics and statistics

Title of Thesis: Plane autonomous systems

Degree Programme: Mathematics

Field of Study: Upper Secondary School Teacher Training in Mathematics

Supervisor: Prof. RNDr. Zuzana Došlá, DSc.

Academic Year: 2016/2017

Number of Pages: xiii + 71

Keywords: Autonomous systems; trajectory; linearization; phase portrait; stationary point; Richardson's theory of war; Lanchester's Power Laws; Competitive exclusion principle; Lotka-Volterra model; The Mathematics of marital conflicts

Abstrakt

V této diplomové práci se věnujeme soustavám dvou autonomních diferenciálních rovnic a jejich aplikacím. Teorii zavádíme intuitivním způsobem a důraz klademe na praktické využití teoretických poznatků. Těžiště práce je v aplikacích v reálném světě. Mezi nimi jsou čtyři klasické modely - Richardsonova teorie konfliktů, Lanchesterovy modely bitev, Zákon konkurenčního vyloučení a Lotkuv-Volterrův model. Navíc je zde zařazen model manželských konfliktů, který je v české literatuře nový.

Abstract

In this thesis we study systems of two autonomous differential equations and their applications. The theory is laid out in an intuitive form with emphasis on practical use of theoretical knowledge. The core of this thesis is in applications in the real world. Four classical models are included - Richardson's theory of war, Lanchester's Power Laws, Competitive exclusion principle and Lotka-Volterra model. Moreover, the model of marital conflicts is added, which is new in the czech literature.



ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Akademický rok: 2016/2017

Ústav: Ústav matematiky a statistiky
Student: Bc. Přemysl Pleva
Program: Matematika
Obor: Učitelství matematiky pro střední školy
Učitelství deskriptivní geometrie pro střední školy

Ředitel *Ústavu matematiky a statistiky* PŘF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje diplomovou práci s názvem:

Název práce: Autonomní systémy v rovině
Název práce anglicky: Autonomous systems in the plane

Oficiální zadání:

Vypracujte učební text zaměřený na autonomní diferenciální systémy v rovině (lineární i nelineární). Těžiště práce bude v aplikacích těchto systémů v reálném světě.

Literatura:

KALAS, Josef a Miloš RÁB. *Obyčejné diferenciální rovnice*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 1995. 207 s. ISBN 80-210-1130-0.

KALAS, Josef a Zdeněk POSPÍŠIL. *Spojité modely v biologii a.* 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2001. vii, 256 s. ISBN 80-210-2626-X.

TUNG, Ka-Kit. *Topics in Mathematical Modeling*, Princeton University Press, 2007

Jazyk závěrečné práce:

Vedoucí práce: prof. RNDr. Zuzana Došlá, DSc.

Konzultant: Mgr. Petr Liška, Ph.D.

Datum zadání práce: 7. 10. 2016

V Brně dne: 2. 11. 2016

Souhlasím se zadáním (podpis, datum):

Bc. Přemysl Pleva
student

prof. RNDr. Zuzana Došlá, DSc.
vedoucí práce

prof. RNDr. Jan Slovák, DrSc.
ředitel Ústavu matematiky a
statistiky

Poděkování

Děkuji prof. RNDr. Zuzaně Došlé, DSc. za námět diplomové práce a za cenné připomínky. Mnohé díky patří Mgr. Petru Liškovi, Ph.D., konzultantovi práce, za odborné vedení, četné konzultace, rady, pomoc při tvorbě obrázků a za ochotu tento text několikrát číst během jeho přepisování. Také děkuji svému bratrově Františku Plevovi a kamarádovi Mikuláši Michalovi za ochotu text přečíst a opravit překlepy.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji diplomovou práci vypracoval samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 10. května 2018

.....
Přemysl Pleva

Obsah

Úvod	xiii
Kapitola 1. Základy kvalitativní teorie autonomních systémů	1
1.1 Základní pojmy	1
1.2 Autonomní systémy	3
1.3 Lineární systémy	9
1.4 Nelineární systémy	18
Kapitola 2. Aplikace autonomních systémů	25
2.1 Richardsonova teorie konfliktů	25
2.2 Lanchesterovy modely bitev	32
2.3 Zákon konkurenčního vyloučení	40
2.4 Lotkův-Volterrův model dravec-kořist	48
2.5 Matematika manželských konfliktů	55
Závěr	69
Seznam použité literatury	71

Úvod

Nelineární diferenciální rovnice a jejich soustavy lze nalézt v mnoha oborech, jako například v biologii, fyzice, ekonomii a mnoha dalších. Často je velmi náročné, pokud ne zrovna nemožné, vyřešit danou diferenciální rovnici nebo soustavu rovnic. Není to proto, že by jednoduše známé postupy nefungovaly, ale protože repertoár standardních funkcí, pomocí kterých řešení vyjadřujeme, je příliš omezený na to, aby popsal rozmanitost chování řešení diferenciálních rovnic, se kterými se setkáváme v praxi. Dokonce i když řešení může být nalezeno, jeho vyjádření je často tak komplikované, že z něj vůbec nelze vyčíst jakékoliv jeho vlastnosti.

Tato práce předkládá úvod do kvalitativní teorie obyčejných diferenciálních rovnic, díky které mohou být jisté vlastnosti řešení určeny, aniž bychom rovnice přímo řešili. Především nás zajímá, zda-li řešení roste bez omezení nebo jestli se blíží k nějaké konečné limitě, zda-li existuje periodické řešení a jaký vliv na řešení mají koeficienty v rovnicích. Tato kvalitativní teorie obyčejných diferenciálních rovnic pochází z nezávislých prací dvou matematiků na přelomu 20. století - Alexandra Michailoviče Ljapunova a Henriho Poincaré.

Práce je rozdělena do dvou kapitol. První se věnuje zavedení pojmů a nástrojů potřebných pro druhou kapitolu, věnovanou aplikačním příkladům. Budeme se zabývat výhradně soustavami dvou rovnic o dvou neznámých funkcích, proto má práce název *Autonomní systémy v rovině*. První kapitola skutečně zavádí pouze nezbytnou teorii pro kapitolu druhou a nejsou v ní uvedeny příklady k procvičení. Kompletní výklad základů kvalitativní teorie, včetně všech vět a důkazů, lze nalézt například v [3] a [4], řešené i neřešené příklady lze nalézt v [8]. Tato práce se snaží o co nejpřesnější intuitivní výklad a její těžiště není ve zpracování teorie, nýbrž v aplikacích v reálném světě.

První příklad z druhé kapitoly je o mezinárodních vztazích mezi dvěma státy a klade otázku, kdy spolu dva státy budou válčit, sledujeme-li jejich zbrojení. Druhý příklad modeluje souboj dvou pozemních armád. Třetí příklad zkoumá koexistenci dvou populací na jednom území, nebo-li Darwinův zákon přírody „silnější přežije“. Čtvrtý příklad zkoumá také dvě populace na jednom území, ale tentokrát z pohledu kořist versus predátor. Poslední příklad ukazuje skutečnou moc matematiky. Přivádí nás na pole psychologie, kde by člověk matematiku (mimo statistiku) nečekal. Ukazuje vcelku jednoduchý model štěstí partnerů v manželství, přičemž tento model dal vzniknout teorii, která dokáže s 94 % přesností předpovědět rozpad svazku manželského.

Práce je vysázena systémem \LaTeX . Obrázky, pokud není uveden zdroj, jsou tvořeny pomocí balíčku `PSTricks`.

Kapitola 1

Základy kvalitativní teorie autonomních systémů

V této kapitole se seznámíme se základními pojmy a ukážeme si základní nástroje, které budeme využívat ve druhé kapitole. V první sekci si vysvětlíme, co myslíme slovy *dynamické systémy*, kterými se tato práce zabývá. Druhá sekce zavádí pojmy týkající se autonomních systémů. Třetí sekce pak vysvětluje zkoumání lineárních systémů a čtvrtá nelineárních systémů.

1.1 Základní pojmy

Budeme se zabývat dynamickými systémy. Systém je nějaký celek složený z částí, které na sebe navzájem působí. Dynamickým systémem myslíme systém, který se mění s časem. Zkoumat budeme právě *změnu* těchto systémů. Chceme-li ji zkoumat z pohledu matematiky, musíme ji vyjádřit jazykem matematiky. K tomu se hodí buď diferenční nebo diferenciální rovnice. Diferenční v případě, že změnu zkoumáme *po jednotlivých krocích*. Například budeme-li se každé ráno dívat na teploměr a zapisovat si venkovní teplotu, budeme mít záznam teplot s 24 hodinovými odstupy - záznam jednotlivých kroků. Kdybychom si ale teplotu zapisovali nepřetržitě, jednotlivé odstupy by se blížily k nule. V takovém případě nám lépe poslouží diferenciální rovnice. Zaměříme se na změnu spojitou a používat tedy budeme diferenciální rovnice.

Diferenciální rovnice zachycuje vztah mezi funkcí a jejími derivacemi. Například pro funkci

$$y(t) = \sin t$$

platí

$$y'(t) = \cos t,$$

$$y''(t) = -\sin t.$$

Můžeme tedy psát

$$y'' + y = 0$$

a hledat funkce $y(t)$ vyhovující této diferenciální rovnici druhého řádu. Nebo můžeme uvažovat funkci

$$y(t) = t^2,$$

pro kterou platí

$$y'(t) = 2t.$$

Můžeme psát

$$y' - 2t = 0$$

a hledat funkce $y(t)$ vyhovující této diferenciální rovnici prvního řádu.

V praxi je to pochopitelně tak, že jistými předpoklady a úvahami dojdeme k diferenciální rovnici a snažíme se najít všechny funkce, které ji vyhovují, aniž bychom nějaké řešení předem znali. Například, uvažujme jezero, ve kterém je $V [m^3]$ znečištěné vody, přičemž intenzita znečištění je $y [kg]$. Dále do jezera přitéká čistá voda rychlostí $r [m^3/s]$ a také z jezera stejnou rychlostí vytéká voda spolu s nečistotami. Otázkou je, kdy se jezero vyčistí? Nebo-li, kdy bude intenzita znečištění y nulová? Objem vody v jezeře je stále stejný, neboť voda přitéká a odtéká stejnou rychlostí. Úbytek nečistot v jezeře je pochopitelně daný množstvím nečistot, které z jezera odtékají. K tomu potřebujeme znát koncentraci nečistot v jezeře, která je dána vztahem y/V . Úbytek (změna) nečistot v jezeře je tedy dán diferenciální rovnicí

$$y' = -r \frac{y}{V}.$$

Kdybychom věděli, kolik nečistot bylo v jezeře na začátku, mohli bysme (po nalezení příslušného řešení diferenciální rovnice) určit, kdy bude jezero čisté.

Všimněme si, že v rovnici $y'' + y = 0$ nevystupuje nezávisle proměnná t (ta se často nazývá *čas*, protože zkoumáme systémy, které se vyvíjí v čase). Taková diferenciální rovnice se nazývá *autonomní*. V opačném případě, jak je tomu v rovnici $y' - 2t = 0$, mluvíme o rovnici *neautonomní*. Dále v textu se budeme zabývat výhradně rovnicemi autonomními.

Diferenciální rovnice mohou být buď obyčejné nebo parciální - podle toho, zda-li se v ní vyskytují parciální derivace či nikoliv. My budeme zkoumat pouze obyčejné diferenciální rovnice a pro úplnost si uvedeme přesnou definici:

Definice 1. Rovnici

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1.1.1)$$

kde

- F je funkce $n + 2$ proměnných, definovaná na nějaké množině G ,
 $G = I \times \Omega$, $I \subset \mathbb{R}$ je interval, $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$,
- $t \in I$ je nezávisle proměnná funkce $y = y(t)$,

nazýváme **obyčejnou diferenciální rovnicí n -tého řádu**.

Řešením této diferenciální rovnice je množina funkcí $y(t)$, mají všechny derivace až do řádu n , mohou nabývat jen hodnot patřících do G a po jejich dosazení do (1.1.1) musí být rovnice identicky rovna nule.

Řád diferenciální rovnice je roven nejvyššímu řádu derivace, která se v rovnici vyskytuje.

Nás budou zajímat především rovnice *prvního řádu* v konkrétním tvaru $y' = f(y)$. Rovnice v tomto tvaru se nazývají *rozřešené vůči derivaci*. Nebudeme se ovšem zabývat jednou samostatnou rovnicí, nýbrž soustavou dvou diferenciálních rovnic prvního řádu o dvou neznámých funkcích, tedy

$$\begin{cases} x' = f(x, y), \\ y' = g(x, y). \end{cases}$$

V soustavě dvou algebraických rovnic o dvou neznámých $x, y \in \mathbb{R}$ hledáme všechny dvojice čísel (x, y) , které vyhovují daným rovnicím. Podobně, v soustavě dvou diferenciálních rovnic o dvou neznámých funkcích $x(t), y(t)$ hledáme všechny dvojice funkcí (x, y) , které daným diferenciálním rovnicím vyhovují. Soustava diferenciálních rovnic se také nazývá **systém rovnic**.

Nebude nás zajímat přesné řešení daného systému. To je mnohdy velmi náročné, až nemožné najít. Bude nás zajímat, zda-li v daném systému existuje nějaký *stav*, který se s postupem času nemění - tzv. *rovnovážný stav*. Dále nás bude zajímat, co se stane, když systém z takového rovnovážného stavu trochu vychýlíme - jestli se do něj zpět vrátí, nebo ne.

1.2 Autonomní systémy

Definice 2. Soustavu dvou autonomních diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad (1.2.1)$$

kde f, g jsou spojité funkce dvou proměnných x, y definované na nějaké množině $M \subset \mathbb{R}^2$, se nazývá **autonomní systém v rovině**. Řešením takového systému je dvojice funkcí (x, y) , které mají na nějakém intervalu derivaci a po jejichž dosazení do (1.2.1) přejdou obě rovnosti v identitu.

Počáteční úloha pro systém (1.2.1) je úloha najít řešení (x, y) , splňující pro libovolná reálná čísla t_0, x_0, y_0 tzv. počáteční podmínky:

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, \\ y(t_0) &= y_0. \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Od teď až do konce této práce budeme předpokládat, že počáteční úloha je jednoznačně řešitelná. Příslušná tvrzení o existenci a jednoznačnosti řešení, spolu s jejich důkazy, lze najít v [3]. Pro naše účely stačí vědět, že mají-li funkce f a g v okolí bodu $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace, pak v okolí bodu t_0 existuje jediné řešení počáteční úlohy.

Autonomní systémy mají tu výhodu, že nezáleží, *kdy* se na systém díváme - změna systému nezávisí na čase t . To znamená, že je-li řešením systému (1.2.1) dvojice funkcí

$x = x(t), y = y(t)$, je řešením také dvojice funkcí $u = x(t + c), v = y(t + c)$, kde $c \in \mathbb{R}$ libovolné, neboť

$$\begin{aligned}u' &= x'(t + c) = f(x(t + c), y(t + c)) = f(u, v), \\v' &= y'(t + c) = g(x(t + c), y(t + c)) = g(u, v).\end{aligned}$$

Můžeme si to vyzkoušet na rovnicích

$$y'' + y = 0 \quad a \quad y' - 2t = 0.$$

Jedno z řešení rovnice $y'' + y = 0$ je funkce $y(t) = \sin t$. Vezmeme funkci $\sin(t + c)$ a dosadíme: $-\sin(t + c) + \sin(t + c) = 0$, tedy rovnost skutečně platí.

Nadruhou stranu, jedno z řešení rovnice $y' - 2t = 0$ je funkce $y(t) = t^2$. Vezmeme-li funkci $(t + c)^2$ a dosadíme, tak obdržíme: $2(t + c) \cdot 1 - 2t = 2c \neq 0$, pokud je $c \neq 0$.

Důsledkem je, že u autonomních rovnic nezáleží, v jakém čase klademe počáteční podmínku. Každé řešení autonomní rovnice (nebo soustavy rovnic) dostaneme vhodnou volbou počáteční podmínky v čase $t_0 = 0$.

Řešením počáteční úlohy (1.2.1) s počátečními podmínkami (1.2.2) je tedy dvojice funkcí $x(t), y(t)$, splňující $x(0) = x_0, y(0) = y_0$. Toto řešení můžeme chápat jako prostorovou křivku danou parametricky

$$\begin{aligned}x &= x(t), \\y &= y(t), \\z &= t,\end{aligned}$$

kde $t \in \mathbb{R}$. V každém bodě $[x, y, z] = [x(t), y(t), t]$ má tato parametrická křivka směrový vektor $(x'(t), y'(t), 1)$. Ten můžeme spočítat v každém bodě ze zadaných rovnic, i když řešení neznáme. Množina všech směrových vektorů všech řešení se nazývá **směrové pole**. Jedná se o analogické směrové pole jako pro jednu diferenciální rovnici prvního řádu.

Jiný - a pro nás důležitější - způsob, jak chápat řešení $x(t), y(t)$ systému (1.2.1), je jako křivky v rovině xy , jejichž body jsou dány souřadnicemi $[x(t), y(t)]$, tedy hodnotami funkcí x, y . Rovina xy se nazývá **fázová rovina** a jejím bodům $[x(t), y(t)]$ říkáme **stavy**. Máme-li dány počáteční podmínky $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$, je řešení $x(t), y(t)$ jednoznačně určeno, přičemž vždy můžeme brát $t_0 = 0$. Tak máme ve fázové rovině dán bod $X = [x_0, y_0]$. Jak bude t postupně růst (začne běžet čas), bude se bod $X = [x(t), y(t)]$ ve fázové rovině pohybovat po jisté dráze. Vykreslí tím rovinnou křivku, kterou nazýváme **trajektorie** řešení x, y . V principu je trajektorie kolmým průmětem prostorové křivky z první interpretace řešení. Stejně tak můžeme kolmo promítnout i směrové pole do fázové roviny - získáme tím směrové pole pro trajektorie. Přitom opět nemusíme znát funkce x a y , stačí znát $\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}$, což lze spočítat v každém bodě ze zadaných rovnic (1.2.1).

Abychom určili alespoň části trajektorií, nemusíme funkce x a y přímo znát. Na část trajektorie ve fázové rovině, kde každému x odpovídá pouze jedno y , můžeme pohlížet jako na funkci $y(x)$. Tuto funkci můžeme určit co by řešení diferenciální rovnice prvního řádu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}.$$

Problémy nastanou v bodech, kde je funkce f nulová (rovnice pak nemá smysl) a v singulárních bodech může být porušena jednoznačnost.

Definice 3. Orientovaná křivka

$$T = \{[x, y] : x = x(t), y = y(t), t \in I\},$$

kde dvojice funkcí $x(t), y(t)$ je řešením systému (1.2.1) na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, se nazývá **trajektorie** řešení $x(t), y(t)$.

Rovina xy , ve které trajektorie znázorňujeme, se nazývá **fázová rovina**.

Geometrická reprezentace trajektorií ve fázové rovině spolu s příslušným směrovým polem se nazývá **fázový portrét**.

Příklad 1. Určeme trajektorie autonomního systému

$$\begin{cases} x' = -y + 2 \\ y' = x + 1. \end{cases} \quad (1.2.3)$$

K tomu stačí určit řešení diferenciální rovnice

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = \frac{x+1}{2-y},$$

což je rovnice prvního řádu se separovanými proměnnými. Jejím řešením je množina implicitně daných funkcí:

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = r^2, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Pro $r \neq 0$ jde o množinu soustředných kružnic se středem v bodě $[-1, 2]$. Pro $r = 0$ definuje rovnice jediný reálný bod $[-1, 2]$. Tyto kružnice a bod jsou hledané trajektorie.

Příklad 2. Určeme trajektorie autonomního systému

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = x - y. \end{cases} \quad (1.2.4)$$

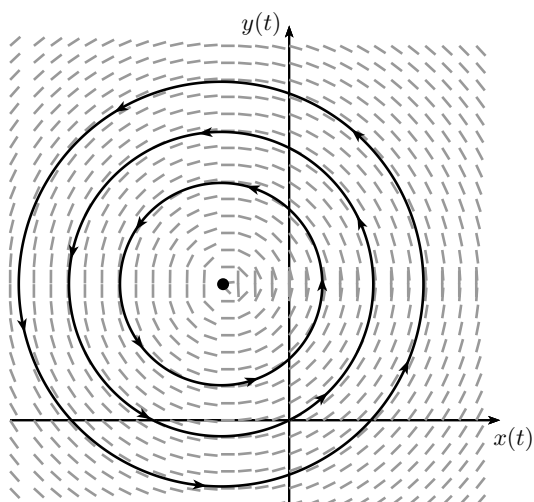
Postupujeme stejně jako v předešlém příkladu a řešíme rovnici v exaktním tvaru

$$(x-y) dx + (-x-2y) dy = 0.$$

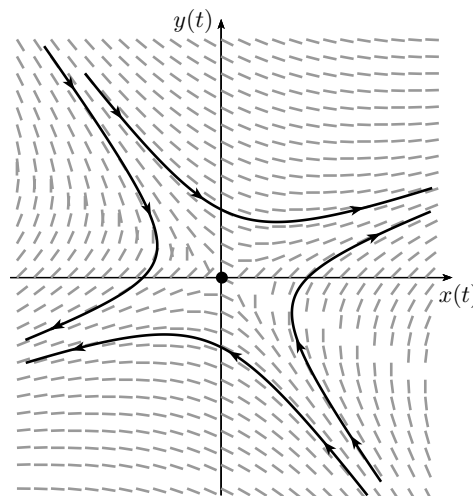
Řešením této rovnice je funkce v implicitním tvaru

$$x^2 - 2xy - 2y^2 = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Tato funkce definuje pro $c \neq 0$ množinu hyperbol a pro $c = 0$ dvě přímky. Tyto křivky jsou hledanými trajektoriemi.



Obrázek 1.1: Trajektorie systému 1.2.3



Obrázek 1.2: Trajektorie systému 1.2.4

Obrázky 1.1 a 1.2 zobrazují několik trajektorií spolu s odpovídajícími směrovacími poli. Na první pohled jsou mezi nimi vidět rozdíly. Na obrázku 1.1 jsou trajektorie uzavřené, kdežto na obrázku 1.2 nejsou. Podle obrázků to vypadá, že systém z druhého příkladu má tendenci dostat se do stavu $[0, 0]$, ale dřív než ho dosáhne, změni směr a už se k němu nevrátí, kdežto systém z prvního příkladu je v neustálém periodickém neklidu kolem stavu $[-1, 2]$. Hledání implicitní funkce, která trajektorie definuje, je velmi náročné a většinou je nutné využít numerické metody s pomocí počítače.

Vzhledem k tomu, že my se chceme soustředit na hledání rovnovážných stavů autonomních systémů a na chování systémů v okolí těchto bodů, je mnohem praktičtější hledat body $[x, y]$, ve kterých jsou derivace obou funkcí $x(t)$ a $y(t)$ nulové, než hledat všechny možné trajektorie. Pokud takový rovnovážný stav $[x_0, y_0]$ daného systému existuje, tzn. $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$, tak trajektorií řešení daného počáteční podmínkou $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, je jediný bod - **stacionární bod**. Uvědomme si, že v takovém případě je dvojice konstantních funkcí $x(t) = x_0, y(t) = y_0$ řešením daného autonomního systému. Parametrizací tohoto řešení obdržíme přímku v prostoru, kolmou na fázovou rovinu a procházející bodem $[x_0, y_0, 0]$.

Stacionární body nalezneme tak, že v systému

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y), \end{cases} \quad (1.2.5)$$

položíme $f(x, y) = 0, g(x, y) = 0$ a řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Řešením této soustavy je množina bodů, ve kterých jsou obě derivace funkcí x, y nulové. Takové body odpovídají konstantním řešením systému a jejich trajektorie jsou tvořeny jediným bodem.

Soustavu rovnic

$$f(x, y) = 0, \quad (1.2.6)$$

$$g(x, y) = 0 \quad (1.2.7)$$

Lze také interpretovat graficky, jako soustavu dvou implicitně daných funkcí $f = 0$ a $g = 0$. Grafem funkce $f = 0$ je množina bodů $[x, y]$, která se nazývá **x -nulklina** a grafem funkce $g = 0$ je množina bodů $[x, y]$, která se nazývá **y -nulklina**. Body x -nulkliny jsou stavy, ve kterých je v systému derivace funkce x nulová. To znamená, že trajektorie ve fázové rovině musí mít v těchto bodech směrový vektor rovnoběžný s osou y . Stačí si představit směrový vektor parametrizovaného řešení (tedy prostorové křivky)

$$\begin{aligned}x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= t\end{aligned}$$

v bodě, kde prostorová křivka protíná x -nulklinu. Tento vektor má souřadnice $(0, y'(t), 1)$. Vidíme, že vektor je rovnoběžný s rovinou yz a jeho kolmý průmět do roviny xy je tedy rovnoběžný s osou y .

Podobně body y -nulkliny jsou stavy, ve kterých je derivace funkce y nulová a tedy trajektorie mají v těchto bodech směrové vektory rovnoběžné s osou x .

Definice 4. Bod $[x_0, y_0]$, pro který platí

$$\begin{aligned}x' &= f(x_0, y_0) = 0, \\ y' &= g(x_0, y_0) = 0,\end{aligned}$$

se nazývá **stacionární bod** (nebo také rovnovážný bod, singulární bod, ekvilibrium) systému (1.2.1).

Množina bodů, ve kterých je $f(x, y) = 0$ se nazývá **x -nulklina**.

Množina bodů, ve kterých je $g(x, y) = 0$ se nazývá **y -nulklina**.

Uzavřenou trajektorii, která odpovídá nekonstantnímu periodickému řešení, nazýváme **cyklus**.

Příklad 3. Určeme nulkliny a stacionární body systému

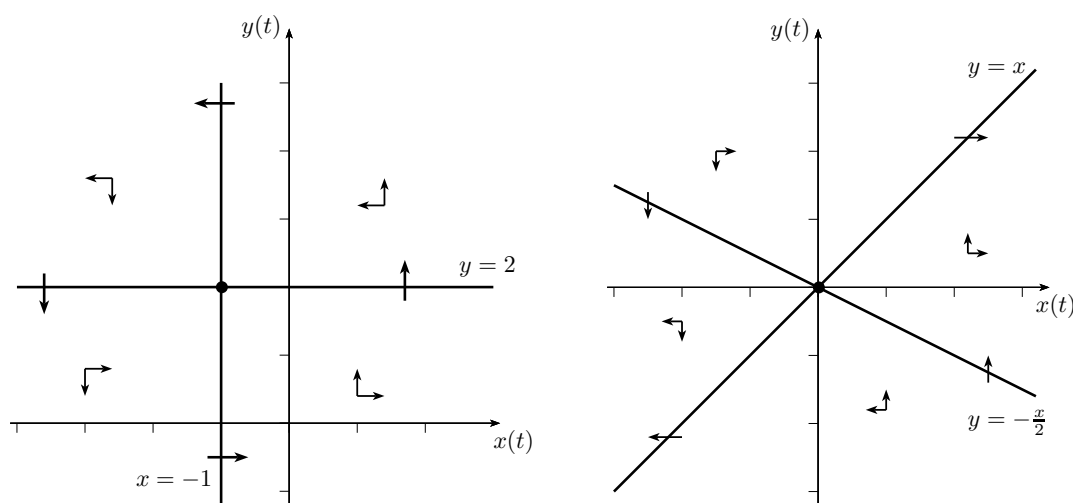
$$\begin{cases}x' = -y + 2 \\ y' = x + 1.\end{cases}$$

Rovnice $y = 2$ určuje x -nulklinu. Jedná se tedy o přímku kolmou na osu y , procházející bodem $[0, 2]$. Rovnice $x = -1$ určuje y -nulklinu a té odpovídá přímka kolmá na osu x , procházející bodem $[-1, 0]$. Stacionární bod je průsečík těchto nulklin, tedy bod $[-1, 2]$.

Příklad 4. Určeme nulkliny a stacionární body systému

$$\begin{cases}x' = x + 2y \\ y' = x - y.\end{cases}$$

Rovnice $y = -\frac{1}{2}x$ určuje x -nulklinu, což je opět přímka, tentokrát však se směrem $-\frac{1}{2}$ a procházející počátkem. Rovnice $y = x$ určuje y -nulklinu, což je také přímka, mající směr 1 a procházející počátkem. Stacionární bod je průsečík těchto přímek, tedy bod $[0, 0]$.



Obrázek 1.3: Nulkliny systému z příkladu 3 Obrázek 1.4: Nulkliny systému z příkladu 4

Na obrázcích 1.3 a 1.4 jsou zobrazeny nulkliny k předchozím příkladům. Každá x -nulklina rozdělí fázovou rovinu na oblasti, ve kterých funkce x buď roste, nebo klesá, ale v rámci jedné oblasti nemůže klesat a růst zároveň (to by musela její derivace měnit znaménko a v jistém bodě by musela být nulová - ale bodem, kde je derivace funkce x nulová, prochází x -nulklina!). Abychom věděli, jakým směrem trajektorie prochází skrz x -nulklinu, opatřili jsme ji na obou koncích šipkou. Analogicky jsme opatřili šipkami i y -nulklinu.

Obě nulkliny nám (v těchto konkrétních příkladech) rozdělily fázovou rovinu na čtyři oblasti. Směr trajektorií je dán lineární kombinací směrů funkcí x a y v každé z oblastí. Tyto směry znázorňujeme „dvojsšipkami“ v obrázcích.

Kdybychom věděli, jak se trajektorie chovají v blízkém okolí stacionárních bodů, mohli bychom je do obrázků 1.3 a 1.4 dokreslit i ručně. V tuto chvíli ale není z obrázku 1.3 jasné, zda-li jsou trajektorie uzavřené křivky, nebo se ke stacionárnímu bodu spirálovitě přibližují či oddalují. Klasifikace stacionárních bodů, podle kvalitativního chování trajektorií v jejich okolí, je předmětem příští podkapitoly.

Výhodou tohoto způsobu zkoumání trajektorií (a především rovnovážných stavů) je, že k němu nepotřebujeme výpočetní techniku, i když jsou funkce f a g v zadaných systémech složitější - například nelineární.

Na závěr této podkapitoly se zamysleme, zda-li se mohou dvě trajektorie dvou různých řešení x_1, y_1 a x_2, y_2 systému (1.2.1) křížit. Znamenalo by to, že pro nějaké $t_1, t_2 \geq 0$ platí

$$x_1(t_1) = x_2(t_2) \quad a \quad y_1(t_1) = y_2(t_2).$$

Dvojice funkcí

$$\begin{aligned} u(t) &= x_1(t + (t_1 - t_2)), \\ v(t) &= y_1(t + (t_1 - t_2)), \end{aligned}$$

je také řešením systému (1.2.1), neboť se jedná o systém autonomní, a trajektorie řešení x_1, y_1 a u, v splývají. Ukážeme-li, že splývají i trajektorie řešení x_2, y_2 s trajektoriami řešení u, v , musejí pak splývat i trajektorie řešení x_1, y_1 s x_2, y_2 .

Nechť jsou funkce u, v řešením systému s počátečními podmínkami v čase t_2 . Platí tedy

$$\begin{aligned}u(t_2) &= x_1(t_1), \\v(t_2) &= y_1(t_1).\end{aligned}$$

Zároveň však platí

$$\begin{aligned}x_1(t_1) &= x_2(t_2) = u(t_2), \\y_1(t_1) &= y_2(t_2) = v(t_2).\end{aligned}$$

Díky předpokladu o jednoznačné řešitelnosti systému rovnic musí řešení x_2, y_2 a u, v splývat. Tím pádem splývají i jejich trajektorie.

Na základě dosavadních úvah můžeme všechny možné trajektorie autonomních systémů rozdělit do tří skupin:

- stacionární body (trajektorie odpovídající konstantnímu řešení),
- cykly (trajektorie odpovídající nekonstantnímu periodickému řešení),
- trajektorie, které samy sebe neprotínají.

1.3 Lineární systémy

V této podkapitole se budeme věnovat výhradně lineárním systémům. Budeme hledat jejich stacionární body a budeme zkoumat, jak se chovají trajektorie v jejich blízkosti. To nás dovede k základní klasifikaci stacionárních bodů.

Definice 5. Systém rovnic

$$\begin{cases}x' = a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\y' = a_{21}x + a_{22}y + b_2,\end{cases} \quad (1.3.1)$$

kde $a_{ij}, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, se nazývá **lineární autonomní systém s konstantními koeficienty**.

Počet stacionárních bodů lineárního systému (1.3.1) závisí na počtu řešení soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned}a_{11}x + a_{12}y + b_1 &= 0 \\a_{21}x + a_{22}y + b_2 &= 0.\end{aligned}$$

Taková soustava má buď nula, právě jedno, nebo nekonečně mnoho řešení. Z lineární algebry víme, že soustava nehomogenních lineárních rovnic nemá žádné řešení právě tehdy, když matice soustavy má menší hodnost než rozšířená matice soustavy. Protože my

chceme zkoumat lineární systémy pomocí stacionárních bodů, tak systémy bez nich nás dále zajímat nebudou. Například systém

$$\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$$

je mimo náš zájem.

Uvažujme nyní nějaký systém (1.3.1), který má právě jeden stacionární bod $[x_0, y_0]$. Zavedeme substituci

$$u = x - x_0, \quad v = y - y_0,$$

pro kterou platí

$$u' = x', \quad v' = y',$$

a dosadíme ji do systému (1.3.1). Po roznásobení obdržíme systém

$$\begin{aligned} u' &= a_{11}u + a_{12}v + \underbrace{a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + b_1}_{=0} \\ v' &= a_{21}u + a_{22}v + \underbrace{a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + b_2}_{=0}, \end{aligned}$$

ve kterém jsou výrazy nad svorkami nulové, protože bod $[x_0, y_0]$ je stacionární a původní rovnice systému (1.3.1) nuluje. Provedená substituce byla vlastně jen posunutí systému tak, aby jeho stacionární bod byl v počátku $[0, 0]$, přičemž chování systému v okolí stacionárního bodu zůstalo zachováno. Díky tomu se nám zjednoduší zápis, neboť každý systém rovnic, který není homogenní, lze uvedenou substitucí převést na systém homogenní. Lze se tedy obecně bavit o systémech

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \quad (1.3.2)$$

aniž bychom tím nějaké systémy vylučovali (pouze ty, které nemají stacionární bod, ale ty jsou mimo náš zájem). Často se používá tzv. maticový zápis lineárního systému:

$$X' = A \cdot X,$$

kde

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Matice $A = (a_{ij})$ se nazývá **matice lineárního systému**. Z lineární algebry víme, že je-li matice A regulární, tj. $|A| \neq 0$, pak existuje jediné řešení soustavy rovnic

$$A \cdot X = 0.$$

Jinými slovy, lineární systém (1.3.2) má jediný stacionární bod právě tehdy, když je jeho matice $A = (a_{ij})$ regulární. Nemá-li matice A regulární, má systém nekonečně mnoho stacionárních bodů, které dohromady tvoří přímku, nebo v krajním případě celou rovinu.

Příklad 5. Mějme systém rovnic

$$\begin{cases} x' = x + y - 3 \\ y' = x - y + 1. \end{cases}$$

Nulkliny tohoto systému jsou dvě přímky

$$y = -x + 3 \quad \text{a} \quad y = x + 1,$$

které se protínají v bodě $[1, 2]$. Tento systém má tedy jediný stacionární bod. Provedením substituce

$$u = x - 1, \quad v = y - 2,$$

převědeme původní systém se stacionárním bodem $[1, 2]$ na systém

$$\begin{cases} u' = u + v \\ v' = u - v \end{cases}$$

s jediným stacionárním bodem $[0, 0]$, přičemž kvalitativní chování je u obou systému stejné.

Příklad 6. Mějme systém rovnic

$$\begin{cases} x' = x + y - 1 \\ y' = 2x + 2y - 2, \end{cases}$$

Obě nulkliny tohoto systému splývají a tak má systém nekonečně mnoho stacionárních bodů, které tvoří přímku $y = -x + 1$. Z nekonečného množství stacionárních bodů můžeme vybrat jakýkoliv, třeba bod $[2, -1]$, provést substituci

$$u = x - 2, \quad v = y + 1,$$

kterou převědeme systém s přímkou stacionárních bodů $y = -x + 1$, jež neprochází počátkem, na systém

$$\begin{cases} u' = u + v \\ v' = 2u + 2v, \end{cases}$$

který má také přímku stacionárních bodů. Ta prochází počátkem a je rovnoběžná s původní přímkou.

Již jsme zmínili, že existuje ještě jedna možnost množiny stacionárních bodů. Totiž že každý bod fázové roviny je stacionární. To je ovšem vskutku singulární případ, neboť v takové situaci mají rovnice tvar

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0. \end{cases}$$

Takový systém se vůbec nemění, zůstává stále stejný a všechna jeho řešení tvoří přímky, které jsou kolmé na fázovou rovinu.

Doposud jsme se dozvěděli, že má-li systém právě jeden stacionární bod, lze jej vždy převést na systém se stacionárním bodem $[0,0]$, přičemž tyto dva systémy se chovají kvalitativně stejně. Existují-li nějaké další stacionární body, je jich nekonečně mnoho a dohromady tvoří přímku. V krajním případě jsou všechny body fázové roviny stacionární. Dále nás budou zajímat především systémy s **izolovanými stacionárními body**. To jsou body, pro které existuje takové okolí, že se v něm nenachází žádný jiný stacionární bod. Pro nás to znamená, že nás dále budou zajímat pouze lineární systémy s právě jedním stacionárním bodem $[0,0]$ (tedy ty systémy, jejichž matice A je regulární). Později, až se budeme bavit o nelineárních systémech, uvidíme, že daný systém může mít i více izolovaných stacionárních bodů.

Stacionární body lze klasifikovat podle toho, jak se chovají trajektorie v jejich blízkosti. Tato klasifikace se netýká pouze lineárních systémů, ale obecně všech autonomních systémů. Proto ji formulujeme pro stacionární bod $[x_0, y_0]$:

Uzel Bod $[x_0, y_0]$ nazýváme *uzel*, jestliže všechny trajektorie z nějakého okolí tohoto bodu konvergují pro $t \rightarrow \pm\infty$ do bodu $[x_0, y_0]$ a to tak, že kolem tohoto bodu nedochází k oscilacím.

Ohnisko Bod $[x_0, y_0]$ nazýváme *ohnisko*, jestliže všechny trajektorie z nějakého okolí tohoto bodu konvergují pro $t \rightarrow \pm\infty$ do bodu $[x_0, y_0]$ a to tak, že kolem tohoto bodu dochází k oscilacím se zmenšující se amplitudou.

Sedlo Bod $[x_0, y_0]$ nazýváme *sedlo*, jestliže v každém jeho okolí existuje pouze konečný počet trajektorií, které pro $t \rightarrow \pm\infty$ konvergují k tomuto bodu.

Bod rotace Bod $[x_0, y_0]$ nazýváme *bod rotace*, jestliže každé jeho okolí obsahuje nekonečně mnoho trajektorií, které jsou cykly. Pokud v nějakém jeho okolí existují pouze cykly, pak se tento bod nazývá **střed**.

Navíc, uzel a ohnisko nazýváme *stabilní*, pokud do něj všechny trajektorie konvergují pro $t \rightarrow \infty$, tedy pokud všechny trajektorie z nějakého jeho okolí směřují do tohoto bodu. V opačném případě se jedná o *nestabilní* uzel nebo ohnisko.

Tato klasifikace stacionárních bodů je sice krásná ve své názornosti, nicméně u nelineárních systémů je hledání řešení poněkud problematické a klasifikovat stacionární body podle průběhu trajektorií není moc praktické. Proto se nyní postupně pustíme do klasifikace pomocí jiných faktorů než je průběh trajektorií v čase.

Jedna diferenciální rovnice druhého řádu a soustava dvou diferenciálních rovnic řádu prvního jsou v jistém smyslu jedno a totéž. Vhodnou substitucí lze totiž jedno převést na druhé. Řešíme-li diferenciální rovnici druhého řádu, hledáme nejprve řešení zhomogenizované rovnice a používáme přitom její charakteristický polynom, který obdržíme tak, že „tipujeme“ řešení ve tvaru

$$y(x) = y_0 e^{\lambda x}.$$

Lineární systém (1.3.2) je v homogenním tvaru a proto zkusíme stejnou taktiku - „tipneme“ si řešení ve tvaru

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{\lambda t}, \\ y(t) &= y_0 e^{\lambda t} \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

a dosadíme do systému:

$$\begin{aligned}\lambda x_0 e^{\lambda t} &= a_{11} x_0 e^{\lambda t} + a_{12} y_0 e^{\lambda t} \\ \lambda y_0 e^{\lambda t} &= a_{21} x_0 e^{\lambda t} + a_{22} y_0 e^{\lambda t}.\end{aligned}$$

Obě rovnice vydělíme výrazem $e^{\lambda t}$ a výsledek zapíšeme v maticovém tvaru:

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 0.$$

Aby existovala netriviální řešení, musí být

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Rozepsáním determinantu obdržíme **charakteristický polynom** lineárního systému (1.3.2)

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0, \quad (1.3.4)$$

který ještě přepíšeme do tvaru

$$\lambda^2 - p\lambda + q = 0, \quad (1.3.5)$$

kde

$$\begin{aligned}p &= a_{11} + a_{22} = \text{Tr}A, \\ q &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det A\end{aligned}$$

jsou **stopa** (z angl. trace) a **determinant** matice A . Kořeny charakteristické rovnice charakterizují všechna řešení systému (1.3.2). V podstatě se jedná o hledání vlastních čísel matice A , která se zavádí v lineární algebře.

Nalezení všech řešení lineárního systému není předmětem našeho zájmu. Uvidíme však, že vlastní čísla matice A mají fundamentální vliv na typ stacionárního bodu.

Vlastní čísla matice A mohou být buď reálná, nebo komplexní a podle toho se liší tvar řešení. V případě reálných vlastních čísel vystupují v řešení pouze exponenciály $e^{\lambda t}$ (v případě násobných kořenů v kombinaci s polynomy, tj. $te^{\lambda t}$). Jsou-li vlastní čísla komplexní, dostávají se do hry navíc i goniometrické funkce sinus a cosinus. Jedná se o analogickou situaci jako u homogenní diferenciální rovnice druhého řádu.

Nejprve řešíme případ, kdy jsou vlastní čísla reálná. Je-li alespoň jedno z nich nulové, znamená to, že matice A je singularní. Předpokládejme, že je matice A regulární. Pak jsou obě vlastní čísla nenulová a mohou nastat tři případy (které platí i pro násobné kořeny):

- $\lambda_{1,2} < 0$
Exponenciály v řešení mají záporné exponenty a proto řešení konverguje pro $t \rightarrow \infty$ k singulárnímu bodu $[0, 0]$. Taková vlastní čísla odpovídají **stabilnímu uzlu**.
- $\lambda_{1,2} > 0$
Exponenciály v řešení mají kladné exponenty a proto řešení diverguje pro $t \rightarrow \infty$. Taková vlastní čísla odpovídají **nestabilnímu uzlu**.
- $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$
Toto řešení se z kvalitativního hlediska chová odlišně než předchozí dvě. Jedna exponenciála má kladný exponent, druhá záporný. Tedy, zatím co jedna exponenciála

diverguje, druhá konverguje k nule. Dokud bude t záporné, tak bude exponenciála se záporným vlastním číslem dominovat a trajektorie tak bude směřovat ke stacionárnímu bodu. Jakmile ale t překročí nulu a stane se kladným, začne dominovat exponenciála s kladným vlastním číslem a trajektorie se nadobro stočí pryč od stacionárního bodu. Takovým vlastním číslem odpovídá **sedlo**.

Z lineární algebry víme, že každému vlastnímu číslu odpovídá vlastní vektor. Navíc, jsou-li vlastní čísla různá, jsou vlastní vektory k nim příslušné lineárně nezávislé. Tyto vlastní vektory nám určují dvě přímky, které prochází počátkem (stacionárním bodem). Stacionární bod dělí každou z těchto přímek na dvě polopřímky a tyto polopřímky jsou trajektoriemi jistých řešení. Vlastní vektor příslušný zápornému vlastnímu číslu určuje dvě trajektorie (dvě polopřímky), které jako jediné pro $t \rightarrow \infty$ konvergují do stacionárního bodu. Druhý vlastní vektor, příslušný kladnému vlastnímu číslu, určuje jiné dvě trajektorie, které procházejí počátkem, ale pro $t \rightarrow \infty$ směřují pryč od stacionárního bodu.

V případě komplexních vlastních čísel $\alpha \pm \beta i$ je díky goniometrickým funkcím, které se objeví v řešení, situace jiná. Přibližný tvar řešení je $e^{\alpha t} \sin \beta t$, $e^{\alpha t} \cos \beta t$. Funkce sinus a cosinus jsou periodické a způsobí oscilace kolem stacionárního bodu. Mohou nastat dva případy:

- $\lambda_{1,2} = \pm \beta i$

V případě, že vlastní čísla jsou ryze imaginární, vystupují v řešení pouze goniometrické funkce $\sin \beta t$, $\cos \beta t$. Tyto funkce jsou periodické a způsobí, že trajektorie budou cykly. Proto taková vlastní čísla odpovídají stacionárnímu bodu typu **střed**.

- $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, $\alpha \neq 0$

V případě nenulové reálné části vlastních čísel vystupuje v řešení spolu s goniometrickými funkcemi i funkce exponenciální $e^{\alpha t}$, která v závislosti na znaménku čísla α způsobí přibližování či oddalování od stacionárního bodu. Taková vlastní čísla odpovídají **ohnisku**, přičemž je-li $\alpha < 0$, jedná se o stabilní ohnisko, je-li $\alpha > 0$ jde o nestabilní ohnisko.

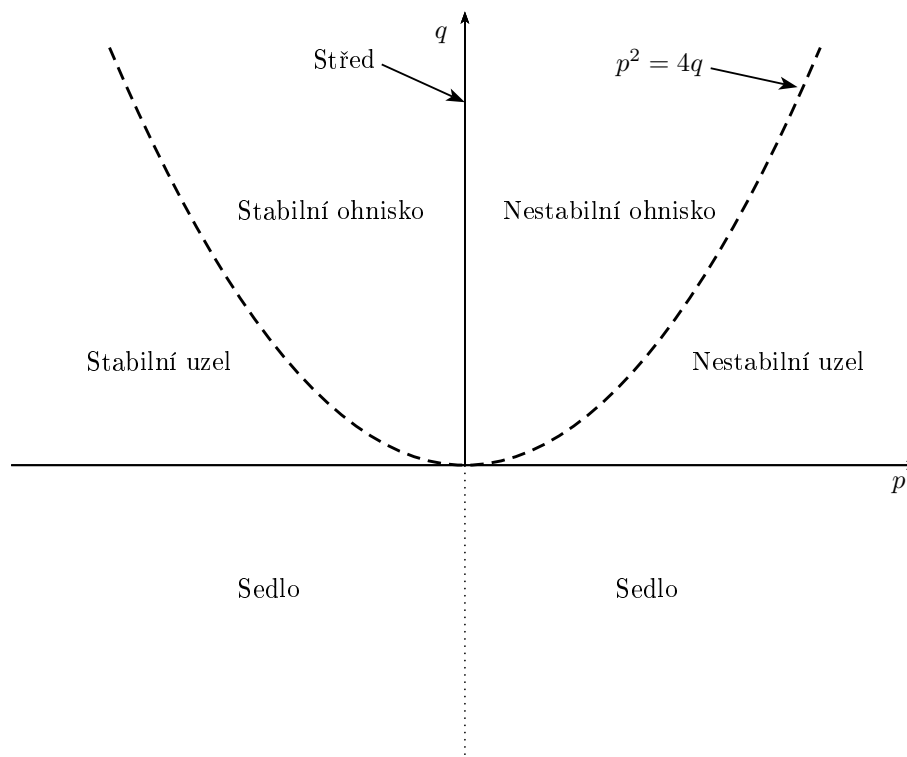
Tím jsme provedli klasifikaci stacionárních bodů pomocí kořenů charakteristické rovnice, tj. podle vlastních čísel matice A . Ze střední školy ovšem víme, že kořeny kvadratické rovnice jsou zcela určeny jejími koeficienty. Vyjádříme-li z rovnice (1.3.5) její kořeny pomocí stopy a determinantu matice A , obdržíme

$$\lambda_{1,2} = \frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Charakteristický polynom je vždy v normovaném tvaru a tak jediné koeficienty, které hrají nějakou roli v klasifikaci stacionárních bodů, jsou p a q . Nejdůležitější je přitom výraz pod odmocninou $p^2 - 4q$. Tento výraz můžeme chápat jako funkci $q(p)$, jejímž grafem je parabola s vrcholem v počátku. Typ stacionárního bodu pak určíme pomocí hodnoty stopy a determinantu matice A a vlastní čísla tak nemusíme přímo počítat. Klasifikace je následující:

- Je-li $q = 0$ a $p \neq 0$, je jedním vlastním číslem nula a je-li i $p = 0$, jsou obě vlastní čísla nulová. Pro taková vlastní čísla klasifikaci neprovádíme.

- Je-li $q < 0$, jsou vlastní čísla reálná a opačných znamének. Tím pádem se jedná o **sedlo**.
- Je-li $0 < 4q \leq p^2$, jsou vlastní čísla reálná a stejných znamének. Pro $p < 0$ jsou obě vlastní čísla záporná a máme **stabilní uzel**. Pro $p > 0$ jsou obě vlastní čísla kladná a máme **nestabilní uzel**.
- Jeli $4q > p^2$, jsou vlastní čísla komplexní a objeví se oscilace. Amplituda oscilací se bude zmenšovat nebo zvětšovat, podle znaménka p (protože p určuje znaménko reálné části komplexních vlastních čísel). Pro $p < 0$ máme **stabilní ohnisko**, pro $p > 0$ máme **nestabilní ohnisko**.
- Je-li $p = 0$ a $q > 0$, jsou vlastní čísla ryze imaginární a v tom případě se jedná o **střed**.


 Obrázek 1.5: Klasifikace stacionárních bodů podle stopy a determinantu matice A

Tím jsme vyčerpali možnosti vlastních čísel a pozorný čtenář si jistě všiml, že jsme opomněli stacionární bod typu *bod rotace*. To proto, že bod rotace se u lineárních systémů nemůže vyskytnout. Viděli jsme, jak vypadají řešení lineárních systémů v závislosti na vlastních číslech a ty zkrátka nedovolují situaci, ve které by současně existovaly uzavřené a neuzavřené trajektorie. S bodem rotace se lze setkat až u nelineárních systémů, neboť ty mají mnohem komplikovanější řešení. Tam jsou ryze imaginární vlastní čísla mírně problematická. Nelze u nich pomocí vlastních čísel rozhodnout, zda-li se jedná o ohnisko,

střed, nebo bod rotace. V takové situaci je nutné daný stacionární bod klasifikovat jinými metodami. Tuto problematiku ještě zmíníme v další podkapitole.

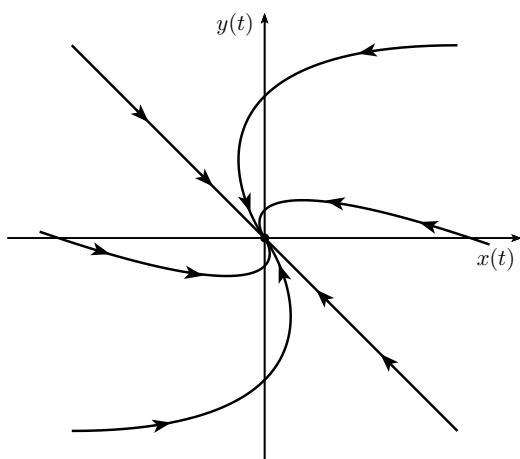
Na závěr této podkapitoly uvádíme přehlednou tabulku klasifikace stacionárních bodů jak podle vlastních čísel, tak podle stopy a determinantu matice A a také ilustrace typických průběhů trajektorií kolem jednotlivých stacionárních bodů.

$q < 0$			sedlo
$q > 0$	$p > 0$	$4q \leq p^2$	nestabilní uzel
		$4q > p^2$	nestabilní ohnisko
	$p < 0$	$4q \leq p^2$	stabilní uzel
		$4q > p^2$	stabilní ohnisko
	$p = 0$		střed

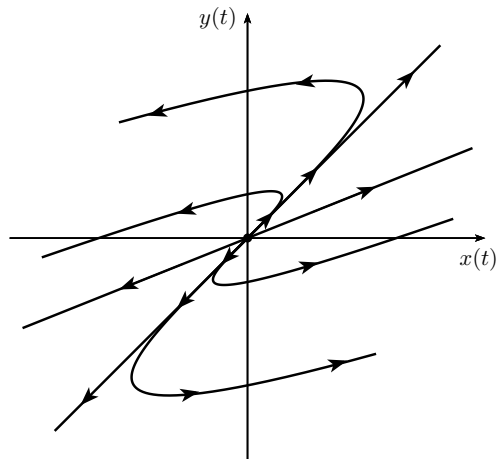
Tabulka 1.1: Klasifikace stacionárních bodů podle stopy a determinantu matice A

$\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$	$\lambda_{1,2} < 0$	stabilní uzel
	$\lambda_{1,2} > 0$	nestabilní uzel
	$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	sedlo
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$\alpha < 0$	stabilní ohnisko
	$\alpha > 0$	nestabilní ohnisko
	$\alpha = 0$	střed

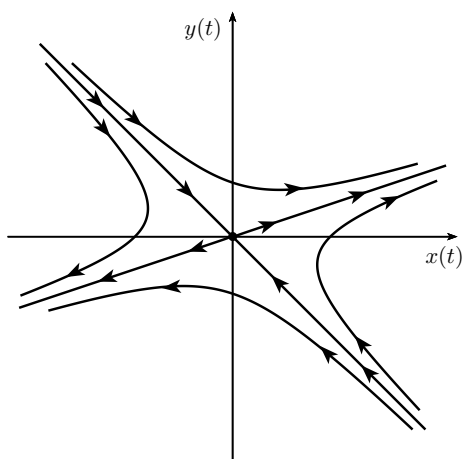
Tabulka 1.2: Klasifikace stacionárních bodů podle vlastních čísel matice A



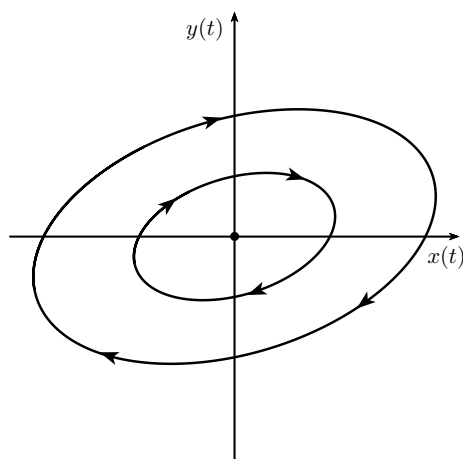
Obr. 1.6: stabilní uzel



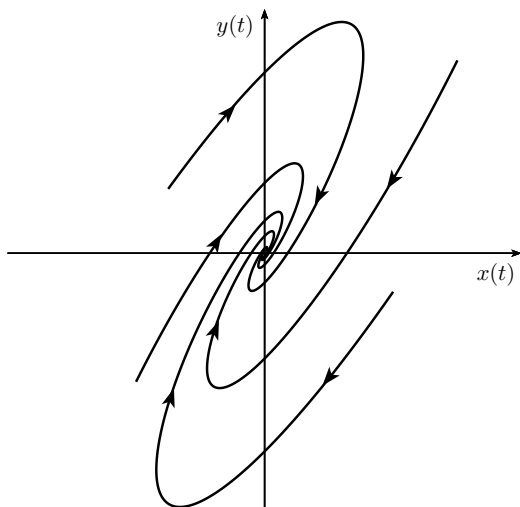
Obr. 1.7: nestabilní uzel



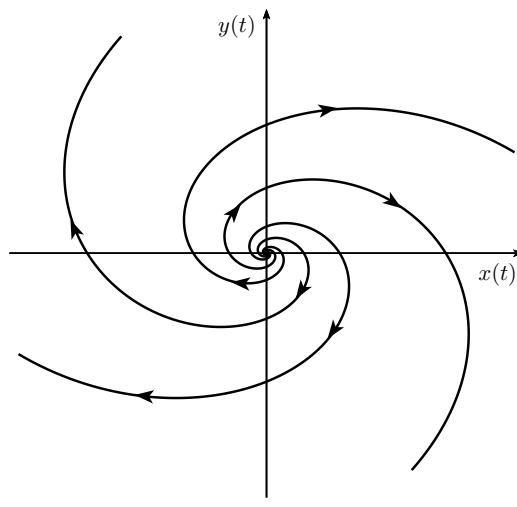
Obr. 1.8: sedlo



Obr. 1.9: střed



Obr. 1.10: stabilní ohnisko



Obr. 1.11: nestabilní ohnisko

1.4 Nelineární systémy

Systémy autonomních rovnic

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y), \end{cases}$$

kde funkce f a g jsou lineární, jsme řešili v předešlé podkapitole. Nyní nás bude zajímat, jak se chovají systémy, ve kterých jsou funkce f a g *nelineární*. Příkladem může být systém

$$\begin{cases} x' = x^2 - 3xy + x \\ y' = x^2 - 3y - 1. \end{cases} \quad (1.4.1)$$

Oproti lineárním systémům vidíme hned několik rozdílů: nulkliny jsou složitější množiny, systém bude mít nejspíš více izolovaných stacionárních bodů a žádná matice A systému (u které bychom hledali vlastní čísla) se zde nevyskytuje. Než si řekneme, jak stacionární body klasifikovat, zopakujeme si určování nulklin. To se dělá stále stejně a pro ukázkou použijeme systém (1.4.1).

Nulkliny nalezneme tak, že pravé strany postupně položíme rovny nule. Pro x -nulklinu tedy platí

$$x(x - 3y + 1) = 0$$

a pro y -nulklinu

$$x^2 - 3y - 1 = 0.$$

Rovnice pro x -nulklinu je splněna právě tehdy, když

$$x = 0 \quad \text{nebo} \quad y = \frac{x+1}{3}.$$

Vidíme, že x -nulklina je tvořena dvěma přímkami. Rovnice pro y -nulklinu je splněna právě tehdy, když

$$y = \frac{x^2 - 1}{3}.$$

To je kvadratická funkce, jejímž grafem je parabola. Tedy y -nulklina je parabola.

Stacionární body nalezneme v průsečících x -nulkliny s y -nulklinou, nebo-li vyřešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x(x - 3y + 1) &= 0 \\ x^2 - 3y - 1 &= 0. \end{aligned}$$

První rovnice je v součinném tvaru a proto budeme soustavu řešit ve dvou krocích:

- Nejprve řešme soustavu

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ x^2 - 3y - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Dosadíme-li z první rovnice do druhé, obdržíme řešení soustavy $[x, y] = [0, -\frac{1}{3}]$. Nalezli jsme tak první stacionární bod $S_1 = [0, -\frac{1}{3}]$.

- Nyní řešíme soustavu

$$x - 3y + 1 = 0$$

$$x^2 - 3y - 1 = 0.$$

Odečteme-li první rovnici od druhé, obdržíme kvadratickou rovnici

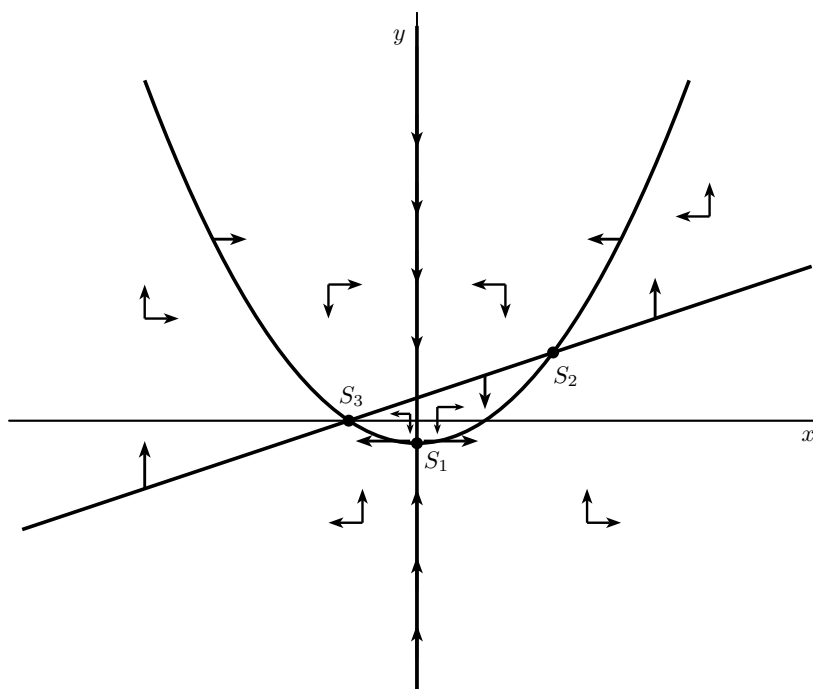
$$x^2 - x - 2 = 0,$$

která má kořeny $x_1 = 2$ a $x_2 = -1$. Dosazením kořenů do první rovnice obdržíme dvě řešení této soustavy rovnic. Nalezli jsme tak další dva stacionární body $S_2 = [2, 1]$ a $S_3 = [-1, 0]$.

Vidíme, že hledání nulklin a stacionárních bodů u nelineárních systému je možná trochu těžší, ale princip je stejný jako u lineárních systémů.

V tuto chvíli je důležité si uvědomit, že nulkliny jsou skutečně množiny bodů. To, že v předešlém příkladě je x -nulklina tvořena dvěma přímkami neznamená, že má daný systém dvě x -nulkliny! Systém má vždy jednu x -nulklinu a jednu y -nulklinu. To jsou dvě množiny bodů, kterým obvykle odpovídají nějaké známé křivky. Stacionární body je nutno hledat v *průsečících nulklin* - byla by chyba hledat v předešlém příkladě stacionární bod v průsečíku přímk $x = 0$ a $y = \frac{x+1}{3}$! V některých případech nulkliny nemusejí mít žádný průsečík (systémy bez stacionárních bodů), nebo taky může být nulklina prázdná množina (např. pro rovnici $x' = x^2 + 1$ neexistuje reálné číslo, pro které by $x^2 + 1 = 0$).

Stejně jako u lineárních systémů si i zde můžeme nulkliny zobrazit ve fázové rovině spolu se šipkami, které znázorňují směr trajektorií při přechodu přes nulkliny, viz obrázek 1.12.



Obrázek 1.12: Nulkliny ve fázové rovině systému 1.4.1

Hrubou představu o tvaru trajektorií si lze udělat již z obrázku 1.12. Nemůžeme si být ovšem jisti, jak se trajektorie chovají v blízkém okolí stacionárních bodů.

Na chvíli opustíme úvodní příklad a řekneme si o klasifikaci stacionárních bodů. Myšlenka, jak stacionární bod nelineárního systému klasifikovat, je celkem prostá. V nějakém malém okolí stacionárního bodu daný nelineární systém nahradíme jeho lineární aproximací. Tu získáme tak, že pravé strany daného systému nahradíme Taylorovým polynomem prvního stupně ve stacionárním bodě. Tím získáme *lineární* systém, který nám v blízkém okolí stacionárního bodu aproximuje původní nelineární systém. Tento lineární systém má jediný stacionární bod, který umíme klasifikovat.

Otázka nyní zní: Za jakých podmínek bude kvalitativní chování linearizovaného systému v okolí stacionárního bodu stejné, jako původního systému? Odpověď dává tzv. **linearizační věta**, která říká, že dynamický systém se v okolí hyperbolického stacionárního bodu chová z kvalitativního hlediska stejně, jako se chová linearizovaný systém.

Další otázka: Co je to **hyperbolický** stacionární bod? To je bod, ve kterém matice linearizovaného systému nemá ryze imaginární čísla.

Čili, provedeme-li linearizaci v nějakém stacionárním bodě a vlastní čísla matice linearizovaného systému mají nenulovou reálnou část, je tento stacionární bod linearizovaného systému stejného typu, jako u původního systému.

Uvažujme nyní nějaký systém autonomních rovnic

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad (1.4.2)$$

a provedme jeho linearizaci ve stacionárním bodě $[x_0, y_0]$. Funkce f a g nahradíme Taylorovým polynomem, tj.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \dots, \\ g(x, y) &= g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \dots \end{aligned}$$

K linearizaci potřebujeme pouze lineární členy Taylorova polynomu a těmi nahradíme funkce f a g v systému (1.4.2). Obdržíme systém

$$\begin{cases} x' = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ y' = g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0). \end{cases}$$

Záměrně jsme vynechali členy $f(x_0, y_0)$ a $g(x_0, y_0)$, neboť bod $[x_0, y_0]$ je stacionární a v takovém bodě jsou obě funkce f i g nulové. Protože

$$x' = (x - x_0)' \quad \text{a} \quad y' = (y - y_0)',$$

(x_0 a y_0 jsou nějaká čísla) můžeme psát

$$\begin{cases} (x - x_0)' = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ (y - y_0)' = g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0) \end{cases}$$

a zavést substituci

$$\begin{aligned} u &= x - x_0, \\ v &= y - y_0. \end{aligned}$$

Tím dostaneme systém

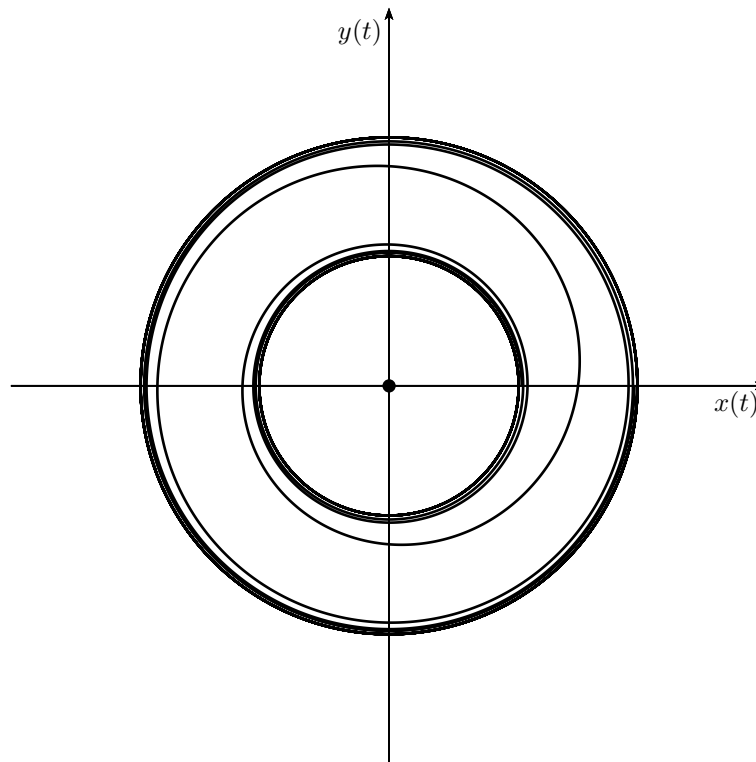
$$\begin{cases} u' = f_x(x_0, y_0)u + f_y(x_0, y_0)v \\ v' = g_x(x_0, y_0)u + g_y(x_0, y_0)v, \end{cases}$$

který je kýženou linearizací systému (1.4.2). V maticovém tvaru máme

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (1.4.3)$$

Matice tohoto lineárního systému se nazývá **Jacobiho matice** vyčíslená v bodě $[x_0, y_0]$ a typ stacionárního bodu $[x_0, y_0]$ zjistíme nalezením vlastních čísel této matice. Mají-li nenulovou reálnou část, stacionární bod lze klasifikovat, přičemž vlastní čísla odpovídají stejnému typu, jako u lineárních systémů.

Jsou-li ale vlastní čísla ryze imaginární, nelze tento stacionární bod tímto způsobem přesně klasifikovat. Tím se dostáváme k problémům spojeným s ryze imaginárními vlastními čísly u nelineárních systémů. Jediné, co můžeme o takovém bodě říct je, že je buď ohnisko, nebo střed, nebo bod rotace. Přesně klasifikovat takový bod vyžaduje náročnější techniky, kterým se v této práci bohužel věnovat nebudeme. Přesto v druhé kapitole narazíme na nelineární systém, ve kterém se uzavřené trajektorie vyskytují a v tom konkrétním případě si ukážeme, jak uzavřené trajektorie odhalit. Ilustrační obrázek bodu rotace lze vidět na obrázku 1.13.



Obrázek 1.13: Bod rotace

Definice 6. Nechť je dán systém autonomních rovnic

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad (1.4.4)$$

a nechť je $[x_0, y_0]$ stacionární bod tohoto systému. Položme

$$J(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Potom $J(x_0, y_0)$ nazýváme **Jacobiho maticí** v bodě $[x_0, y_0]$ systému rovnic (1.4.4).

Dále řekneme, že bod $[x_0, y_0]$ je **hyperbolický**, mají-li všechna vlastní čísla Jacobiho matice v tomto bodě nenulovou reálnou část.

Vyšetřujeme-li typ stacionárního bodu nějakého systému, stačí spočítat Jacobiho matici, vyčíslit ji ve stacionárním bodě, spočítat její vlastní čísla a můžeme určit typ stacionárního bodu (v případě ryze imaginárních čísel pouze zúžit možnosti). Vyzkoušíme si to na úvodním příkladu této podkapitoly. Máme systém

$$\begin{cases} x' = x^2 - 3xy + x \\ y' = x^2 - 3y - 1. \end{cases} \quad (1.4.5)$$

Nulkliny tohoto systému vidíme na obrázku 1.12. Jeho stacionární body jsou

$$S_1 = [0, -\frac{1}{3}], \quad S_2 = [2, 1], \quad S_3 = [-1, 0].$$

Jacobiho matice tohoto systému je

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - 3y + 1 & -3x \\ 2x & -3 \end{pmatrix}.$$

Nyní ji postupně vyčíslíme v každém stacionárním bodě a určíme vlastní čísla.

•

$$J(S_1) = J(0, -\frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom má tvar

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0,$$

jehož kořeny jsou

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{a} \quad \lambda_2 = -3.$$

Vlastní čísla jsou reálná a opačných znamének, tudíž bod S_1 je typu sedlo.

•

$$J(S_2) = J(2, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom má tvar

$$\lambda^2 + \lambda + 18 = 0,$$

jehož kořeny jsou

$$\lambda_{12} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{71}}{2}.$$

Vlastní čísla jsou tedy komplexně sdružená a mají zápornou reálnou část. Stacionární bod S_2 je proto typu stabilní ohnisko.

•

$$J(S_3) = J(-1, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom má tvar

$$\lambda^2 + 4\lambda + 9 = 0,$$

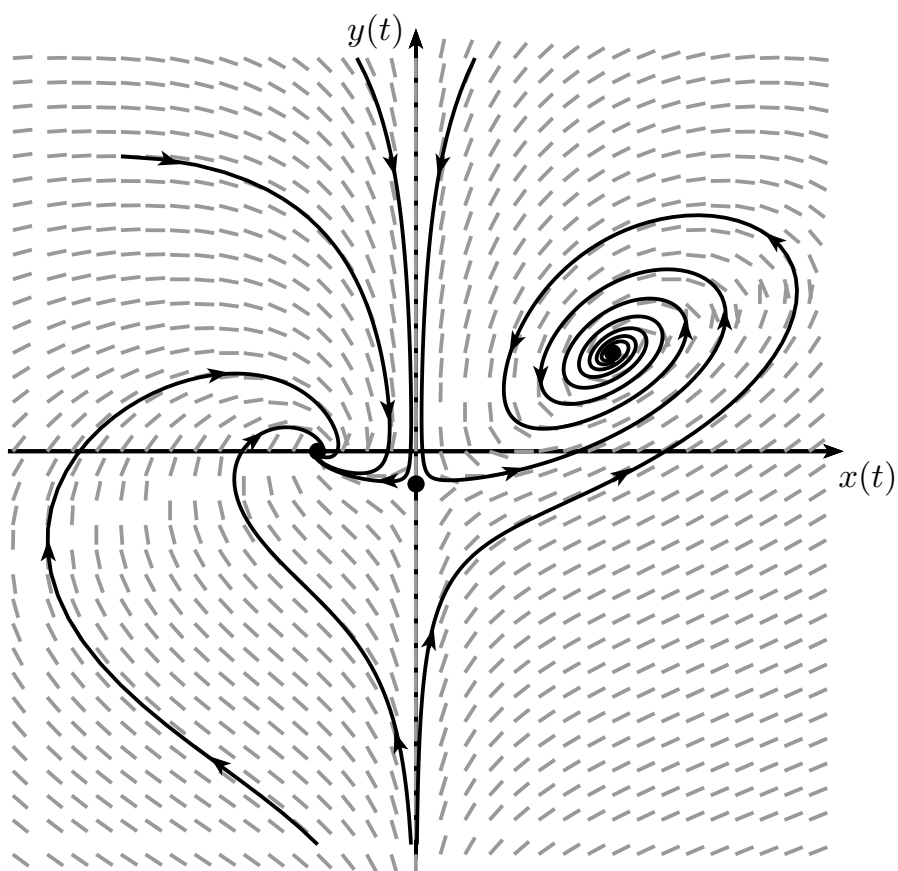
jehož kořeny jsou

$$\lambda_{12} = -2 \pm i\sqrt{5}.$$

Vlastní čísla jsou opět komplexně sdružená a opět mají zápornou reálnou část. Proto je i bod S_3 typu stabilní ohnisko.

Na obrázku 1.14 vidíme několik trajektorií zkoumaného systému rovnic. Chování nelineárních systémů je obecně mnohem složitější, než systémů lineárních. Pomocí nepříliš složitých nelineárních rovnic lze modelovat i velmi komplexní systémy, jak uvidíme ve druhé kapitole.

Pro zajímavost si všimněme, že konvergence trajektorií do bodu $[-1, 0]$ je mnohem rychlejší, než do bodu $[2, 1]$. To je dáno absolutní hodnotou reálné části vlastního čísla, příslušného danému stacionárnímu bodu. Čím je větší, tím má exponenciála v řešení linearizovaného systému větší (nebo menší) exponent a tím rychleji roste (nebo klesá).



Obrázek 1.14: Trajektorie ve fázové rovině systému 1.4.1

Kapitola 2

Aplikace autonomních systémů

V této kapitole si představíme pět aplikačních příkladů, které už byly nastíněny v úvodu práce. Ukážeme si univerzalitu matematického jazyka na poli politologie, biologie, psychologie a také na poli bitevním.

2.1 Richardsonova teorie konfliktů

Skrz naskrz historií se setkáváme s neutuchající touhou odůvodnit vznik války. V 5. stol. př.n.l. žil Thúkydidés, řecký historik a politik. Ten považoval zbrojení za důvod válčení. Ve své práci Dějiny Peloponéské války (válka mezi Athénským námořním spolkem a Peloponéským spolkem v letech 431–404 př.n.l.) píše:

„Skutečným, ačkoli neuznávaným, důvodem války byl růst Athénské moci, které se Lakóňané báli a která je donutila započít válku.“

Sir Edward Grey, britský ministr zahraničí během první světové války, souhlasí s Thúkydidem:

„Růst zbrojení, který každý národ udržuje k produkování vědomí síly a pocitu bezpečí, ve skutečnosti nemá takový efekt. Naopak, produkuje vědomí síly ostatních států a pocit strachu. Enormní nárůst zbrojení v Evropě a tím způsobený pocit nebezpečí a strachu udělaly válku nevyhnutelnou. Toto je skutečný a konečný původ světové války.“

Na druhou stranu, L. S. Amery, člen britského parlamentu během 30. let 20. století, vehementně nesouhlasí:

„Při vši úctě k památce předního politika, věřím, že jeho prohlášení bylo zcela ne-správné. Zbrojení bylo pouze symptomem konfliktu ambicí a ideálů. K válce došlo, protože Srbsko, Itálie a Rumunsko toužily po osamostatnění. V té době ovšem spadala tato území pod Rakousko–Uhersko a rakouský parlament nebyl připraven je opustit bez boje. A Francie byla připravena, pokud by se naskytla příležitost, získat zpět Alsasko–Lotrinsko. Toto jsou pravé důvody, které způsobily válku. Nikoliv samotné zbrojení.“

Jméno v názvu této podkapitoly patří Lewisovi Fry Richardsonovi, což byl anglický matematik, fyzik, meteorolog, psycholog a pacifista. Narodil se v roce 1881 a zemřel v roce 1953. Jeho nejvýznamějšími pracemi jsou moderní matematické modely předpovědi počasí a modely pro studování vzniku války. Také se zabýval pravděpodobností vzniku války mezi dvěma státy na základě délky jejich společné hranice. Když sbíral data, nemohl si nevšim-

nout velkých rozdílů mezi uváděnými délkami společných hranic konkrétních států. Zjistil, že délka hranice dvou států (stejně jako délka pobřeží ostrovů a kontinentů) roste do nekonečna se zmenšující se jednotkou měřidla. Dnes je tento jev typickou vlastností objektů zvaných fraktály.

My si zde představíme Richardsonův autonomní systém, který popisuje okolnosti vzniku války. Nejedná se však o *předpověď* vzniku války. Richardson se ke svému modelu vyjadřuje takto:

„Mnoho národů neustále zvyšuje své zbrojení, jako kdyby byly mechanicky nuceny tak činit. Tvrdím, že důvodem je následování svých tradic, které jsou fixní, a svých instinktů, které jsou mechanické; a také proto, že zatím neprojevíly (národy) dostatečnou intelektuální a morální snahu kontrolovat situaci. Proces, který popisují tyto rovnice, není nevyhnutelný. Je popisem toho, co by se stalo, kdyby instinkty a tradice jednaly nekontrolovaně.“

Označme $x = x(t)$ vyzbrojení národu X a $y = y(t)$ vyzbrojení národu Y. Míra změny vyzbrojení národu X (tedy x') závisí na vyzbrojení $y(t)$ národu Y a nenávisti, kterou národ X cítí vůči národu Y. V nejjednodušším modelu reprezentujeme tyto členy jako ky a g , kde k a g jsou kladné konstanty. Tyto dva členy způsobují růst x' . Na druhé straně, náklady na zbrojení tento růst zbrzdí. Tento člen reprezentujeme jako $-\alpha x$, kde α je kladná konstanta. Analogická analýza platí i pro národ Y. Tudíž $x = x(t)$, $y = y(t)$ je řešením lineárního autonomního systému

$$\begin{aligned}x' &= ky - \alpha x + g, \\y' &= lx - \beta y + h.\end{aligned}\tag{2.1.1}$$

Tento systém lze rozšířit na více národů, nebo může reprezentovat vztah mezi dvěma aliancemi. Například aliance Francie, Rusko a aliance Německo, Rakousko–Uhersko v letech bezprostředně předcházejících první světové válce.

Systém (2.1.1) bere v potaz oba názory z úvodu této podkapitoly. Thúkydídés a sir Edward Grey by vzali g a h malé, ve srovnání s k a l , zatímco L. S. Amery by činil opačně.

Systém (2.1.1) má několik důležitých důsledků. Předpokládejme, že $g = 0$ a $h = 0$ (národy vůči sobě necítí žádnou nenávist). Pak $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$ je stacionární bod systému (2.1.1). To znamená, že pokud národy vůči sobě necítí žádnou nenávist a jejich vyzbrojení je nulové, pak jejich vyzbrojení zůstane nulové po všem budoucím čas. Tyto ideální podmínky představují permanentní mír. Ten existuje od roku 1817 na hranici Kanady a USA a od roku 1905 na hranici mezi Norskem a Švédskem.

Dále z rovnic (2.1.1) vyplývá, že vzájemné odzbrojení za oboustranné (či jednostranné) nenávisti není permanentní. Tzn. položíme-li $x(t) \equiv y(t) \equiv 0$ (odzbrojíme oba národy), pak

$$\begin{aligned}x' &= g \\y' &= h,\end{aligned}$$

tedy národy začnou znovu zbrojit.

Také jednostranné odzbrojení není permanentní. Položme $y = 0$ v nějaký čas t_0 . V čase t_0 je $y' = lx + h$. Z toho plyne, že pokud je x (zbrojení národu X) nebo h (nenávist národu Y vůči X) nenulové, pak y nezůstane nulové (národ Y začne znovu zbrojit). To odpovídá

historickému faktu, že Německo, kterému byla Versaillskou smlouvou redukována armáda na 100 000 mužů, v letech 1933–1936 aktivně zbrojilo a budovalo armádu.

Závod ve zbrojení se objeví, když v systému (2.1.1) dominují obranné členy k a l (tj. vliv α , β je malý). Potom

$$\begin{aligned}x' &= ky \\ y' &= lx.\end{aligned}\tag{2.1.2}$$

Jedná se o lineární systém, který je dostatečně jednoduchý na to, abychom určili jeho obecné řešení a z něj chování celého systému.

Rovnici $x' = ky$ přepíšeme do tvaru $y = \frac{x'}{k}$, z čehož plyne $y' = \frac{x''}{k}$. Po dosazení do druhé rovnice dostáváme

$$\frac{x''}{k} - lx = 0,$$

což ještě upravíme do tvaru

$$x'' - klx = 0.\tag{2.1.3}$$

Tím jsme převedli systém (2.1.2) na jednu diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty.

Charakteristický polynom rovnice (2.1.3) je

$$\lambda^2 - kl = 0$$

a ten má kořeny $\lambda_{12} = \pm\sqrt{kl}$. Řešení $x(t)$ rovnice (2.1.3) je tedy

$$x = c_1 e^{\sqrt{kl}t} + c_2 e^{-\sqrt{kl}t}.$$

Abychom získali i řešení $y(t)$ systému (2.1.2), dosadíme $x(t)$ do druhé rovnice systému (2.1.2). Dostáváme

$$y' = l \left(c_1 e^{\sqrt{kl}t} + c_2 e^{-\sqrt{kl}t} \right),$$

z čehož po integraci podle t dostaneme

$$y = \sqrt{\frac{l}{k}} \left(c_1 e^{\sqrt{kl}t} - c_2 e^{-\sqrt{kl}t} \right).$$

Našli jsme tedy řešení systému (2.1.2):

$$\begin{aligned}x &= c_1 e^{\sqrt{kl}t} + c_2 e^{-\sqrt{kl}t}, \\ y &= \sqrt{\frac{l}{k}} \cdot \left(c_1 e^{\sqrt{kl}t} - c_2 e^{-\sqrt{kl}t} \right).\end{aligned}\tag{2.1.4}$$

Jedna exponenciální funkce ve (2.1.4) je rostoucí, druhá klesající. Tzn. je-li $c_1 > 0$ (které závisí na počátečních podmínkách, tj. počátečním zbrojení), pak zbrojení obou národů roste do nekonečna, což lze interpretovat jako válku.

Systém rovnic (2.1.1) není zcela přesný, protože nebere v potaz spolupráci nebo obchodování mezi národy X a Y. Dnes víme, že vzájemná spolupráce mezi národy má tendenci snižovat strach a obavy, které mezi nimi panují. Náš systém zpravíme tak, že místo aby

$x(t)$, $y(t)$ představovaly *zbrojení* národů, budou představovat „hrozby“ mínus „spolupráce“. Konkrétně, označíme $x = U - U_0$ a $y = V - V_0$, kde U , V jsou rozpočty na obranu národů X, Y a U_0 , V_0 jsou množství zboží exportovaných národem X národu Y, respektive národem Y národu X.

Vraťme se k systému rovnic (2.1.1), který má jediný stacionární bod. Ten nalezneme vyřešením soustavy algebraických rovnic

$$\begin{aligned}ky - \alpha x + g &= 0, \\lx - \beta y + h &= 0.\end{aligned}$$

Řešením je bod

$$x^* = \frac{kh - \beta g}{\alpha\beta - kl}, \quad y^* = \frac{lg + \alpha h}{\alpha\beta - kl}, \quad \text{kde } \alpha\beta - kl \neq 0.$$

Dále budeme zkoumat druh tohoto stacionárního bodu a zda-li je stabilní či nestabilní. Jacobiho matice systému (2.1.1) je

$$J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} -\alpha & k \\ l & -\beta \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom této matice je

$$p(\lambda) = \lambda^2 + (\alpha + \beta)\lambda + \alpha\beta - kl, \quad (2.1.5)$$

a její vlastní čísla jsou

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= \frac{-(\alpha + \beta) \pm \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4(\alpha\beta - kl)}}{2} \\ &= \frac{-(\alpha + \beta) \pm \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4kl}}{2}.\end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Protože $(\alpha - \beta)^2 \geq 0$ a $4kl > 0$, jsou kořeny $\lambda_{1,2}$ reálné různé. Je evidentní, že znaménka vlastních čísel $\lambda_{1,2}$ závisí na znaménku výrazu $\alpha\beta - kl$ v rovnosti (2.1.5). Máme tak dvě možnosti:

1. $\alpha\beta - kl > 0$

Výraz $(\alpha + \beta)^2$ pod odmocninou v (2.1.6) *zmenšíme* o nějakou nenulovou hodnotu, takže hodnota odmocniny bude *menší* než $(\alpha + \beta)$. Proto $\lambda_{1,2} < 0$ a stacionární bod $[x^*, y^*]$ je **stabilní uzel**.

2. $\alpha\beta - kl < 0$

Výraz $(\alpha + \beta)^2$ pod odmocninou v (2.1.6) *zvětšíme* o nějakou nenulovou hodnotu, takže hodnota odmocniny bude *větší* než $(\alpha + \beta)$. Proto $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ a stacionární bod $[x^*, y^*]$ je **sedlo**.

V závěru tak dostáváme, že aby bylo zbrojení dvou národů stabilní (aby se nevyhrotilo ve válku), musí být součin omezujících koeficientů (náklady, nepřízeň lidu; tj. α a β) větší, než součin vzájemně-zbrojících koeficientů (strach ze zbrojení nepřítel; tj. k a l).

Odhad koeficientů α , β , k , l

V předchozí části textu jsme odvodili systém rovnic (2.1.1) a viděli jsme, že umí popisovat okolnosti, za kterých dojde k válce mezi dvěma národy. Otázka ale zní, je-li tento systém realistický, to jest zda-li odpovídá nějaké skutečné válce. K tomu je potřeba odhadnout jednotlivé koeficienty v rovnicích, což je obecně nesnadný úkol.

Neexistuje způsob, jak změřit nenávisť (g a h) národů vůči sobě. Nicméně odhadnout koeficienty α , β , k , l lze.

Uvědomme si, že zbrojení národů, tj. $x(t)$ a $y(t)$, měříme v *nějakých* jednotkách za čas (rovnice jsou tvaru $\frac{dx}{dt} = \dots$, kde t je čas) a tedy i jednotlivé koeficienty měříme v *nějakých* jednotkách za čas. Uvažme, že $y(t)$ a g jsou v nějaký čas t_0 současně nulové (tj. zbrojení národu Y a nenávisť národu X vůči Y). Zároveň má národ X v čase t_0 nějaké zbrojení x_0 . Potom rovnice

$$x' = ky - \alpha x + g$$

s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$, přejde do tvaru

$$x' = -\alpha x, \quad x(t_0) = x_0.$$

Řešení tohoto počátečního problému je

$$x(t) = e^{-\alpha(t-t_0)} \cdot x_0.$$

Z toho plyne následující rovnost:

$$x(t_0 + \alpha^{-1}) = e^{-\alpha(t_0 + \alpha^{-1} - t_0)} \cdot x_0 = \frac{x_0}{e}.$$

Tedy α^{-1} je čas potřebný pro národ X, aby své zbrojení zmenšil přibližně 2,718-krát, pokud tento národ nechová žádnou nenávisť a žádný jiný národ se nezbrojí. Richardson odhaduje α^{-1} jako funkční období parlamentu národu X. Stejná úvaha platí i pro koeficient β národu Y.

Abychom odhadli k a l , budeme uvažovat hypotetickou situaci, při které je $g = 0$ a $y = y_1$ (nenávisť X je nulová a zbrojení Y je konstantní), takže

$$x' = ky_1 - \alpha x.$$

Pokud je $x = 0$ (zbrojení národu X je nulové), pak

$$x' = ky_1,$$

nebo-li

$$\frac{1}{k} = \frac{y_1}{x'}.$$

Tedy $\frac{1}{k}$ je čas, který národ X potřebuje k dohnání zbrojení národu Y za podmínek: zbrojení národu Y zůstává konstantní; nepanuje žádná nenávisť; náklady na zbrojení nezpomalují jeho růst. K tomuto faktu můžeme dojít i následovně: řešením rovnice $x' = ky_1$ s počáteční podmínkou $x(0) = 0$ je funkce $x(t) = ky_1 t$; nyní je zřejmé, že skutečně $x(1/k) = y_1$.

Jako příklad lze vzít znovuzbrojení Německa v letech 1933–1936. Německo začínalo s téměř nulovým zbrojením a dohnalo své sousedy za tři roky. Předpokládáme-li, že náklady na zbrojení téměř vyvážily velmi silnou Německou nenávist, položíme $k = 0,3$ pro Německo. Dále je zřejmé, že koeficient k je úměrný síle a množství průmyslu, který národ má. Proto je $k = 0,15$ pro národ, který má poloviční množství průmyslu než Německo a $k = 0,9$ pro národ, který má třikrát tolik průmyslu jako Německo. Dále, funkční období parlamentu Velké Británie je 5 let. Richardson proto odhaduje $\alpha = 0,2$.

Nyní otestujme náš model na evropském závodě ve zbrojení v letech 1909–1914. Francie byla v alianci s Ruskem a Německo bylo v alianci s Rakousko–Uherskem. Itálie a Velká Británie nebyly ani v jedné z aliancí. Vezměme tedy národ X jako alianci Francie, Rusko a národ Y jako alianci Německo, Rakousko–Uhersko. Protože tyto aliance byly co do velikosti téměř stejné, vezmeme $k = l$ a protože každá z aliancí byla třikrát větší než Německo, vezmeme $k = l = 0,9$. Dále předpokládáme $\alpha = \beta = 0,2$. Dostáváme tak systém

$$\begin{aligned}x' &= -\alpha x + ky + g \\y' &= kx - \alpha y + h.\end{aligned}\tag{2.1.7}$$

Systém (2.1.7) má jediný stacionární bod

$$x^* = \frac{kh - \alpha g}{\alpha^2 - k^2}, \quad y^* = \frac{kg + \alpha h}{\alpha^2 - k^2},$$

který je nestabilní, protože

$$\alpha\beta - kl = \alpha^2 - k^2 = 0,04 - 0,81 = -0,77.$$

To však odpovídá historickému faktu že tyto dvě aliance mezi sebou započali válku.

Model, který jsme právě vytvořili je velmi hrubý, protože jsme předpokládali, že nenávisti g a h jsou v čase konstantní. Což zřejmě není pravda. Dokonce nejsou ani spojitě v čase. Nicméně je bezpečné předpokládat, že jsou relativně konstantní v dlouhých časových periodách. Přesto přese všechno náš model popisuje velmi přesně závod ve zbrojení před první světovou válkou. Abychom si to ukázali, sečteme dohromady rovnice ze systému (2.1.7). Dostaneme

$$\frac{d}{dt}(x + y) = (k - \alpha)(x + y) + g + h.\tag{2.1.8}$$

Připomeňme, že $x = U - U_0$ a $y = V - V_0$, kde U, V jsou rozpočty na obranu dvou aliancí a U_0, V_0 je množství zboží exportovaného mezi aliancemi. Přepíšeme rovnost (2.1.8):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(U + V - U_0 - V_0) &= (k - \alpha)(U + V - U_0 - V_0) + g + h, \\ \frac{d}{dt}(U + V) &= (k - \alpha) \left[U + V - \left(U_0 + V_0 - \frac{g + h}{k - \alpha} \right) \right] + \frac{d}{dt}(U_0 + V_0),\end{aligned}$$

a poslední úpravou je vytknutí členu $(k - \alpha)$ z výrazu $\frac{d}{dt}(U_0 + V_0)$. Dostaneme

$$\frac{d}{dt}(U+V) = (k-\alpha) \left[U+V - \left(U_0+V_0 - \frac{g+h}{k-\alpha} - \frac{1}{k-\alpha} \frac{d}{dt}(U_0+V_0) \right) \right]. \quad (2.1.9)$$

Rozpočty na obranu obou aliancí před první světovou válkou jsou v tabulce 2.1.

	1909	1910	1911	1912	1913
Francie	48,6	50,9	57,1	63,2	74,7
Rusko	66,7	68,5	70,7	81,8	92,0
Německo	63,1	62,0	62,5	68,2	95,4
Rakousko– –Uhersko	20,8	23,4	24,6	25,5	26,9
$\Sigma(U+V)$	199,2	204,8	214,9	238,7	289,0
$\Delta(U+V)$		5,6	10,1	23,8	50,3
Průměr	202,0	209,8	226,8	263,8	

Tabulka 2.1: Rozpočty na obranu států v letech 1909–1913. Průměr značí průměrnou hodnotu rozpočtů aliancí ve dvou po sobě jdoucích letech. Zdroj: [1][strana 403]

Rovnost (2.1.8) jsme obdrželi tak, že jsme sečetli rovnice systému (2.1.7). To jsme udělali proto, že v tabulce 2.1 máme rozpočty jednotlivých zemí na obranu a můžeme pohodlně pracovat se součtem rozpočtů všech zemí v daném roce. Sledujeme, jak se součet rozpočtů od roku 1909 do roku 1913 zvyšuje, tj. „ $\Delta(U+V)$ “, a jaký je průměrný rozpočet za dva roky, tj. „Průměr“. Z tabulky 2.1 si tedy vezmeme data z posledních dvou řádků - průměrné hodnoty versus roční přírůstky - a metodou nejmenších čtverců určíme přímku, která tyto hodnoty nejlépe aproximuje. Jedná se o přímku

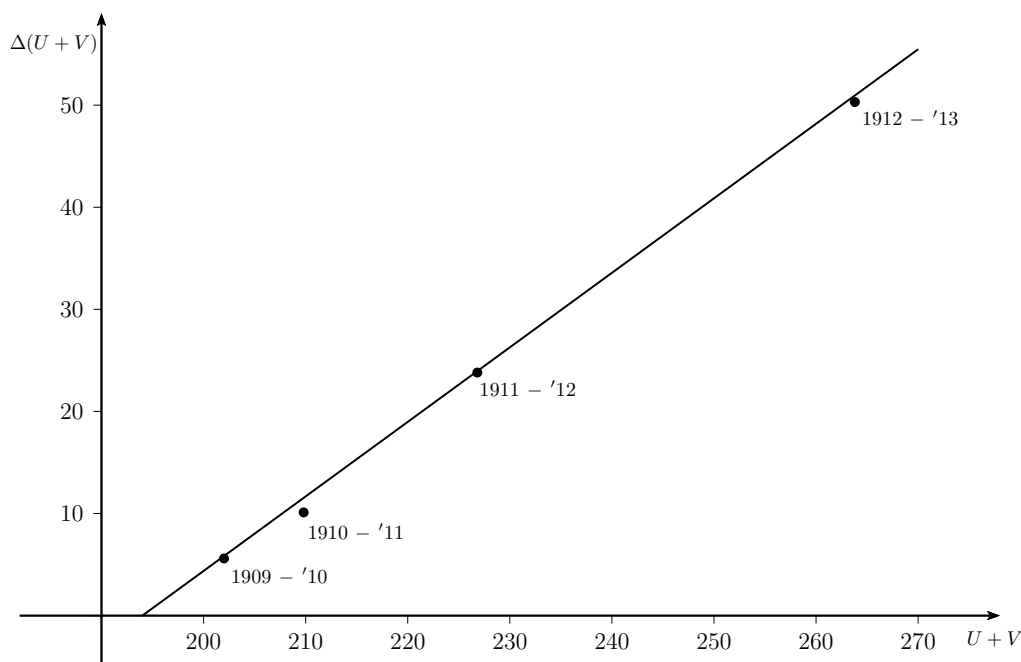
$$\Delta(U+V) = 0,73 \cdot (U+V - 194) \quad (2.1.10)$$

a její graf lze vidět na obrázku 2.1. Všimněme si, že jednotlivé body leží velmi blízko regresní přímkou.

Rovnosti (2.1.9) a (2.1.10) můžeme chápat takto:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}(U+V)}_{\Delta(U+V)} = \underbrace{(k-\alpha)}_{0,73} \cdot \left[\underbrace{U+V}_{U+V} - \underbrace{\left(U_0+V_0 - \frac{g+h}{k-\alpha} - \frac{1}{k-\alpha} \frac{d}{dt}(U_0+V_0) \right)}_{194} \right].$$

Všimněme si, že podle našeho odhadu je $(k-\alpha) = (0,9 - 0,2) = 0,7$, což se jen nepatrně liší od směrnice regresní přímkou (2.1.10). Z rovnice (2.1.10) také plyne, že součet rozpočtů na obranu aliancí poroste, pokud bude vyšší než 194 milionů. To je v souladu s historickým faktem - v roce 1909 byl souhrnný rozpočet na obranu přes 199 milionů a v následujících letech rostl.



Obrázek 2.1: Graf regresní přímky (2.1.10)

2.2 Lanchesterovy modely bitev

Frederick William Lanchester byl anglický polyhistor (člověk se širokým záběrem znalostí) a inženýr. Narodil se v roce 1868 a zemřel v roce 1946. Za svého života významně přispěl k automobilovému inženýrství a aerodynamice. V roce 1904 otestoval první motorový člun poháněný benzínem a v roce 1895 sestavil první motorové vozidlo na čtyřech kolech (viz [9]). Byl to geniální vynálezce, nikdy však nebyl úspěšný obchodník.

Lanchester byl také schopný matematik, přestože matematiku jako takovou nestudoval. Zajímal se o předpovídání výsledků leteckých bitev. Své myšlenky publikoval v několika článcích v roce 1914. Později, v roce 1916, vyšly i v knižní podobě s názvem *Aircraft in Warfare: the Dawn of the Fourth Arm* a obsahovaly sérii diferenciálních rovnic, které se dnes nazývají *Lanchester's Power Laws*. Těmi se budeme zabývat i my, nebudeme je ovšem vztahovat na letecké bitvy; zaměříme se na pozemní souboje konvenčních armád a partyzánských odbojů. Tyto rovnice vyřešíme a odvodíme tzv. Lanchester's square law, což je tvrzení, že síla moderní armády (např. v první či druhé světové válce) je úměrná druhé mocnině počtu vojáků, kteří vstupují do bitvy.

Konstrukce modelu

Předpokládejme, že spolu bojují dvě armády X a Y. Pro zjednodušení definujeme sílu těchto armád jako počet jejich vojáků. Tudíž $x(t)$ a $y(t)$ značí počet vojáků armády X a Y a t měříme ve dnech od započetí bitvy. Změna počtu vojáků na každé straně je rovna jejich

míře *posil* mínus *provozní ztráty* mínus *bojové ztráty*.

- *Provozní ztráty* jsou způsobené ne-válečnými nehodami, jako například dezerce, nemoci a podobně. Lanchester navrhl položit provozní ztráty jako úměrné k síle armády. To se ale nezdá příliš pravděpodobné, protože například míra dezerce závisí na psychologických a dalších nehmotných faktorech, které se těžko definují, natož kvantifikují. My si práci zjednodušíme tak, že budeme uvažovat pouze bitvy, kde jsou provozní ztráty zanedbatelné.
- *Bojové ztráty* jsou pro konvenční armádu a partyzánský odboj různé. Nejprve předpokládejme, že X je konvenční armáda a že operuje na relativně otevřeném prostranství a že každý voják této armády je „na dostřel“ nepřítele Y. Dále předpokládáme, že jakmile konvenční armáda utrpí nějaké ztráty, je střelba soustředěna na zbylé vojáky této armády. Za těchto ideálních podmínek jsou bojové ztráty konvenční armády X rovny $-ay(t)$, kde a je nějaká kladná konstanta. Tato konstanta se nazývá *bojová efektivita* armády Y. Situace je zcela odlišná, pokud je X partyzánský odboj, který okupuje oblast R . V tomto případě jsou partyzáni pro svého nepřítele „neviditelní“. Armáda Y střílí do R , ale neví, kdy nějakého partyzána zastřelí. Zdá se pravděpodobné, že bojové ztráty partyzánského odboje jsou úměrné počtu partyzánů $x(t)$, protože čím víc jich je, tím se hůř skryjí. Zároveň jsou však bojové ztráty partyzánů úměrné počtu nepřítele $y(t)$, protože čím víc jich je, tím víc střílí a tím se zvyšuje pravděpodobnost zastřeleného partyzána. Dostáváme tak, že bojové ztráty partyzánského odboje jsou rovny $-cx(t)y(t)$, kde c je kladná konstanta a nazývá se *bojová efektivita* armády Y.
- *Míra posil* je míra, s jakou přicházejí každé armádě posily. Tuto míru značíme u armády X jako $f(t)$, u Y jako $g(t)$.

Za těchto předpokladů můžeme sepsat dva Lanchestrovské modely, které budeme dále zkoumat:

$$\text{Souboj konvenčních armád:} \quad \begin{aligned} x' &= -ay + f(t) \\ y' &= -bx + g(t) \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

$$\text{Konvenční Y vs. partyzáni X:} \quad \begin{aligned} x' &= -cxy + f(t) \\ y' &= -dx + g(t) \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Systém rovnic (2.2.1) je lineární systém a jakmile známe a , b , $f(t)$, a $g(t)$, můžeme jej explicitně vyřešit. Systém rovnic (2.2.2) není lineární a jeho řešení je mnohem složitější (lze jej získat pouze s pomocí počítače).

Je velmi poučné prozkoumat případ, kdy obě armády nemají žádné posily. Tato situace nastane, jsou-li obě armády izolované. Systémy (2.2.1) a (2.2.2) tak přejdou v jednodušší systémy

$$\begin{aligned} x' &= -ay & \text{a} & & x' &= -cxy \\ y' &= -bx & & & y' &= -dx. \end{aligned}$$

Souboj konvenčních armád (bez posil)

Máme systém

$$\begin{aligned}x' &= -ay \\ y' &= -bx.\end{aligned}\tag{2.2.3}$$

Ten jsme již řešili v kontextu Richardsonovy teorie konfliktů. Nyní má ale záporné koeficienty na pravých stranách rovnic (2.2.3). Vlastní čísla jsou

$$\lambda_1 = \sqrt{ab}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{ab},$$

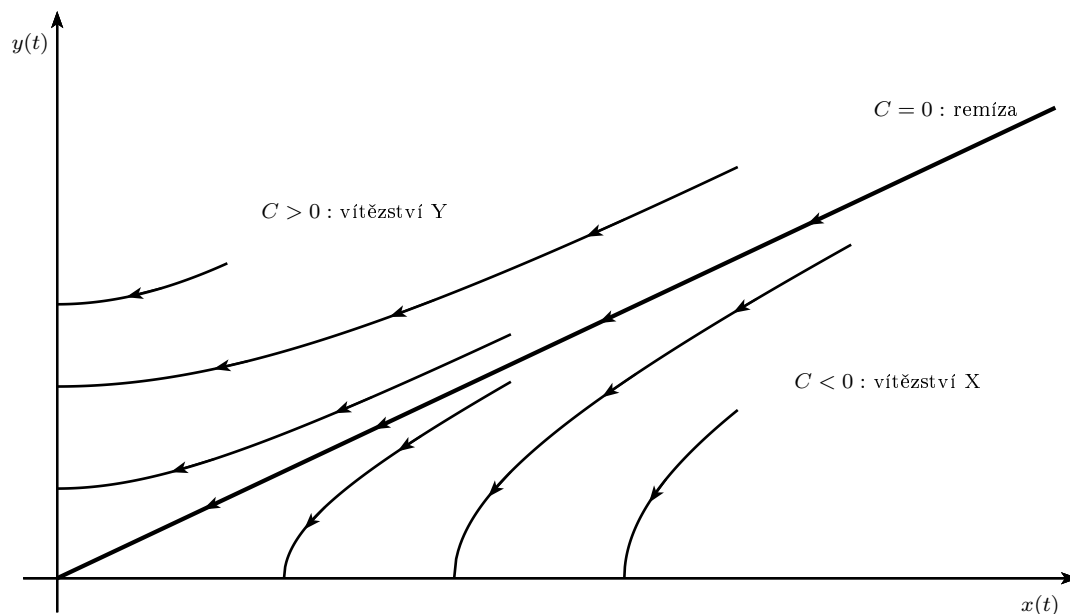
a tedy jediný stacionární bod $[0, 0]$ je typu sedlo. Určíme trajektorie co by integrální křivky:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{-bx}{-ay}, \\ \int ay \, dy &= \int bx \, dx, \\ a\frac{y^2}{2} + c_1 &= b\frac{x^2}{2} + c_2,\end{aligned}$$

což po úpravě a označení $C = 2(c_2 - c_1)$ dává

$$ay^2 - bx^2 = ay_0^2 - bx_0^2 = C.\tag{2.2.4}$$

Rovnost (2.2.4) definuje ve fázové rovině jistou množinu hyperbol. Viz obrázek 2.2. Šípky na jednotlivých trajektoriích ukazují, jak se s časem mění síla jednotlivých armád.



Obrázek 2.2: Trajektorie systému (2.2.3).

Zvolme kritérium, že jedna strana vyhraje, pokud je druhá strana vyhlazena. Pak Y vyhraje, pokud je $C > 0$; tedy armáda X bude vyhlazena a z rovnice (2.2.4) plyne, že

armáda Y bude zredukována na $\sqrt{\frac{C}{a}}$ vojáků. Podobně, X vyhraje, pokud je $C < 0$ a počet jejich vojáků po bitvě bude $\sqrt{\frac{-C}{b}}$.

Armáda Y potřebuje, aby na začátku bitvy platila nerovnost

$$ay_0^2 > bx_0^2.$$

Toho lze dosáhnout buď zvýšením koeficientu a ; např. používat silnější a přesnější zbraně, lépe vycvičit vojáky atd. nebo zvýšit počáteční počet vojáků y_0 . Všimněme si, že zdvojnásobení bojové efektivity a dává zdvojnásobení hodnoty ay_0^2 , kdežto zdvojnásobení počátečního počtu vojáků y_0 dává **čtyřnásobek** hodnoty ay_0^2 ! Tomuto faktu se říká *Lanchester's square law*.

Konvenční armáda versus partyzánský odboj (bez posil)

Máme systém

$$\begin{aligned} x' &= -cxy \\ y' &= -dx. \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Tento systém má přímku stacionárních bodů - x -nulkliny jsou přímky $x = 0$ a $y = 0$, y -nulklina je pouze jedna přímka $x = 0$; průnik těchto nulklin je přímka $x = 0$! V Kapitole 1 jsme nezavedli potřebnou teorii pro práci s přímkami stacionárních bodů.

Nicméně, můžeme určit rovnice trajektorií tohoto systému:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{-dx}{-cxy} = \frac{d}{cy} \\ cydy &= d dx \\ c \frac{y^2}{2} + c_1 &= dx + c_2, \end{aligned}$$

což po úpravě a označení $C = 2(c_2 - c_1)$ dává

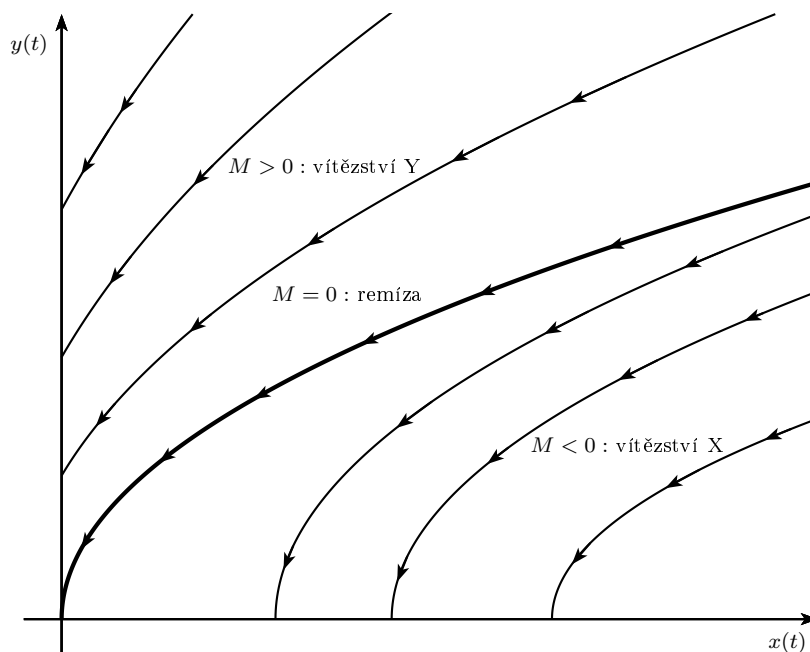
$$cy^2 - 2dx = C. \tag{2.2.6}$$

Rovnice (2.2.6) definuje jistou množinu parabol ve fázové rovině. Jejich grafy lze vidět na obrázku 2.3. Konvenční armáda Y vyhraje, pokud je $C > 0$; tedy partyzáni X budou vyhlazeni a z rovnice (2.2.6) plyne, že armáda Y bude zredukována na $\sqrt{\frac{M}{c}}$ vojáků. Podobně, partyzáni vyhrají, pokud bude platit $C < 0$.

Většinou je nemožné určit bojové koeficienty a, b, c, d před bitvou. Mohlo by se tedy zdát, že Lanchesterův model je ztěžší použitelný v praxi. Nicméně, jak dále uvidíme, často lze tyto koeficienty určit z dat bitvy, která již proběhla. Jakmile hodnoty koeficientů známe pro jednu bitvu, známe je i pro další bitvy, které jsou vedeny za podobných podmínek!

Bitva o ostrov Iwo Jima

Jedna z nejuživějších bitev Druhé světové války se odehrála na ostrově Iwo Jima, 660 mil na jih od Tokia. Síly spojenců shledaly ostrov jako ideální základnu blízko japonské pevniny



Obrázek 2.3: Trajektorie systému (2.2.5).

pro bombardéry, zatímco Japonci ostrov potřebovali jako základnu pro bojová letadla, která odrážela letecké útoky spojenců na velká města Japonska.

Americká invaze začala 19. února 1945 a zuřivé boje trvaly celý měsíc. Obě strany utrpěly těžké ztráty. Japonci měli rozkaz bojovat do posledního muže a přesně to také udělali. Ostrov byl Američany dobyt 28. den bitvy, a veškeré bojové aktivity ustaly 36. den. Poslední dva japonští přeživší se vzdali až v roce 1949!

Následující data jsou dostupná z bitvy o ostrov Iwo Jima:

- *Posily.* Během bitvy Japonské jednotky neměly žádné posily. Naopak Američané první den přistáli se čtyřiapadesáti tisíci vojáky, třetí den dorazilo dalších 6 000 vojáků a šestý den 13 000 vojáků. Na ostrově nebyli žádní Američtí vojáci před zahájením dobývání.
- *Bojové ztráty.* Kpt. Clifford Morehouse z Námořní pěchoty Spojených států každý den zaznamenával počty všech Amerických bojových ztrát (viz [10]). Naneštěstí, žádné podobné záznamy pro Japonské jednotky neexistují. Nejpravděpodobněji byly tyto záznamy (tvořené generálem Kuribayashim, velitelem japonských jednotek na ostrově) zničeny přímo v bitvě a záznamy tvořené v Tokiu byly ztraceny během bombardování v dalších pěti měsících války. Nicméně, z tabulky můžeme usoudit, že na začátku bitvy bylo na ostrově přibližně 21 500 japonských vojáků. (Ve skutečnosti Newcomb uvádí hodnotu 21 000, což je ale málo, protože nejspíše nezahrnul některé přeživší a mrtvé ukrývající se v jeskyních v posledních dnech bitvy).
- *Provozní ztráty.* Tyto ztráty byly na obou stranách zanedbatelné.

Nechť $x(t)$ představuje počet aktivních amerických jednotek na ostrově v den t a nechť

Celkové ztráty Spojených států na ostrově Iwo Jima				
	Mrtví a pohřešovaní	Zranění	Bojová únava	Celkem
Námořní pěchota	5 931	17 272	2 648	25 851
Námořní jednotky:				
Lodě a letadla	633	1 158		1 791
Zdravotní jednotky	195	529		724
Seabees	51	218		37
Doktoři a zubaři	2	12		14
Armádní jednotky	9	28		37
Celkem	6 821	19 217	2 648	28 686

Ztráty Japonska na ostrově Iwo Jima			
Obranné jednotky (odhad)		Zajatci	Mrtví
21 000	Námořní pěchota	216	20 000
	Armáda	867	
	Součet	1 083	

Tabulka 2.2: Ztráty na ostrově Iwo Jima. Zdroj: [1]

$y(t)$ představuje počet japonských jednotek na ostrově v den t . Z faktů uvedených výše playne následující model bitvy o ostrov Iwo Jima:

$$\begin{aligned}x' &= -ay + f(t) \\ y' &= -bx,\end{aligned}\tag{2.2.7}$$

kde a, b jsou koeficienty bojové efektivity amerických a japonských jednotek, a

$$f(t) = \begin{cases} 54\,000 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & 1 \leq t < 2 \\ 6\,000 & 2 \leq t < 3 \\ 0 & 3 \leq t < 5 \\ 13\,000 & 5 \leq t < 6 \\ 0 & 6 \leq t \end{cases}\tag{2.2.8}$$

Řešení této soustavy budeme hledat podobně jako dříve, akorát nyní nám v první rovnici systému (2.2.7) komplikuje situaci člen $f(t)$. Nicméně, vyjádřením x z druhé rovnice, dosazením do první rovnice a úpravou dostaneme jednu diferenciální rovnici druhého řádu

$$y'' - aby = f(t).\tag{2.2.9}$$

Pomocí metody variace konstanty určíme řešení $y(t)$ a následně, dosazením do druhé rovnice, i $x(t)$:

$$\begin{aligned}x(t) &= -\sqrt{\frac{a}{b}}y_0 \cosh \sqrt{ab}t + \int_0^t \sinh \sqrt{ab}(t-s)f(s)ds, \\y(t) &= y_0 \cosh \sqrt{ab}t - \sqrt{\frac{b}{a}} \int_0^t \sinh \sqrt{ab}(t-s)f(s)ds,\end{aligned}\tag{2.2.10}$$

kde

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{a} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Nyní vyvstává otázka, zda-li existují konstanty a a b takové, že řešení $x(t)$ má podobný průběh, jako data sesbíraná kpt. Morehousem. Jedná se o velice důležitou otázku. Pokud by takové konstanty existovaly, znamenalo by to, že Lanchesterovy modely skutečně popisují reálné bitvy, zatímco v opačném případě by většina Lanchesterovy práce přišla nazmar.

Jak už jsme zmínili, je velice obtížné spočítat koeficienty bojové efektivity a , b . Pokud ale známe data z bitvy, jak je to v případě bitvy o ostrov Iwo Jima, můžeme tyto koeficienty dobře odhadnout.

Výpočet koeficientů a a b . Integrováním druhé rovnice systému (2.2.7) od $t = 0$ po $t = s$ dostáváme

$$y(s) - y_0 = -b \int_0^s x(t) dt,$$

tedy

$$b = \frac{y_0 - y(s)}{\int_0^s x(t) dt}.$$

Položíme-li $s = 36$, dostáváme

$$b = \frac{21\,500}{\int_0^{36} x(t) dt}.$$

Integrál na pravé straně můžeme aproximovat Riemannovou sumou (tzv. numerická integrace):

$$\int_0^{36} x(t) dt \cong \sum_{i=1}^{36} x(i),$$

kde za $x(i)$ dosazujeme počet Amerických vojáků na ostrově i -tý den bitvy. Použitím dat od kpt. Morehouse dostáváme hodnotu pro b :

$$b = \frac{21\,500}{2037\,000} = 0,0106.$$

Bylo by lepší vzít $s = 28$, protože to byl den, kdy byl ostrov prohlášen za dobytý. My ale hodnotu $y(28)$ neznáme. Proto jsme nuceni vzít $s = 36$.

Integrováním první rovnice systému (2.2.7) od $t = 0$ po $t = 28$ dostáváme

$$x(28) - x_0 = -a \int_0^{28} y(t) dt + \int_0^{28} f(t) dt,$$

$$x(28) = -a \int_0^{28} y(t) dt + 73\,000.$$

Z dat kpt. Morehouse víme, že 28. den bitvy bylo na ostrově 52 735 Amerických vojáků, tedy

$$a = \frac{73\,000 - x(28)}{\int_0^{28} y(t) dt} = \frac{73\,000 - 52\,735}{\int_0^{28} y(t) dt} = \frac{20\,265}{\int_0^{28} y(t) dt}.$$

Integrál $\int_0^{28} y(t) dt$ aproximujeme Riemannovou sumou

$$\int_0^{28} y(t) dt \cong \sum_{j=1}^{28} y(j)$$

a $y(j)$ aproximujeme pomocí

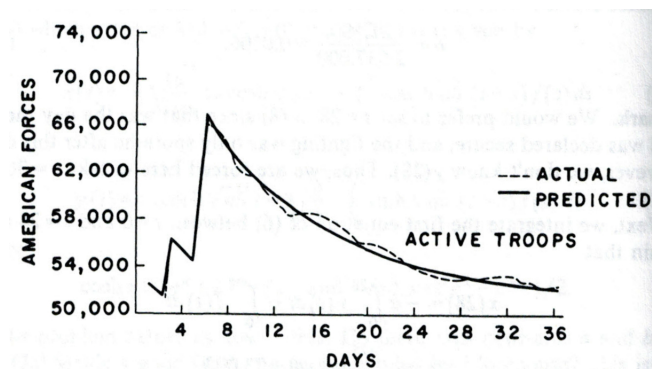
$$y(j) = y_0 - b \int_0^j x(t) dt \cong$$

$$\cong 21\,500 - b \sum_{i=1}^j x(i).$$

Za $x(i)$ dosadíme počet amerických vojáků i -tý den na ostrově. Výsledek tohoto výpočtu je

$$a = \frac{20\,265}{372\,500} = 0,0544.$$

Obrázek 2.4 porovnává skutečnou sílu Amerických jednotek s hodnotami vycházejících z řešení $x(t)$ z (2.2.10). Shoda je fascinující. Takže to vypadá, že Lanchesterovy modely vskutku popisují skutečné bitvy.



Obrázek 2.4: Srovnání skutečného a vypočteného počtu Amerických vojáků v bitvě o Iwo Jima. Zdroj: [1]

2.3 Zákon konkurenčního vyloučení

V přírodě lze často pozorovat, že souboj o existenci mezi dvěma podobnými druhy populací bojujících o stejný zdroj potravy a obývajících stejné území téměř vždy končí úplným vyhubením jedné z populací. Tento fenomén je znám jako *zákon konkurenčního vyloučení*, nebo též *zákon džungle*. První jej popsal Darwin v roce 1859. Ve svém spise „O původu druhů přirozeným výběrem“ píše:

„Dvě populace stejného druhu mají často, ačkoliv v žádném případě vyhradně, mnoho podobných zvyků, podobné složení a podobnou strukturu a jejich střet tím bývá mnohem silnější, pokud spolu začnou bojovat o přežití, než kdyby se jednalo o populace rozdílných druhů.“

Existuje velmi zajímavé biologické vysvětlení principu konkurenčního vyloučení. Jádrem této teorie tkví v myšlence *ekologické niky*. Ekologická nika je souhrn životních podmínek populace daného druhu. Jsou tím myšleny její zvyky, potrava, způsob života, prostředí, ve kterém existuje a podobně. Bylo pozorováno, že v důsledku konkurence dva podobné druhy zřídka obývají stejnou niku. Spíše každý druh pojídá takovou potravu a vede takový způsob života, ve kterém má výhodu oproti konkurentům. Pokud mají dva druhy tendenci okupovat stejnou niku, jejich souboj bude velmi intenzivní a vyústí ve vyhubení slabšího z druhů.

Skvělá ilustrace této teorie je kolonie rybáků (druh ptáků) obývajících ostrov Dzharlyhach v Černém moři. Tato kolonie obsahuje čtyři rozdílné druhy rybáků: rybák severní (*Sterna sandvicensis*), rybák obecný (*Sterna hirundo*), rybák malý (*Sternula albifrons*) a rybák černožobý (*Sterna anglica*). Tyto čtyři druhy spolu koexistují, aby odháněly pryč predátory z jejich kolonie. Nicméně, mezi jednotlivými druhy jsou co do získávání potravy značné rozdíly. Rybák severní létá daleko do otevřeného moře, aby lovil konkrétní druhy ryb, zatímco rybák černožobý se živí výhradně na pevnině. Rybák obecný a rybák malý chytají ryby blízko pobřeží. Rybák malý si zajišťuje potravu v mělkých bažinatých místech, kdežto rybák obecný loví dál od pobřeží. V tomto smyslu žijí tyto čtyři druhy rybáků na malém ostrově bok po boku. Každý má niku, ve které má výhodu nad svými konkurenty.

V této sekci představíme matematický důkaz principu konkurenčního vyloučení za podmínky, že alespoň jedna ze dvou populací je silným konkurentem druhé populace. Toho docílíme tak, že odvodíme systém diferenciálních rovnic popisujících růst dvou podobných populací, které si vzájemně konkurují, a ukážeme, že každý rovnovážný stav takového systému zahrnuje pouze jednu z populací, zatímco druhá je vyhubena.

K sestavení modelu popisujícího konkurenční souboj dvou populací, potřebujeme jednak vztah pro růst populace, druhak vztah pro pokles populace v důsledku konkurence.

Jeden z nejstarších modelů růstu populace je tzv. Malthusiánský model:

$$x' = ax,$$

kde $a > 0$. Říká, že přírůstek populace je přímo úměrný počtu jedinců v populaci. Ovšem takovým tempem by populace rostla do nekonečna a to zřejmě není možné. Každý potřebuje prostor a potravu, aby přežil, a toho je vždy omezené množství. Tuto skutečnost (že jedinci

spolu soupeří o prostor, potravu atd.) vezmeme v úvahu přidáním členu $-bx^2$ ($b > 0$), neboť průměrný počet střetnutí dvou jedinců je úměrný x^2 . Dostáváme rovnici

$$x' = ax - bx^2. \quad (2.3.1)$$

Rovnice (2.3.1) se nazývá logistická rovnice a má pozoruhodné vlastnosti. Jedná se o diferenciální rovnici prvního řádu se separovanými proměnnými. Jinými slovy, je třeba vyřešit rovnici

$$\frac{dx}{x(a - bx)} = dt.$$

Integrovaním obou stran a následnou úpravou obdržíme řešení

$$x(t) = \frac{ae^{a(t+c)}}{1 + be^{a(t+c)}} = \frac{a}{e^{-a(t+c)} + b}$$

Funkce $x(t)$ tedy určuje, jak se v čase mění počet jedinců v populaci, když mezi sebou jedinci bojují o životní prostor. Všimněme si, že jak jde t do nekonečna

$$x(t) \rightarrow \frac{a}{b}.$$

Tedy, nehledě na počáteční podmínky, populace se vždy bude blížit ke své limitní hodnotě $\frac{a}{b}$. O dalších vlastnostech logistické rovnice se čtenář může dočíst v již zmíněné publikaci [1].

Nyní je třeba přidat k rovnici (2.3.1) člen vyjadřující konkurenci. Protože průměrný počet střetnutí dvou konkurujících si jedinců je úměrný $x \cdot y$, doplníme rovnici (2.3.1) členem $-cxy$, $c > 0$.

Pro druhou populaci lze sestavit analogickou rovnici. Získáváme tak systém

$$\begin{aligned} x' &= ax - bx^2 - cxy \\ y' &= \alpha y - \beta y^2 - \gamma xy. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

popisující konkurenční souboj dvou populací na jednom území.

Než se pustíme do analýzy modelu, ještě si zavedeme pojmy *specifická míra růstu* a *invazní parametr*, které nám vzápětí budou užitečné.

K tomu přepíšeme systém (2.3.2) následovně:

$$\begin{aligned} x' &= (a - bx - cy)x \\ y' &= (\alpha - \beta y - \gamma x)y. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Specifická míra růstu je relativní změna populace za jednotku času. Obecně se může jednat o veličinu, která závisí jak na velikosti populace, tak na čase. V našem případě ale uvažujeme populace, které žijí v prostředí s neměnnými podmínkami. V takovém případě závislost na čase neuvažujeme. Specifická míra růstu populace potom uvádá změnu velikosti populace o velikosti x za jednotku času. Vývoj takové populace v čase je pak dán rovnicí

$$x' = x \cdot \mu(x, y).$$

Specifická rychlost růstu $\mu(0, 0)$ odpovídá stavu, kdy do neosídleného území pronikne několik jedinců a ti se zde začnou množit rychlostí $\mu(0, 0)$. Proto se $\mu(0, 0)$ nazývá *invazní parametr* populace x do stavu $(0, 0)$. Aby velikost populace začala růst, musí být $\mu(0, 0) > 0$.

Analýza modelu

První nalezneme nulkliny systému (2.3.2), poté pomocí průsečíků nulklin určíme stacionární body a nakonec tyto stacionární body klasifikujeme pomocí linearizace systému (2.3.2).

Nulkliny. Z (2.3.3) vidíme, že systém (2.3.2) má celkem 4 křivky nulklin - dvě pro funkci x a dvě pro funkci y . Nulklina funkce x jsou dvě přímky:

$$a - bx - cy = 0, \quad (n_{1x})$$

$$x = 0. \quad (n_{2x})$$

Nulklina funkce y jsou rovněž dvě přímky:

$$\alpha - \beta y - \gamma x = 0, \quad (n_{1y})$$

$$y = 0. \quad (n_{2y})$$

Stacionární body. Z rovnic (n_{2x}) a (n_{2y}) dostáváme ekvilibrum $(0, 0)$, z rovnic (n_{2x}) a (n_{1y}) dostáváme ekvilibrum $(0, \frac{\alpha}{\beta})$, z rovnic (n_{1x}) a (n_{2y}) dostáváme ekvilibrum $(\frac{a}{b}, 0)$ a z rovnic (n_{2x}), (n_{2y}) dostáváme ekvilibrum $(\frac{a\beta - c\gamma}{b\beta - c\gamma}, \frac{b\alpha - a\gamma}{b\beta - c\gamma})$. Celkem tedy máme čtyři stacionární body:

$$S_1 = (0, 0),$$

$$S_2 = \left(0, \frac{\alpha}{\beta}\right),$$

$$S_3 = \left(\frac{a}{b}, 0\right),$$

$$S_4 = \left(\frac{a\beta - c\alpha}{b\beta - c\gamma}, \frac{b\alpha - a\gamma}{b\beta - c\gamma}\right).$$

Klasifikace stacionárních bodů. Jacobiho matice systému (2.3.2) je

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} a - 2bx - cy & -cx \\ -\gamma y & \alpha - 2\beta y - \gamma x \end{pmatrix}. \quad (2.3.4)$$

Nejjednodušší je klasifikovat bod $S_1 = (0, 0)$.

$$J(S_1) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla této matice, $\lambda_1 = a$ a $\lambda_2 = \alpha$, jsou obě kladná a bod S_1 je nestabilní uzel. Specifická míra růstu populace x je $\mu(x, y) = a - bx - cy$ (vidíme z první rovnice (2.3.3)). Bod S_1 odpovídá stavu, kdy se v prostředí nevyskytuje ani jedna z populací. Pronikne-li do takového prostředí malé množství jedinců populace x , začnou se množit rychlostí $\mu(0, 0) = a$. Invazní parametr do takového prostředí je tedy kladný a populace začne růst.

Analogicky, specifická míra růstu populace y je $v(x, y) = \alpha - \beta y - \gamma x$ a invazní parametr v bodě $(0, 0)$ pro populaci y je $v(0, 0) = \alpha > 0$. Tedy i populace y se uchytí.

Bod $S_2 = (0, \frac{\alpha}{\beta})$ odpovídá stavu, kdy se v prostředí nachází pouze populace y . Růst populace y se v takovém případě řídí logistickou rovnicí $y' = \alpha y - \beta y^2$ a populace se při každé změně své velikosti vždy vrátí na limitní hodnotu $\frac{\alpha}{\beta}$, viz [2].

Prozkoumejme nyní co se stane, pronikne-li do takového prostředí malé množství populace x . Invazní parametr populace x do stavu S_2 je $\mu(0, \frac{\alpha}{\beta}) = a - c\frac{\alpha}{\beta} = c(\frac{a}{c} - \frac{\alpha}{\beta})$. Tento výraz je kladný, jestliže

$$\frac{a}{c} > \frac{\alpha}{\beta},$$

tedy pokud je parametr c (charakterizující mezidruhovou konkurenci) dostatečně malý. Potom se populace x uchytí a začne se rozmnožovat. Pokud by platilo $\frac{a}{c} < \frac{\alpha}{\beta}$, tzn. invazní parametr by byl záporný, populace x začne vymírat a systém se vrátí do stacionárního bodu S_2 .

Jacobiho matice v bodě S_2 je

$$J(0, \frac{\alpha}{\beta}) = \begin{pmatrix} a - c\frac{\alpha}{\beta} & 0 \\ -\gamma\frac{\alpha}{\beta} & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla této matice jsou $\lambda_1 = -\alpha$ a $\lambda_2 = c(\frac{a}{c} - \frac{\alpha}{\beta})$. Platí-li nerovnost $\frac{a}{c} > \frac{\alpha}{\beta}$, je $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ a bod S_2 je sedlo. V opačném případě je bod S_2 stabilní uzel.

Bod $S_3 = (\frac{a}{b}, 0)$ odpovídá podobnému stavu jako bod S_2 , akorát role populací x a y jsou prohozené. V prostředí se nyní nachází pouze populace x , změna její velikosti je řízena rovnicí $x' = ax - bx^2$ a je ustálena na limitní hodnotě $\frac{a}{b}$. Invazní parametr populace y do stavu S_3 je $v(\frac{a}{b}, 0) = \alpha - \gamma\frac{a}{b} = \gamma(\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{a}{b})$ a je kladný, když

$$\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{a}{b},$$

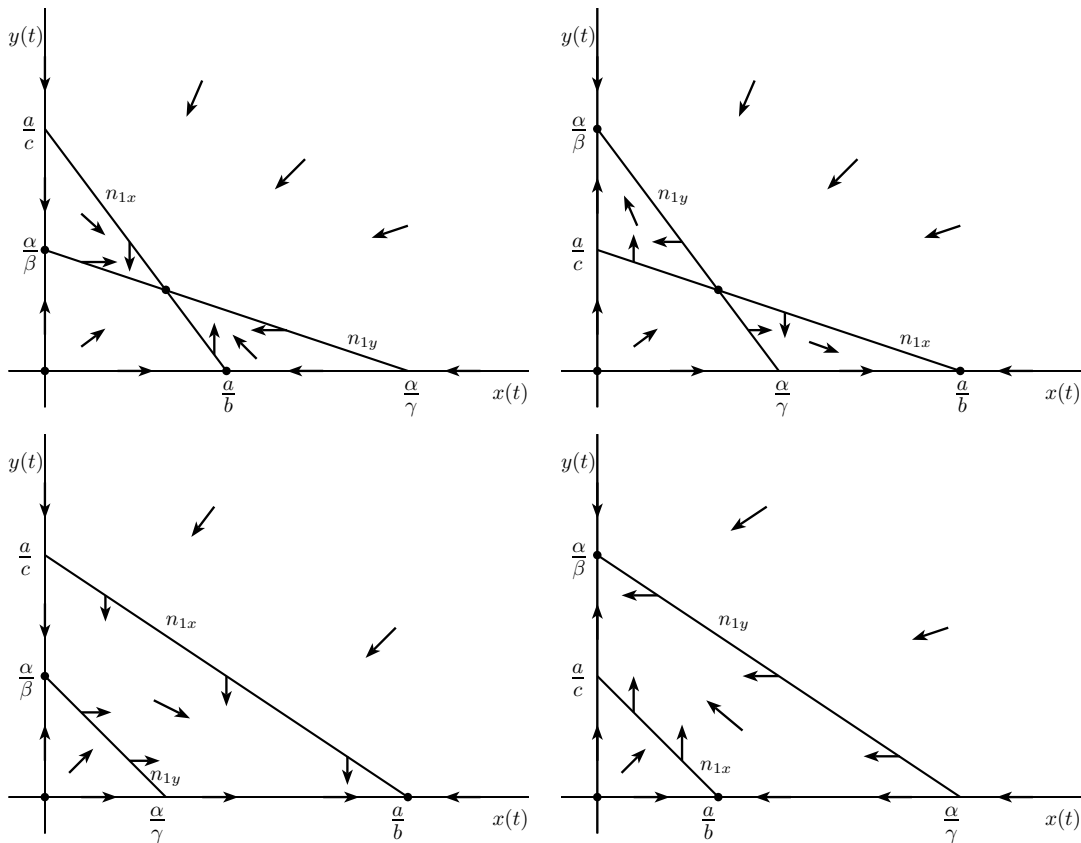
tedy pokud je parametr γ (charakterizující mezidruhovou konkurenci) dostatečně malý. Platí-li tato nerovnost, je bod S_3 sedlo a populace y se v případě proniknutí do stavu S_3 začne rozmnožovat. V opačném případě se jedná o stabilní uzel a populace y se při proniknutí do stavu S_3 neuchytí.

Bod $S_4 = (\frac{a\beta - c\alpha}{b\beta - c\gamma}, \frac{b\alpha - a\gamma}{b\beta - c\gamma})$ může mít záporné souřadnice a v takovém případě by nás vůbec nezajímalo (populace o záporné velikosti nedává smysl). Vyřešme tedy otázku, kdy má bod S_4 kladné souřadnice.

Bod S_4 jsme získali jako průsečík nulklín (n_{1x}) a (n_{1y}) . Nulklína (n_{1x}) protíná osu y v bodě $(0, \frac{a}{c})$ a osu x v bodě $(\frac{a}{b}, 0)$. Nulklína (n_{1y}) protíná osu y v bodě $(0, \frac{\alpha}{\beta})$ a osu x v bodě $(\frac{\alpha}{\gamma}, 0)$.

Bod S_4 leží v prvním kvadrantu právě tehdy, když platí zároveň obě nerovnosti $\frac{a}{c} > \frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{a}{b}$, nebo ani jedna. Situace je zřejmá z obrázku 2.5.

Dále uvažujme pouze případ, kdy jsou souřadnice bodu S_4 kladné. Jacobiho matice



Obrázek 2.5: Čtyři možné případy vzájemných poloh x - a y -nulklin.

má tvar

$$\begin{aligned} J(x, y) &= \begin{pmatrix} a - 2bx - cy & -cx \\ -\gamma y & -\alpha - 2\beta y - \gamma x \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (a - bx - cy) - bx & -cx \\ -\gamma y & (\alpha - \beta y - \gamma x) - \beta y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dosadíme-li do ní bod $S_4 = (s_{4x}, s_{4y})$, dostaneme matici

$$J(S_4) = \begin{pmatrix} -bs_{4x} & -cs_{4x} \\ -\gamma s_{4y} & -\beta s_{4y} \end{pmatrix} \quad (2.3.5)$$

neboť bod S_4 je řešením soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} a - bx - cy &= 0 \\ \alpha - \beta y - \gamma x &= 0. \end{aligned}$$

Vlastní čísla matice (2.3.5) jsou

$$\lambda_{12} = \frac{-(bs_{4x} + \beta s_{4y}) \pm \sqrt{(bs_{4x} + \beta s_{4y})^2 - 4s_{4x}s_{4y}(b\beta - c\gamma)}}{2}. \quad (2.3.6)$$

Obě vlastní čísla jsou reálná, což se ověří analogicky, jako jsme to ověřili dříve v Richardsonově teorii konfliktů.

Výraz $-(bs_{4x} + \beta s_{4y})$ je záporný, neboť výraz uvnitř závorky je kladný. Buď jsou tedy obě vlastní čísla záporná, nebo mají opačná znaménka. Takže bod S_4 je stabilní uzel, nebo sedlo. Vše závisí na znaménku výrazu $(b\beta - c\gamma)$ pod odmocninou v (2.3.6).

Předpokládejme, že platí obě nerovnosti

$$\frac{a}{c} > \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{a} \quad \frac{\alpha}{\gamma} > \frac{a}{b}. \quad (2.3.7)$$

Potom

$$\beta > \alpha \frac{c}{a}, \quad b > a \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Dále

$$b\beta > \frac{a\gamma c\alpha}{a\alpha} = c\gamma,$$

tedy

$$b\beta - c\gamma > 0.$$

Z toho plyne, že výraz $(bs_{4x} + \beta s_{4y})^2$ pod odmocninou v (2.3.6) zmenšíme o nějaké číslo, takže hodnota celé odmocniny v (2.3.6) bude menší než $(bs_{4x} + \beta s_{4y})$ a obě vlastní čísla budou záporná. Platí-li tedy obě nerovnosti (2.3.7), jedná se o stabilní uzel. To znamená, že při náhodném vychýlení z rovnovážného stavu S_4 , který se nachází někde uvnitř prvního kvadrantu, se obě populace zase vrátí do stabilní koexistence v bodě S_4 .

Nyní předpokládejme, že neplatí ani jedna z nerovností (2.3.7). Z toho plyne, že

$$b\beta < \frac{a\gamma c\alpha}{a\alpha} = c\gamma,$$

a tedy

$$b\beta - c\gamma < 0.$$

Výraz $(bs_{4x} + \beta s_{4y})^2$ pod odmocninou v (2.3.6) zvětšíme o nějaké číslo, takže hodnota celé odmocniny v (2.3.6) bude větší než $(bs_{4x} + \beta s_{4y})$ a vlastní čísla λ_{12} budou opačných znamének. Neplatí-li tedy ani jedna z nerovností (2.3.7), jedná se o sedlo. To naopak znamená, že při náhodném vychýlení z rovnovážného stavu S_4 (který nyní není stabilní) dojde k vyhubení jedné z populací (protože další stacionární body mají vždy jednu souřadnici nulovou) a tedy stav S_4 není udržitelný.

Rekapitulace

Analýzou modelu jsme zjistili, že bod $S_1 = (0, 0)$ je vždy nestabilní uzel.

U bodů S_2, S_3, S_4 záleží, zda-li platí nerovnosti (2.3.7) mezi koeficienty rovnic (2.3.2). Víme, že platí-li první z nich, pak je bod $S_2 = (0, \frac{\alpha}{\beta})$ sedlo a platí-li druhá z nich, pak je bod $S_3 = (\frac{a}{\beta}, 0)$ sedlo. Dále víme, že platí-li obě zároveň, pak bod S_4 leží v prvním kvadrantu a jedná se o stabilní uzel. Za takových podmínek tedy dochází ke stabilní koexistenci dvou populací. Vzpomeňme si ale, že takové podmínky nastávají pouze tehdy, jsou-li koeficienty určující míru konkurence mezi populacemi dostatečně malé! To znamená, že každá populace má svou vlastní niku, ve které má výhodu nad svým konkurentem. Fázový portrét takové situace je na obrázku 2.6.

Dále uvidíme, že je-li vliv jedné populace na druhou příliš negativní, ke stabilní koexistenci nedochází.

Neplatí-li ani jedna z nerovností (2.3.7), pak jsou body S_2 a S_3 stabilní uzly a bod S_4 opět leží v prvním kvadrantu, přičemž nyní se jedná o sedlo. Nyní tedy existuje stav, kdy spolu koexistují dvě populace, totiž stav S_4 . Ale tento stav není stabilní a jakákoliv sebemenší perturbace stav S_4 změní na stav, kdy existuje pouze jedna z populací. Fázový portrét takové situace je na obrázku 2.6.

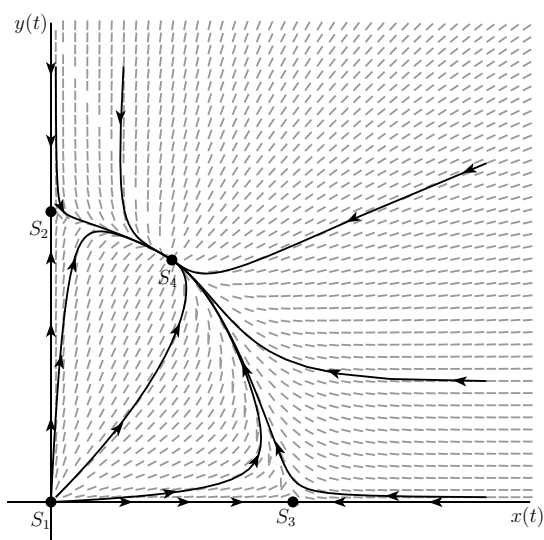
Platí-li právě jedna z nerovností (2.3.7), řekněme třeba

$$\frac{a}{c} > \frac{\alpha}{\beta},$$

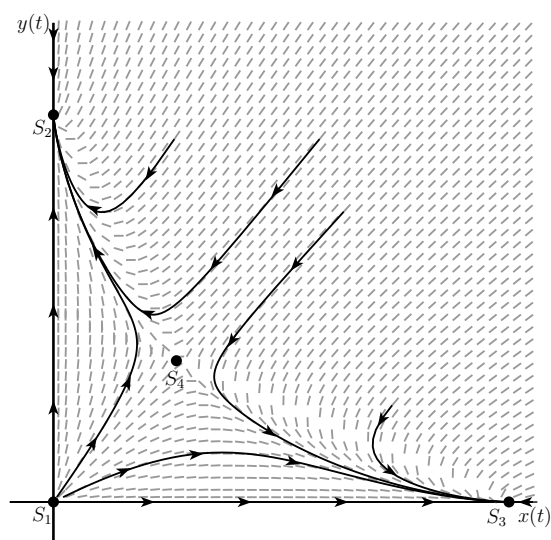
pak je bod S_2 sedlo, a bod S_3 stabilní uzel, přičemž bod S_4 nyní *neleží* v prvním kvadrantu. V takovém případě koexistence obou populací vůbec neexistuje a populace Y v daném prostředí vydrží pouze v případě, že se v něm nenachází populace X. Pronikne-li do takového prostředí populace X, začne okamžitě dominovat a populace Y skončí vyhlazena. Fázový portrét takové situace je na obrázku 2.8.

Analogická situace platí pro případ, kdy platí pouze druhá nerovnost. Fázový portrét této situace je na obrázku 2.8.

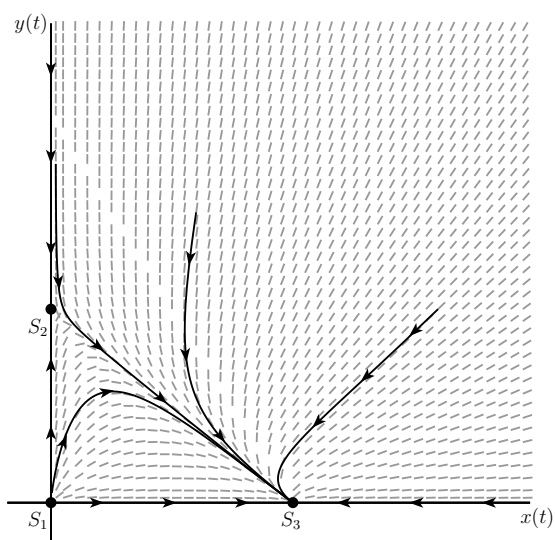
Z matematického hlediska měl tedy Darwin v tomto případě pravdu.



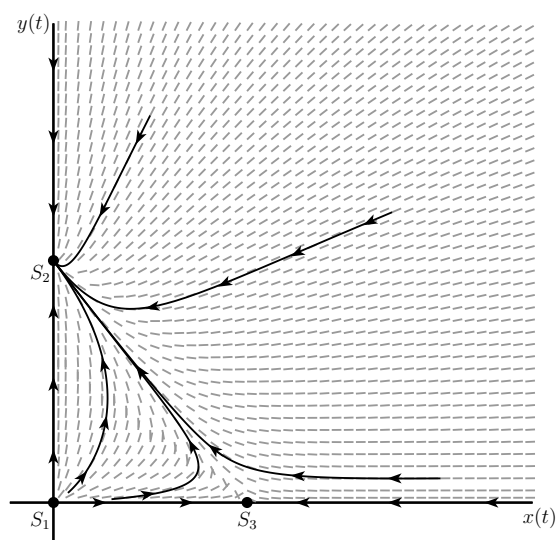
Obrázek 2.6: Slabá konkurence



Obrázek 2.7: Silná konkurence



Obrázek 2.8: Dominance druhu X



Obrázek 2.9: Dominance druhu Y

2.4 Lotkuv-Volterrův model dravec-kořist

Systém diferenciálních rovnic, které si v této sekci představíme, nese v názvu jména dvou matematiků.

Italský fyzik Vito Volterra byl požádán italským biologem Umbertem D'Anconou, aby mu pomohl rozlousknout jeden zapeklitý problém týkající se koexistence ryb v moři. V polovině dvacátých let 20. století D'Ancona zkoumal, jak se mění populace různých druhů ryb, které spolu interagují. V průběhu výzkumu se dostal k datům týkajících se vylovených ryb v Jaderském moři. Konkrétně se jednalo o žraloky, kteří jsou v podmořském světě predátory. Data (poměrná část vylovených žraloků) z přístavu Fiume (dnešní Rijeka) z období 1914–1923 jsou:

1914	1915	1916	1917	1918
11.9%	21.4%	22.1%	21.2%	36.4%
1919	1920	1921	1922	1923
27.3%	16.0%	15.9%	14.8%	10.7%

D'Ancona byl zmatený velkým nárůstem procent v průběhu první světové války. Domníval se, že tento nárůst je důsledek velkého snížení lovu menších ryb v této době. Ale jaká je souvislost intenzity rybolovu s velikostí populace ryb? Odpověď na tuto otázku byla středem zájmu D'Anconova výzkumu boje o přežití dvou konkurenčních druhů. Zároveň je v zájmu rybářského průmyslu, neboť by měla jasné důsledky na způsob lovení ryb. Žraloci jsou predátoři, zatímco menší ryby jsou jejich kořist; přežití žraloků závisí na jejich kořisti. Počet žraloků v období první světové války stoupl a počet menších ryb naopak klesl. Když se totiž po válce rybáři vrátili ke svému řemeslu, zjistili, že není co lovit - přestože poslední čtyři roky nelovili! To D'Anconu velmi mátl a poté, co vyloučil všechna možná biologická vysvětlení, obrátil se na pomoc k Volterrovi a ten v roce 1926 publikoval systém rovnic, který tento fenomén modeloval a vysvětloval.

Alfred James Lotka byl americký matematik, fyzikální chemik a statistik. Stejně rovnice, jako Volterra, poprvé představil v teorii autokatalických chemických reakcí (*Contributions to the Theory of Periodic Reactions*, 1910). V roce 1920 model rozšířil na organické systémy, jako například koexistence býložravců (predátorů) a rostlin (kořisti) (*Analytical Note on Certain Rhythmic Relations in Organic Systems*, 1920).

Konstrukce modelu

Volterra začal tím, že veškerou populaci kořisti označil $x(t)$ a veškerou populaci predátorů $y(t)$. Dále předpokládal, že kořist si mezi sebou příliš nekonkuruje, neboť se živí převážně planktonem a toho je v moři dostatek. Navíc, populace kořisti v moři není nijak hustá. Proto, v případě absence predátorů, by kořist rostla dle Malthusiánského modelu $x' = ax$, $a > 0$. Ale kořist je lovena predátory a počet střetnutí predátorů s kořistí za jednotku času je úměrný xy , takže populace kořisti je redukována predátory tempem $-bxy$, $b > 0$. Dostáváme rovnici $x' = ax - bxy$.

Naopak, v případě absence kořisti by predátoři neměli co lovit a začali by vymírat. Tempo jejich vymírání je úměrné jejich aktuálnímu počtu y , tedy $y' = -cy$, $c > 0$. Za přítomnosti

kořisti ale mají co lovit a díky tomu se můžou množit tempem dxy , $d > 0$. Dostáváme rovnici $y' = -cy + dxy$.

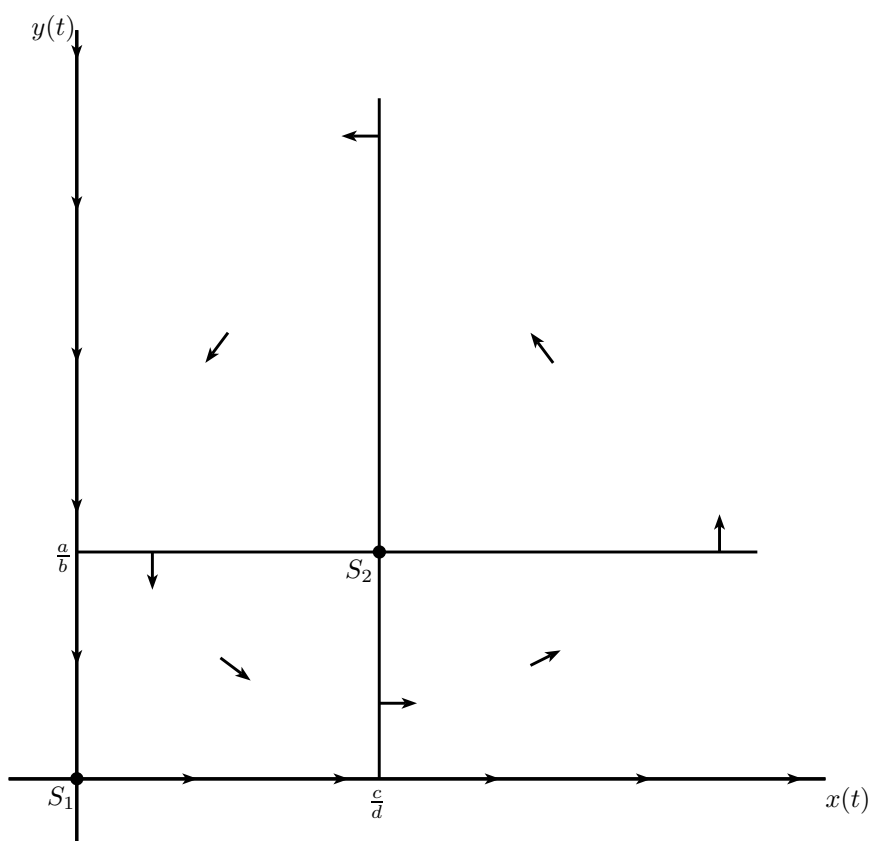
Dohromady nám tyto dvě rovnice tvoří systém

$$\begin{aligned}x' &= ax - bxy \\ y' &= -cy + dxy,\end{aligned}\tag{2.4.1}$$

který nazýváme Lotkúv-Volterrův model. Tyto rovnice nám modelují interakci predátorů a kořisti *bez rybolovu*. Nejprve pečlivě analyzujeme model (2.4.1). Poté přidáme faktor rybolovu a vysvětlíme skutečnost, proč je omezení rybolovu více prospěšné pro predátory než pro kořist. Ve skutečnosti ukážeme, že přiměřený rybolov je pro kořist *prospěšný*.

Analýza modelu

x -nulkliny systému (2.4.1) jsou $x = 0$ a $y = \frac{a}{b}$. y -nulkliny systému (2.4.1) jsou $y = 0$ a $x = \frac{c}{d}$. Z toho dostáváme dva stacionární body $S_1 = (0, 0)$ a $S_2 = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$.



Obrázek 2.10: Nulkliny systému (2.4.1)

Všimněme si, že je-li $x(t) = 0$, pak $y' = -cy$. Řešení této diferenciální rovnice je $y(t) = c \cdot e^{-ct}$. Dále, je-li $y(t) = 0$, pak $x' = ax$ a řešení této diferenciální rovnice je $x(t) = c \cdot e^{at}$. To znamená, že obě osy x , y jsou trajektoriemi systému (2.4.1). Z toho

vyplývá, že každé řešení, které začíná v prvním kvadrantu $x > 0, y > 0$ v čase $t = t_0$, v něm také zůstane po všem budoucím čase $t \geq t_0$ (mají-li dvě trajektorie společný jeden bod, pak jsou totožné; tedy dvě různé trajektorie se nikde neprotínají).

Jacobiho matice systému (2.4.1) je

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{pmatrix}.$$

Dosazením bodu S_1 dostaneme matici

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla této matice jsou reálná a opačných znamének, tudíž bod S_1 je typu sedlo.

Dosazením bodu S_2 do Jacobiho matice systému (2.4.1) dostaneme matici

$$\begin{pmatrix} 0 & -b\frac{c}{d} \\ d\frac{a}{b} & 0 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla této matice jsou $\lambda_{12} = \pm i\sqrt{ac}$. Jedná se tedy o ryze imaginární čísla a proto typ stacionárního bodu S_2 je buď ohnisko, nebo bod rotace. Pomocí linearizace systému nelze rozhodnout, jak se systém (2.4.1) v okolí bodu S_2 chová. Zkusme proto nalézt trajektorie.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-cy + dxy}{ax - bxy} = \frac{y(-c + dx)}{x(a - by)}.$$

To je rovnice se separovanými proměnnými. Přepíšeme ji do tvaru

$$\frac{a - by}{y} dy = \frac{-c + dx}{x} dx.$$

Integrovaním a následnou úpravou obdržíme řešení

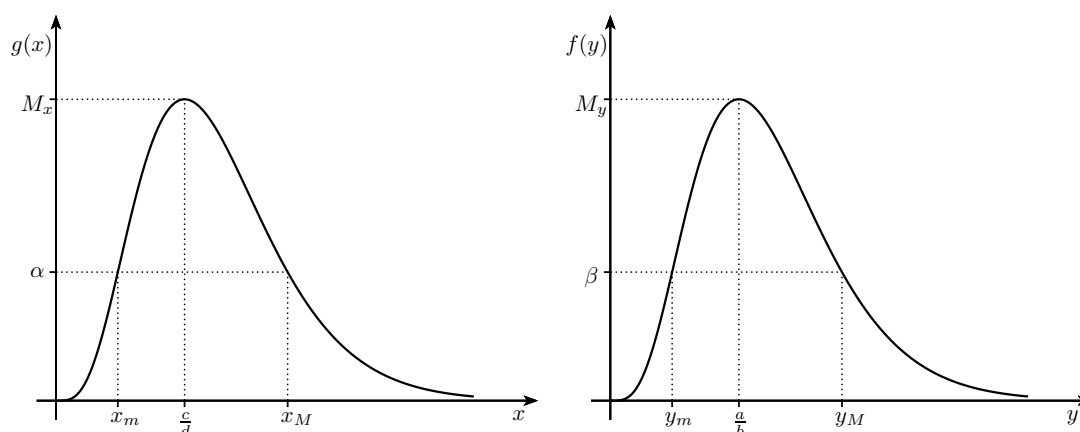
$$\frac{y^a}{e^{by}} \frac{x^c}{e^{dx}} = C, \quad (2.4.2)$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je nějaká konstanta. Rovnice (2.4.2) definuje trajektorie systému (2.4.1). Otázka nyní zní, zda jsou tyto trajektorie uzavřené, či nikoliv. Ukážeme si, že jsou uzavřené a tím pádem je stacionární bod S_2 typu střed.

V první řadě prozkoumáme chování funkcí $f(y) = \frac{y^a}{e^{by}}$ a $g(x) = \frac{x^c}{e^{dx}}$ pro $x, y > 0$. Za tímto účelem si všimněme, že $f(0) = 0$ a jak $y \rightarrow \infty$, tak $f \rightarrow 0$ a pro $y > 0$ je také $f > 0$. Dále spočítáme derivaci funkce f :

$$f'(y) = \frac{ay^{a-1} \cdot e^{by} - y^a \cdot be^{by}}{e^{2by}} = \frac{y^{a-1}(a - y)}{e^{by}}.$$

Položíme-li $f' = 0$, vidíme, že f má jediný kritický bod pro $y = \frac{a}{b}$. Vzhledem k tomu, že pro $y < \frac{a}{b}$ je funkce rostoucí, zatímco pro $y > \frac{a}{b}$ je funkce klesající, nachází se v bodě $y = \frac{a}{b}$ maximum $M_y = \frac{(a/b)^a}{e^a}$.

Obrázek 2.11: Grafy funkcí $f(y)$ a $g(x)$.

Podobně, $g(0) = 0$, $x \rightarrow \infty \Rightarrow g \rightarrow 0$, pro $x > 0$ je $g > 0$ a v bodě $x = \frac{c}{d}$ má funkce g své maximum $M_x = \frac{(c/d)^c}{e^c}$. Grafy funkcí f a g lze vidět na obrázku 2.11.

Z této analýzy funkcí f , g víme, že pro $C > M_x \cdot M_y$ nemá rovnice (2.4.2) žádné řešení a pro $C = M_x \cdot M_y$ má rovnice (2.4.2) právě jedno řešení $x = \frac{c}{d}$, $y = \frac{a}{b}$. Dále nám tedy stačí prozkoumat případ, kdy $C < M_x \cdot M_y$, což můžeme vyjádřit také jako $C = \alpha M_y$, kde $0 < \alpha < M_x$, ale také jako $C = \beta \cdot M_x$, $\beta < M_y$. První se zaměříme na možnost $C = \alpha \cdot M_y$. Všimněme si, že rovnice $g(x) = \frac{x^c}{e^{dx}} = \alpha$ má dvě řešení; $x = x_m < \frac{c}{d}$ a $x = x_M > \frac{c}{d}$. Rovnici (2.4.2) můžeme upravit následovně:

$$g(x) \cdot f(y) = \frac{x^c}{e^{dx}} \cdot \frac{y^a}{e^{by}} = C = \alpha \cdot M_y$$

$$f(y) = \frac{y^a}{e^{by}} = \left(\frac{\alpha}{x^c \cdot e^{-dx}} \right) \cdot M_y.$$

Pro $x < x_m$ nebo $x > x_M$ bude výraz v závorce větší než jedna a tudíž rovnice nebude mít žádné řešení y (M_y je maximum funkce f). Pro $x = x_m$ nebo $x = x_M$ bude výraz roven jedné a rovnice bude mít právě jedno řešení $y = \frac{a}{b}$. A pro $x_m < x < x_M$ bude výraz v závorce menší než jedna a tudíž rovnice bude mít právě dvě různá řešení $y_1(x)$ a $y_2(x)$. Jedno řešení, řekněme $y_1(x)$, bude vždy menší než $\frac{a}{b}$, zatímco druhé řešení $y_2(x)$ bude vždy větší než $\frac{a}{b}$. Jak se x blíží k x_m nebo x_M , obě $y_1(x)$ a $y_2(x)$ se blíží k $\frac{a}{b}$.

Nyní se zaměříme na možnost $C = \beta \cdot M_x$. Rovnice $f(y) = \frac{y^a}{e^{by}} = \beta$ má dvě řešení; $y = y_m < \frac{a}{b}$ a $y = y_M > \frac{a}{b}$. Rovnici (2.4.2) můžeme upravit následovně:

$$g(x) = \frac{x^c}{e^{dx}} = \left(\frac{\beta}{y^a \cdot e^{-by}} \right) \cdot M_x.$$

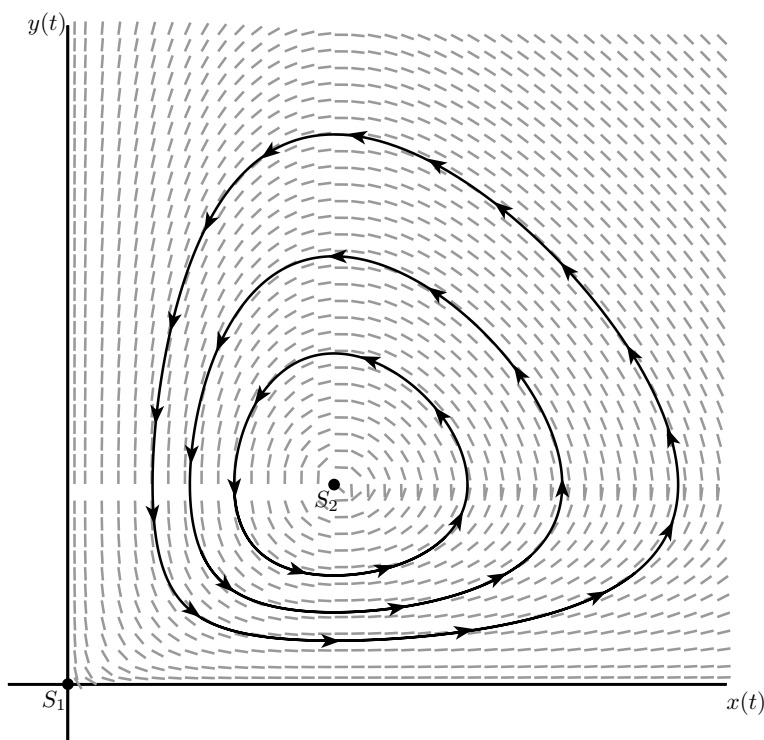
Pro $y < y_m$ nebo $y > y_M$ bude výraz v závorce větší než jedna a tudíž rovnice nebude mít žádné řešení x . Pro $y = y_m$ nebo $y = y_M$ bude výraz v závorce roven jedné a rovnice bude mít právě jedno řešení $x = \frac{c}{d}$. A pro $y_m < y < y_M$ bude výraz v závorce menší než jedna a tudíž rovnice bude mít právě dvě různá řešení $x_1(y)$ a $x_2(y)$. Jedno řešení, řekněme $x_1(y)$,

bude vždy menší než $\frac{c}{d}$, zatímco druhé řešení $x_2(y)$ bude vždy větší než $\frac{c}{d}$. Jak se y blíží k y_m nebo y_M , obě $x_1(y)$ a $x_2(y)$ se blíží k $\frac{c}{d}$.

Rekapitulace předchozí analýzy trajektorií:

Budeme uvažovat nějakou konkrétní trajektorii. Toho docílíme tak, že zvolíme nějaké pevné C , $C < M_x \cdot M_y$. Nechť v této konkrétní trajektorii platí, že pro $x = x_m$ nebo $x = x_M$ je $y = \frac{a}{b}$. Pokud bysme vzali $x < x_m$, tak neexistuje žádné y , pro které by byla rovnost (2.4.2) splněna (x_m nám tedy naši trajektorii ve fázové rovině omezuje zleva). Berme tedy postupně nějaké $x > x_m$. Pro každé takové x existují právě dvě y , pro která je rovnost (2.4.2) splněna. Jakmile vezmeme $x = \frac{c}{d}$, tak rovnost (2.4.2) bude mít stále dvě řešení, a sice $y = y_m$ a $y = y_M$. To jsou ale opět extrémální hodnoty - kdyby bylo $y < y_m$ nebo $y > y_M$, tak rovnost (2.4.2) nesplňuje žádné x , takže hodnoty y_m a y_M nám naši trajektorii ve fázové rovině omezují zdola a zhora. Bereme-li dále $x > \frac{c}{d}$, stále existují dvě y , pro která je rovnost (2.4.2) splněna. A to až do chvíle, kdy vezmeme $x = x_M$. To potom existuje pouze jediné y , splňující rovnost (2.4.2), a sice $y = \frac{a}{b}$. Pro jakékoliv $x > x_M$ neexistuje y , které by splňovalo rovnost (2.4.2).

V závěru tak dostáváme, že křivky definované rovnicí (2.4.2) jsou pro $x, y > 0$ uzavřené. Navíc, žádná z těchto křivek neobsahuje žádný stacionární bod systému (2.4.1) (s výjimkou $x = \frac{c}{d}$, $y = \frac{a}{b}$). Proto všechna řešení $x(t)$, $y(t)$ systému (2.4.1), s počátečními podmínkami $x(0) > 0$, $y(0) > 0$, jsou *periodické* funkce. To znamená, že každé řešení $x(t)$, $y(t)$ systému (2.4.1), s počátečními podmínkami $x(0) > 0$, $y(0) > 0$, má tu vlastnost, že $x(t + T) = x(t)$ a $y(t + T) = y(t)$ pro nějaké $T > 0$. Fázový portrét systému (2.4.1) vidíme na obrázku 2.12.



Obrázek 2.12: Fázový portrét systému Lotka-Volterra

Data, která D'Ancona posbíral, jsou pouze průměrné hodnoty vylovených predátorů za daný rok. Proto, abychom mohli tato data porovnat s naším modelem, musíme spočítat průměrné hodnoty $x(t)$ a $y(t)$.

Definujme průměrné hodnoty x a y takto:

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} y(t) dt,$$

kde T je perioda funkcí x, y . Jedná se o průměrné hodnoty v rámci jedné periody. My funkce $x(t)$ a $y(t)$ neznáme, nicméně přesto jsme schopni spočítat jejich průměrné hodnoty. Uvažujme první rovnici systému (2.4.1)

$$x' = ax - bxy$$

a vynásobme ji výrazem $\frac{1}{T \cdot x}$. Dostaneme

$$\frac{1}{T} \frac{x'}{x} = \frac{1}{T} (a - by).$$

Nyní integrujme obě strany podle t od t_0 do $t_0 + T$

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{x'}{x} dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (a - by) dt. \quad (2.4.3)$$

Na levé straně máme

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{dx}{x} dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{1}{x} dx = \ln x(t_0 + T) - \ln x(t_0).$$

Ale $x(t_0 + T) = x(t_0)$, tedy $\ln x(t_0 + T) - \ln x(t_0) = 0$.

Na pravé straně máme

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} a dt - \frac{b}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} y dt.$$

Protože levá strana je rovna nule, můžeme rovnici (2.4.3) přepsat na

$$\frac{b}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} y dt = \frac{a}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} dt.$$

Z toho plyne, že

$$\bar{y} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} y(t) dt = \frac{a}{b}.$$

Zcela analogicky spočítáme \bar{x} ; rovnici $y' = -cy + dxy$ vynásobíme výrazem $\frac{1}{T \cdot y}$ a vyjde nám hodnota $\bar{x} = \frac{c}{d}$. Tedy průměrný počet kořisti a predátorů je

$$\bar{x} = \frac{c}{d} \quad a \quad \bar{y} = \frac{a}{b}.$$

Všimněme si zajímavé věci, která není na první pohled zřejmá - průměrný počet kořisti \bar{x} , respektive predátorů \bar{y} , závisí na koeficientech rovnice pro predátory, respektive kořisti! Kdyby se tedy nějakým způsobem například zvýšil růstový koeficient kořisti a , neznamenalo by to zvýšení průměrného počtu kořisti, ale zvýšení průměrného počtu predátorů!

Nyní je načase náš systém (2.4.1) upravit tím, že do něj zahrneme i rybolov. Krořist je lovena tempem εx a predátoři tempem εy , přičemž koeficient $\varepsilon > 0$ je intenzita rybolovu; tj. počet rybářských lodí na moři a počet sítí v moři. Dostáváme tak modifikovaný systém rovnic

$$\begin{aligned}x' &= ax - bxy - \varepsilon x = (a - \varepsilon)x - bxy \\y' &= -cy + bxy - \varepsilon y = -(c + \varepsilon)y + dxy.\end{aligned}\tag{2.4.4}$$

Je-li $a - \varepsilon > 0$, jedná se o zcela stejné rovnice jako v systému (2.4.1), kde a nahradíme za $a - \varepsilon$ a c nahradíme za $c + \varepsilon$. Proto jsou nyní průměrné hodnoty $x(t)$ a $y(t)$ následující:

$$\bar{x} = \frac{c + \varepsilon}{d} \quad a \quad \bar{y} = \frac{a - \varepsilon}{b}.$$

Nyní je vidět, že přiměřená míra rybolovu ($\varepsilon < a$) ve skutečnosti zvýší průměrný počet kořisti a sníží průměrný počet predátorů. Nebo-li, omezení rybolovu zvýší průměrný počet predátorů a sníží průměrný počet kořisti. Tento výsledek, který je znám jako Volterrov princip, vysvětluje data D'Ancony a kompletně řeší naši otázku se zvýšeným počtem vylovených žraloků (predátorů) v období První světové války.

Volterrov princip má také pozoruhodný dopad na používání insekticidů, které zabíjí jak hmyzí predátory, tak jejich hmyzí kořist. Jeho důsledkem je, že použití insekticidů ve skutečnosti zvýší počet toho hmyzu, který je pod kontrolou jejich hmyzích predátorů. Skutečný doklad tohoto principu je historický fakt z 19. století. V roce 1868 byl z Austrálie do Ameriky neúmyslně přivezen Perlovec zhoubný (*Icerya Purchasi*). Tento hmyz téměř zničil americký citrusový průmysl. Následně byl úmyslně dovezen jeho přirozený australský predátor - beruška (*Novius Cardinalis*). Berušky zredukovaly počet perlovců na nízký počet. Když byly objeveny insekticidní účinky DDT, byl použit k hubení škůdců v agroprůmyslu. Problém je, že DDT nerozlišuje mezi hmyzími predátory a kořistí - hubí všechny. Důsledkem použití DDT (a také důsledkem Volterrova principu) tedy bylo zvýšení počtu škůdců!

2.5 Matematika manželských konfliktů

V 70. letech 20. století začali John M. Gottman z Washingtonské Univerzity a Robert W. Levenson z Kalifornské Univerzity dlouhodobě studovat manželské páry. Každý pár byl vyzván, aby během 15 minut řešil nějaké konfliktní téma v jejich vztahu. Pozorně se znovu a znovu dívali na nahrávky těchto rozhovorů a dalších 9 let tyto páry sledovali. Zkoumali, jaké manželké procesy vedou k rozvodu. Snažili se pochopit rozdíl mezi šťastným a nešťastným manželstvím. Nakonec dokázali určit, které páry spolu vydrží a které nikoliv s 90% přesností. Jejich objev nebyl až tak složitý. Rozdíl mezi šťastným a nešťastným manželstvím tkví v poměru mezi pozitivními a negativními projevy během konfliktní interakce.

V letech 1983–1987 si Gottman a Levenson k sobě do laboratoře v Bloomingtonu pozvali 73 manželských párů. Každý pár podstoupil několik 15 minutových rozhovorů, z nichž jeden se týkal nějakého problémového tématu v jejich manželství. Chvíle, kdy mluví pouze jeden z partnerů, aniž by ho přerušil druhý, se nazývá *kolo*. Každý rozhovor byl tak dělen na jednotlivá kola. Pomocí RCISS (Rapid Couple Interaction Scoring System) obdržel každý z partnerů za každé své kolo skóre. RCISS je tvořen záznamovým archem, kde je celkem 13 kódů pro mluvícího a 9 kódů pro poslouchajícího. Pro potřeby tohoto výzkumu byly použity pouze kódy pro mluvícího. Tyto kódy jsou tvořeny 5 pozitivními (neutrální nebo pozitivní popis problému, náklonnost, souhlas - validace, humor a smích, a jiné pozitivní) a 8 negativními kódy (stížnosti, kritizování, negativní vztah k řešení problémů, ano - ale, obranný postoj, ponižování, gradování negativních reakcí, a jiné negativní). Každý rozhovor byl nahráván videokamerou a každá nahrávka byla oskórována týmem pozorovatelů. Poté se spočítal průměrný počet pozitivních a negativních kódů každého partnera za kolo a průměrný počet pozitivních minus negativních kódů partnera za kolo.

Pomocí RCISS skóre (pozitivní minus negativní) byl každý manželský pár klasifikován jako *regulovaný* (low-risk), nebo *neregulovaný* (high-risk). Tato klasifikace byla založena na bodové grafové metodě, původně navržené Gottmanem. V každém kole se spočítalo RCISS skóre. Tyto rozdíly pak byly kumulativně vyneseny do bodového grafu pro každého partnera a pomocí lineární regresní analýzy byl určen sklon těchto grafů. Regulované páry byly definovány jako ty, ve kterých byl sklon jak manžela, tak manželky výrazně pozitivní. Neregulované páry pak byly ty, ve kterých alespoň jeden z partnerů neměl výrazně pozitivní sklon. Ukázky kumulovaných bodových grafů jsou na obrázku 2.13.

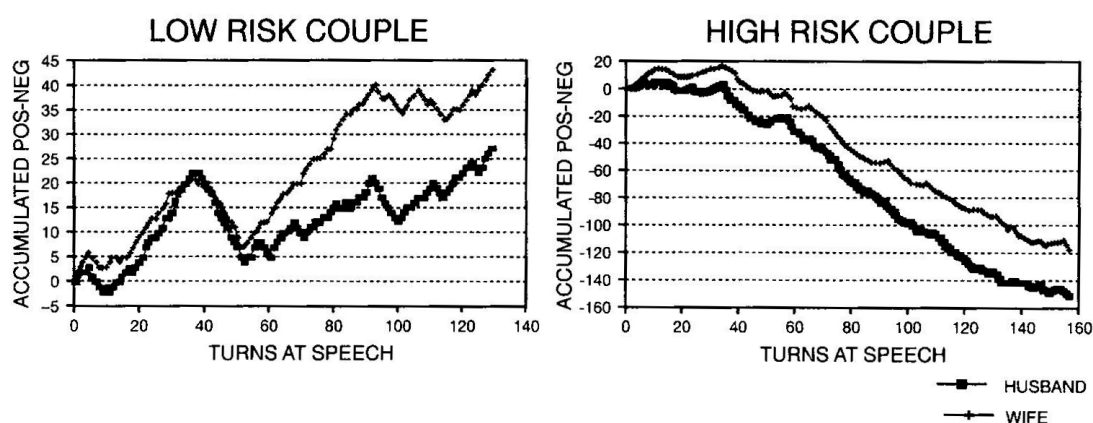
Vycházeli z teorie, že nejvíce důležité procesy v předpovídání rozpadu manželství zahrnují rovnováhu či regulaci pozitivních a negativních interakcí. Takže pojmenování regulované a neregulované má svůj význam. Dle definice – regulované páry byly ty, které projevovaly více pozitivních než negativních RCISS kódů.

Tato klasifikace rozdělila 73 párů na 42 regulovaných a 31 neregulovaných.

Gottman v roce 1994 (tj. ještě před dobou, kdy vznikl matematický popis manželských konfliktů) navrhl 5 druhů manželství: hádací, potvrzovací, vyhýbavé, nepřátelské, nepřátelsko-lhostejné. Z toho tři jsou dlouhodobě stabilní a dva dlouhodobě nestabilní.

Stabilní druhy jsou potvrzovací, hádací, vyhýbavý.

Hádací bývají romantičtí a vášniví, ale neustále se hádají o banálních a nepodstatných



Obrázek 2.13: Příklady kumulovaných bodových grafů RCISS skóre. Vlevo regulovaný pár, vpravo neregulovaný. Zdroj: [7]

věcech.

Potvrzovači jsou o něco chladnější a intimnější. Záleží jim hodně na společném manželství a na společných zážitcích, nikoliv na individuálním blahu. Jim ovšem hrozí, že romantika a láska vyprchá a z páru se stanou spíše blízcí přátelé.

Vyhýbači se vyhýbají seč mohou jakýmkoliv konfliktům a reagují pouze na pozitivní emoce. Riskují ale emocionální vzdálení se a osamělost.

Gottman ze získaných dat také zjistil, že se u těchto tří stabilních manželství objevuje jistá konstanta. Tato konstanta, podíl pozitivních a negativních RCISS kódů během řešení konfliktní situace, byla zhruba 5 a mezi těmito třemi druhy manželství se příliš neodchylovala. Jde o již zmíněnou rovnováhu mezi pozitivními a negativními projevy během konfliktu.

Hádači odbrželi mnoho pozitivních kódů a mnoho negativních kódů, potvrzovači průměrný počet pozitivních a průměrný počet negativních, vyhýbači malý počet pozitivních i negativních, každý druh ale tak, že se dostal na poměr zhruba rovný 5.

Nestabilní druhy jsou nepřátelský a nepřátelsko–lhostejný. Skupina nepřátelsko–lhostejných byla znatelně více negativní, defensivní a pohrdavá.

Konstrukce modelu

Snažili se vzít některou již existující teorii manželských konfliktů a sepsat k ní příslušné rovnice. To se ale nedařilo. Proto zvolili jiný přístup; sepsali rovnice na základě získaných dat a jednotlivým výrazům v rovnicích přiřadili teoretický význam. Úkolem matematického modelování se tak stalo vytvoření teorie.

Jako závislou proměnnou, určující případný rozpad manželství, vzali RCISS skóre. Cílem bylo ho rozložit na komponenty, které by měly nějaký teoretický význam. Snažili se zjistit, na čem záleží RCISS skóre každého partnera v následujícím kole. Skóre rozdělili na dvě části, kde

- první část byla *ovlivněná* složka RCISS skóre,
- druhá část byla *neovlivněná* složka RCISS skóre,

a celé RCISS skóre je součtem těchto dvou částí.

Neovlivněná složka představuje individuální dynamiku každého partnera. Když je člověk sám, tak má tendenci být buď více negativní, nebo více pozitivní. Nejjednodušší způsob, jak tento vývoj modelovat, je vzít lineární funkci

$$P_{t+1} = \bar{r}_i P_t + c_i, \quad (2.5.1)$$

kde P_t je RCISS skóre jednoho z partnerů, a předpokládat, že následující skóre partnera je úměrné k jeho aktuálnímu skóre. Konstanta c_i představuje počáteční stav mysli a parametr \bar{r}_i určuje změnu skóre při reakci sama na sebe. Každý z partnerů má svůj vlastní neovlivněný klidný stav mysli; tedy skóre, které se dál nemění. Zjistíme ho tak, že položíme

$$P_{t+1} = P_t.$$

Dosazením do této rovnosti z (2.5.1) a upravením získáme **neovlivněné stacionární skóre**

$$P_{t_0} = \frac{c_i}{1 - \bar{r}_i}. \quad (2.5.2)$$

Chování rovnice (2.5.1) je řízeno parametrem \bar{r}_i . Je-li $|\bar{r}_i| < 1$, pak je stacionární skóre stabilní a je-li $|\bar{r}_i| > 1$, je nestabilní.

Je třeba, aby bylo neovlivněné stacionární skóre stabilní. Jinak bysme člověka označili za manio-depresivního psychopata. Proto, a pro budoucí účely, nás bude zajímat pouze případ $0 < \bar{r}_i < 1$. Čím větší je parametr \bar{r}_i , tím rychleji se partner vrátí do svého klidného stavu a čím je menší, tím pomaleji.

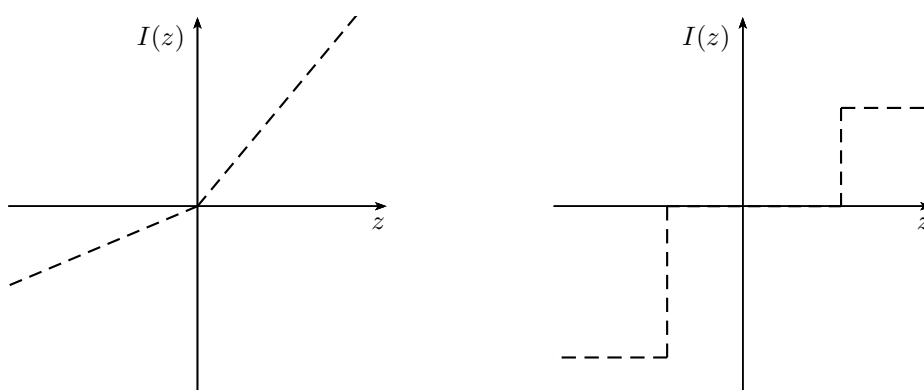
Ovlivněná složka představuje funkci vlivu jednoho partnera na skóre toho druhého. Kdybychom ji vynesli do grafu, tak jedna osa představuje RCISS skóre jednoho partnera v kole t a druhá osa představuje RCISS skóre druhého partnera v kole $(t + 1)$. Tyto funkce můžeme aproximovat stejně, tedy lineární funkcí. Přesněji, dvěma lineárními funkcemi; jedna pro pozitivní RCISS skóre, druhá pro negativní RCISS skóre. Graf by byl lomená čára, která se láme v počátku souřadnic. Taková reprezentace funkce vlivu má za následek, že sebemenší skóre (jak pozitivní tak negativní) má vliv na partnera a tento vliv neustále lineárně roste. Nebo bychom mohli použít S-tvar grafu. V jistém okolí kolem nulového skóre by partner neměl žádný vliv na toho druhého. Při překročení ale nějakého milníku (určité pozitivní nebo negativní skóre) by vliv začal mít a ten by byl konstantní - s rostoucím pozitivním nebo klesajícím negativním skóre by se dál neměnil.

Mohli bychom uvažovat i další možnosti. Například zkombinovat oba uvedené. Existoval by milník, po který nemá skóre partnera žádný vliv, ovšem po jeho překročení začne vliv lineárně růst. Vzhledem k tomu, že jejich článek z roku 1995 byl prvním pokusem o matematický model manželských konfliktů, zvolili nejjednodušší cestu s co nejméně parametry. Budeme se dále bavit o lineárním vlivu i konstantním vlivu s milníkem, ale nebudeme je nijak kombinovat. Pro tuto chvíli si vliv manželova skóre na následující skóre manželky označíme $I_{hw}(H_t)$ a analogicky $I_{wh}(W_t)$.

Dostáváme tak rekurentní vztah pro RCISS skóre manželky a manžela:

$$W_{t+1} = I_{hw}(H_t) + \bar{r}_1 W_t + c_1 \quad (2.5.3)$$

$$H_{t+1} = I_{wh}(W_t) + \bar{r}_2 H_t + c_2. \quad (2.5.4)$$



Obrázek 2.14: Dvě možné podoby funkcí vlivu: bilineární vlevo, S-tvar vpravo. z představuje skóre manželky $W(t)$ nebo manžela $H(t)$.

Nyní stačí určit diferenci dvou posobě jdoucích skóre a od diskrétního modelu přejít ke spojitému - tím budou hledané rovnice určeny.

$$\begin{aligned} W_{t+1} - W_t &= I_{hw}(H_t) + \bar{r}_1 W_t + c_1 - W_t \\ &= (\bar{r}_1 - 1)W_t + c_1 + I_{hw}(H_t). \end{aligned}$$

Zde nám nic nebrání přejít ke spojitému modelu a psát

$$W'(t) = (\bar{r}_1 - 1)W(t) + c_1 + I_{hw}(H(t))$$

Podobně s rovnicí pro manžela:

$$\begin{aligned} H_{t+1} - H_t &= I_{wh}(W_t) + \bar{r}_2 H_t + c_2 - H_t \\ &= (\bar{r}_2 - 1)H_t + c_2 + I_{wh}(W_t). \end{aligned}$$

Přechod ke spojitému modelu zde také není problém a můžeme psát

$$H'(t) = (\bar{r}_2 - 1)H(t) + c_2 + I_{wh}(W(t)).$$

Systém právě odvozených diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} W'(t) &= (\bar{r}_1 - 1)W(t) + c_1 + I_{hw}(H(t)) \\ H'(t) &= (\bar{r}_2 - 1)H(t) + c_2 + I_{wh}(W(t)) \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

modeluje kontinuální vývoj RCISS skóre manželky a manžela během vzájemné interakce. $W(t)$ a $H(t)$ jsou RCISS skóre manželky a manžela, \bar{r}_1 a \bar{r}_2 jsou míry, s jakou se mění příslušné skóre v reakci sama na sebe, konstanty c_1 , c_2 představují stav mysli, s jakou do vzájemné interakce přišli, I_{hw} a I_{wh} jsou funkce vlivu předchozího skóre manžela na manželku a naopak (influence of husband on wife, influence of wife on husband). Stacionární bod tohoto systému nazýváme **ovlivněné stacionární skóre**.

Odhad parametrů a funkce vlivu

Aby Gottmanův tým odhadl parametry týkající se neovlivněné části RCISS skóre každého z partnerů, použili pouze ta data, pro která bylo skóre druhého partnera nula (cca 15 % případů). Použili přitom rovnice

$$\begin{aligned}W_{t+1} &= I_{hw}(H_t) + \bar{r}_1 W_t + c_1, \\H_{t+1} &= I_{wh}(W_t) + \bar{r}_2 H_t + c_2.\end{aligned}\tag{2.5.6}$$

Předpokládali, že je-li skóre jednoho z partnerů nulové, pak má i nulový vliv na druhého partnera (obecně to tak být nemusí, ale pro začátek si nekomplikovali život). V tom případě rovnice (2.5.6) přejdou do tvaru

$$\begin{aligned}W_{t+1} &= \bar{r}_1 W_t + c_1, \\H_{t+1} &= \bar{r}_2 H_t + c_2.\end{aligned}$$

Obě rovnice jsou lineární a na uvažované podmnožině všech skóre lze použít metodu nejmenších čtverců, čímž určili hledané parametry \bar{r}_i a c_i .

Funkce vlivu odhadli následovně. Rovnice (2.5.6) si upravili do tvaru

$$\begin{aligned}I_{hw}(H_t) &= W_{t+1} - (\bar{r}_1 W_t + c_1), \\I_{wh}(W_t) &= H_{t+1} - (\bar{r}_2 H_t + c_2).\end{aligned}\tag{2.5.7}$$

Nyní stačilo vzít dvě posobě jdoucí skóre jednoho partnera, z prvního skóre spočítat neovlivněnou část, dosadit ji do (2.5.7) a odečíst od skóre následujícího. Tak získali ovlivněnou část každého skóre. Vynesli do grafu ovlivněnou část skóre jednoho partnera oproti předešlému skóre druhého partnera (x versus I_{xy} nebo y versus I_{yx}) a tyto body proložili přímkou (metodou nejmenších čtverců) zvlášť pro pozitivní a negativní skóre. Tak získali bilineární podobu funkce vlivu pro každého partnera v každém páru.

Odhady parametrů jsou shrnuty v tabulce 2.3. Odhady funkcí vlivu jsou shrnuty v tabulce 2.4.

První se zaměříme na tabulku 2.3. Parametru r_i si prozatím nevěšíme, budeme jej potřebovat později. Parametr \bar{r}_i je míra, jakou partnera ovlivňuje jeho vlastní skóre. Hodnoty parametru \bar{r}_i jsou obecně větší u neregulovaných párů. Rozdíl průměrné hodnoty \bar{r}_i u žen a mužů je čtyři krát větší u žen (0.29 oproti 0.07). Ženy v neregulovaných párech mají větší \bar{r}_i než muži, ale v regulovaných párech je tomu naopak.

Ovlivněné a neovlivněné stacionární skóre je výrazně více negativní u neregulovaných párů, obzvláště pak u žen. Všimněme si, že u regulovaných párů je ovlivněné skóre obecně vyšší než neovlivněné (tzn. že ve vztahu jsou šťastnější, než když jsou sami), což obecně není pravda u neregulovaných párů. Nejvyšší neovlivněné skóre mají partneři v hádavém vztahu. To je možná důvod, proč je takový vztah úspěšný, přestože na sebe mají partneři vliv pouze negativními emocemi.

Nyní se zaměříme na funkce vlivu v tabulce 2.4. Grafy nadepsané jako „teorie“ představují teoretický (průměrný) tvar funkcí vlivu. Potvrzovači mají negativní vliv na partnera, je-li jejich skóre negativní a naopak, mají pozitivní vliv, je-li jejich skóre pozitivní. Překvapivé je, že funkce hádavých a vyhýbavých vypadají z poloviny jako funkce potvrzovačů. U potvrzovačů jsou směrnice obou polopřímek zhruba stejné. To znamená, že se ovlivňují

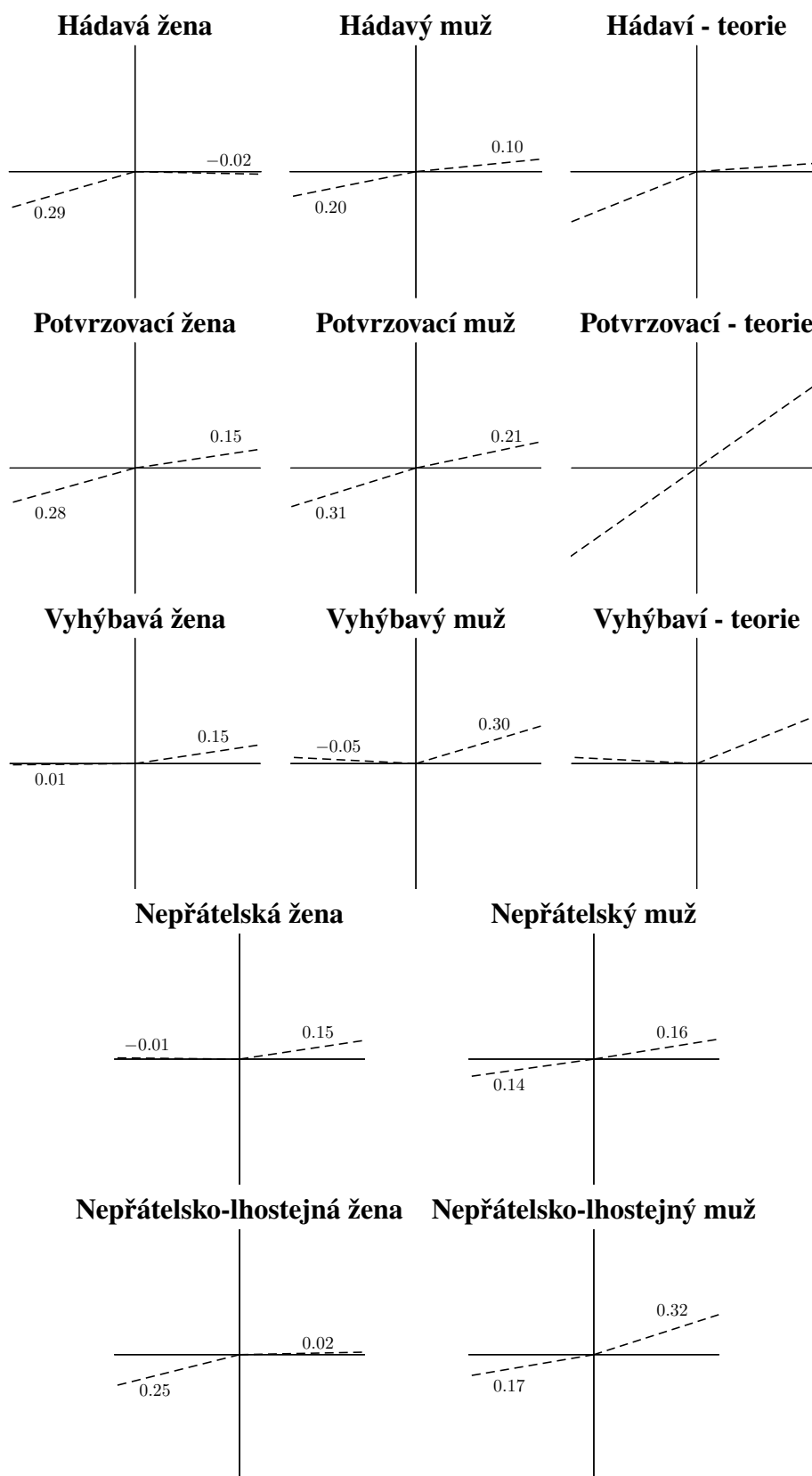
Druh	Parametry manželky				Parametry manžela			
	\bar{r}_1	r_1	x_0	x^*	\bar{r}_2	r_2	y_0	y^*
Regulované páry								
Hádaví	0,20	0,80	0,68	0,61	0,33	0,67	0,68	0,75
Potvrzující	0,14	0,86	0,52	0,59	0,37	0,63	0,38	0,56
Vyhýbaví	0,25	0,75	0,46	0,60	0,18	0,82	0,26	0,53
Průměr	0,20	0,80	0,55	0,60	0,29	0,71	0,44	0,61
Neregulované páry								
Nepřátelští	0,51	0,49	-0,64	-0,45	0,32	0,68	0,10	0,03
Nepřátelsko-lhostejní	0,46	0,54	-0,24	-0,62	0,40	0,60	-0,42	-0,50
Průměr	0,49	0,51	-0,44	-0,54	0,36	0,64	-0,16	-0,24

Tab. 2.3: Odhadnuté parametry každého partnera v každém druhu vztahu. Zdroj: [7], [2]

stejnou mírou v pozitivním i negativním smyslu. Vyhýbači ovlivňují své protějšky pouze pozitivními projevy, zatím co hádači své protějšky ovlivňují především negativními projevy.

Největší překvapení však skýtá porovnání funkce vlivu manželky a manžela v rámci jednoho druhu manželství. V regulovaných párech jsou funkce vlivu ženy a muže navzájem podobné. Ovšem u neregulovaných párů tomu tak není. Zdá se, že u nich dochází k neshodě ve funkcích vlivu: nepřátelská žena je vyhýbavá, zatím co nepřátelský muž je potvrzovač a nepřátelsko-lhostejná žena je hádač, zatím co nepřátelsko-lhostejný muž je opět potvrzovač. Gottman a jeho tým tuto teorii neshodných funkcí vlivu dvou partnerů dále testovali a skutečně zjistili, že ve stabilních manželstvích dochází ke shodě funkcí vlivu, zatím co u nestabilních nikoliv. Vznikla tak hypotéza, zda-li neúspěšné manželství není důsledkem neshody ve vzájemném ovlivňování se.

Funkce vlivu jsou tři: vyhýbavá, potvrzující a hádavá. Mělo by tedy existovat celkem devět druhů manželství. Z nich se ve třech partnerech shodují ve funkci vlivu. Zbylých šest druhů je nestabilních a z nich se pouze dva objevily v Gottmanových datech. Například hádavý a vyhýbavý typ jsou natolik rozdílné, až se zdá, že takový pár ani nemůže existovat.



Tabulka 2.4: Odhadnuté funkce vlivu ve všech pěti druhích vztahů. Zdroj: [7]

Analýza modelu

Protože v celé práci jsme zvyklí pracovat s funkcemi x a y , přeznačíme si rovnice k obrazu svému. Funkce x představuje skóre manželky, funkce y pak skóre manžela. Koeficient $(\bar{r}_i - 1)$ v rovnicích (2.5.5) zaměníme koeficientem r_i , pro který platí

$$0 < r_i = 1 - \bar{r}_i < 1.$$

Obdržíme tak systém rovnic

$$\begin{cases} x' = -r_1x + c_1 + I_{yx}(y) \\ y' = -r_2y + c_2 + I_{xy}(x), \end{cases}$$

který ještě upravíme do tvaru

$$\begin{cases} x' = r_1(x_0 - x) + I_{yx}(y) \\ y' = r_2(y_0 - y) + I_{xy}(x), \end{cases} \quad (2.5.8)$$

kde

$$x_0 = \frac{c_1}{r_1} = \frac{c_1}{1 - \bar{r}_1}, \quad y_0 = \frac{c_2}{r_2} = \frac{c_2}{1 - \bar{r}_2}$$

jsou neovlivněné stacionární skóre manželky a manžela, viz rovnice (2.5.2). Funkce vlivu budeme uvažovat v bilineárním tvaru, tedy

$$I_{yx}(y) = \begin{cases} a_1y, & \text{pro } y > 0 \\ b_1y, & \text{pro } y < 0 \end{cases} \quad (2.5.9)$$

$$I_{xy}(x) = \begin{cases} a_2x, & \text{pro } x > 0 \\ b_2x, & \text{pro } x < 0 \end{cases} \quad (2.5.10)$$

Pro potvrzovače je $a_i \approx b_i$, pro hádače je $b_i > a_i$ a pro vyhýbače je $a_i > b_i$.

Systém rovnic (2.5.8) je lineární a má tedy jeden stacionární bod, který si označíme $[x^*, y^*]$, což je ovlivněné stacionární skóre (jedná se o stejné skóre, jako v systému (2.5.5)). V systému (2.5.8) se vyskytuje celkem pět parametrů, na základě kterých budeme jednotlivé druhy vztahů zkoumat. Jedná se o $r_1, r_2, x_0, y_0, [x^*, y^*]$. Zatím co první čtyři náležejí každému partnerovi zvlášť, poslední (ovlivněné stacionární skóre) je pro oba společný.

Do analýzy systému se pustíme neobvyklým způsobem. Stacionární bod $[x^*, y^*]$ vyšetříme, aniž bychom jej předem určili. Chceme totiž, aby byl stabilní a k tomu stačí zaručit $p < 0$ a $q > 0$ v charakteristické rovnici Jacobiho matice (viz tabulka 1.1). Jacobiho matice systému (2.5.8) v bodě $[x^*, y^*]$ je

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} -r_1 & I'_{yx}(y^*) \\ I'_{xy}(x^*) & -r_2 \end{pmatrix}.$$

Aby byl bod $[x^*, y^*]$ stabilní, musí být

$$p = -(r_1 + r_2) < 0, \quad q = r_1r_2 - I'_{yx}I'_{xy} > 0.$$

První podmínka je splněna automaticky (protože $0 < r_i < 1$). Druhá podmínka požaduje, aby platilo

$$\frac{I'_{yx}I'_{xy}}{r_1r_2} < 1.$$

Vzhledem k (2.5.9) a (2.5.10) je

$$I'_{yx}(y^*) = \begin{cases} a_1 & \text{pro } y^* > 0 \\ b_1 & \text{pro } y^* < 0 \end{cases} \quad \text{a} \quad I'_{xy}(x^*) = \begin{cases} a_2 & \text{pro } x^* > 0 \\ b_2 & \text{pro } x^* < 0 \end{cases}$$

Podmínku $q > 0$ tedy můžeme zapsat jako

$$\frac{z_1z_2}{r_1r_2} < 1, \tag{2.5.11}$$

kde z je buď a nebo b . Obecně je $z_i < r_i$, neboť přirozeně každý člověk reaguje rychleji na své vlastní pocity než na pocity někoho jiného. Dále budeme tedy předpokládat, že je tato podmínka stability splněna. Tím pádem je každý stacionární bod $[x^*, y^*]$ stabilní, nehledě na jeho souřadnice.

Je vhodné si upřesnit, co myslíme **úspěšným** manželstvím. Jako úspěšné bereme to manželství, ve kterém jsou partneři alespoň stejně šťastní, jako když byli sami. To jest

$$x^* \geq x_0, \quad y^* \geq y_0.$$

Máme dohodu, že podmínka

$$\frac{z_1z_2}{r_1r_2} < 1$$

je vždy splněna a proto je každý stacionární bod $[x^*, y^*]$ stabilní. Každé řešení systému (2.5.8) bude pro $t \rightarrow \infty$ směřovat do tohoto stacionárního bodu. Pochopitelně může být $x^* < 0$, $y^* < 0$. V takovém případě by se mohl jeden z partnerů jednoho dne probrat a říct si, že takto dál žít nechce a začít svůj vztah aktivně spravovat. Tyto *opravy* vztahu nejsou v našem modelu zahrnuty.

Analýza potvrzovacího vztahu

V psychologii partnerských vztahů je obecně známo, že potvrzovací druh vztahu je stabilní a úspěšný. My si zde matematicky ukážeme proč.

Potvrzovací pár má shodné vlivu, přičemž $a_i \approx b_i$. V rámci zjednodušení vezmeme $a_i = b_i$. Dostáváme tak systém

$$\begin{cases} x' = r_1(x_0 - x) + a_1y \\ y' = r_2(y_0 - y) + a_2x, \end{cases} \tag{2.5.12}$$

kde $0 < r_i < 1$. Všimněme si pozoruhodné věci - tento systém je zcela stejný, jako systém rovnic modelující zbrojení dvou států! Stacionární bod $[x^*, y^*]$ tohoto systému je

$$x^* = \left[x_0 + \frac{a_1}{r_1}y_0 \right] / \left[1 - \frac{a_1a_2}{r_1r_2} \right],$$

$$y^* = \left[y_0 + \frac{a_2}{r_2}x_0 \right] / \left[1 - \frac{a_1a_2}{r_1r_2} \right].$$

Z Richardsonovy teorie konfliktů víme, že tento bod je stabilní uzel, pokud

$$0 < \frac{a_1 a_2}{r_1 r_2} < 1,$$

což je ovšem podmínka (2.5.11). V opačném případě by se jednalo o sedlo. Ve skutečnosti je poměrně snadné pochopit, proč je případ

$$a_1 > r_1, \quad a_2 > r_2$$

nestabilní (tzn. partneři reagují více na toho druhého než na sebe). Dva partneři se navzájem emocionálně vysávají: smutná žena dělá muže smutnějším a ten obratem dělá ženu smutnější a tak dále. Stejný řetěz událostí platí v případě, že je žena šťastná - tím dělá muže šťastnějšího a ten obratem zase dělá šťastnější svou ženu a tak dále. Tento nestabilní případ jsme zkoumali v teorii válečných konfliktů. V manželských konfliktech se zaměříme na stabilní případ.

Manželský svazek má na pozitivitu potvrzovacího vztahu dva dopady: aditivní a multiplikativní. Jsou-li žena i muž přirozeně pozitivní, tj. $x_0, y_0 > 0$, pak je štěstí každého partnera navýšeno o štěstí toho druhého. Tento vliv je aditivní:

$$\begin{aligned} \text{Štěstí svobodné ženy} = x_0 &\rightarrow \text{Štěstí vdané ženy} = x_0 + \frac{a_1}{r_1} y_0, \\ \text{Štěstí svobodného muže} = y_0 &\rightarrow \text{Štěstí ženatého muže} = y_0 + \frac{a_2}{r_2} x_0. \end{aligned}$$

Navíc je jejich zvýšené štěstí násobeno kladným činitelem

$$\frac{1}{1 - \frac{a_1 a_2}{r_1 r_2}} > 1,$$

což je multiplikativní dopad jejich manželství. Výsledek je

$$\begin{aligned} x^* &= \left[x_0 + \frac{a_1}{r_1} y_0 \right] / \left[1 - \frac{a_1 a_2}{r_1 r_2} \right] > x_0, \\ y^* &= \left[y_0 + \frac{a_2}{r_2} x_0 \right] / \left[1 - \frac{a_1 a_2}{r_1 r_2} \right] > y_0. \end{aligned}$$

Oba partneři jsou ve svém vztahu mnohem šťastnější, než když byli svobodní.

Nadruhou stranu, pokud jsou partneři sami o sobě negativní lidé, tj. $x_0, y_0 < 0$, pak potvrzovací vztah jejich negativitu ještě prohloubí. V takovém případě je potvrzovací manželství nejspíše neregulované (high-risk).

Manželství může být stále úspěšné i pokud jsou x_0 a y_0 opačným znamének. Například je-li muž negativní, tj. $y_0 < 0$, pak pokud je žena hodně pozitivní, může svého muže udělat šťastným, pokud

$$y_0 + \frac{a_2}{r_2} x_0 > 0.$$

Zároveň však muž nesmí svou ženu stáhnout do depresí, tj. musí být

$$x_0 + \frac{a_1}{r_1} y_0 > 0.$$

Takové manželství je pravděpodobně úspěšné.

Analýza vyhýbavého vztahu

Tradiční nauka partnerských vztahů si vždy myslela, že uklízení problémů pod koberec ve vztahu není dobré a vede k ještě horším problémům, které se v budoucnosti zpod koberce vynoří. Gottmanův výzkum však ukazuje, že i takový vztah může být úspěšný. Systém rovnic modelující vyhýbavý vztah je

$$\begin{cases} x' = r_1(x_0 - x) + a_1 I(y) \\ y' = r_2(y_0 - y) + a_2 I(x), \end{cases} \quad (2.5.13)$$

kde

$$I(z) = \begin{cases} z & \text{pro } z > 0 \\ 0 & \text{pro } z < 0 \end{cases}, \quad z \in \{x, y\}.$$

Funkce vlivu zjednodušíme tak, že je-li partner pozitivní, má pozitivní vliv na toho druhého a je-li negativní, nemá žádný vliv.

Stacionární bod tohoto systému závisí na kvadrantu, ve kterém se tento bod nachází. Pro $x^*, y^* > 0$ je $I(x^*) = x^*$ a $I(y^*) = y^*$, a proto je stacionární bod

$$\begin{aligned} x^* &= \left[x_0 + \frac{a_1}{r_1} y_0 \right] / \left[1 - \frac{a_1 a_2}{r_1 r_2} \right] > 0, \\ y^* &= \left[y_0 + \frac{a_2}{r_2} x_0 \right] / \left[1 - \frac{a_1 a_2}{r_1 r_2} \right] > 0. \end{aligned}$$

stejný, jako u potvrzovacího typu vztahu. Na druhé straně, je-li $x^*, y^* < 0$, pak $I(x^*) = I(y^*) = 0$ a stacionární bod systému (2.5.13) je

$$x^* = x_0 < 0, \quad y^* = y_0 < 0.$$

Takže je-li každý z partnerů sám o sobě negativní (tj. $x_0 < 0, y_0 < 0$), pak nejsou ve vztahu o nic víc nešťastní ($x^* = x_0, y^* = y_0$). Nicméně, jsou-li oba sami o sobě pozitivní ($x_0 > 0, y_0 > 0$), pak jsou ve vztahu šťastnější ($x^* > x_0 > 0, y^* > y_0 > 0$). Proto je vyhýbavý vztah někdy výhodný - konkrétně tehdy, nejsou-li partneři sami o sobě tak pozitivní, jako potvrzovači nebo hádači.

Vyhýbavý vztah může být úspěšný i tehdy, mají-li x_0, y_0 opačná znaménka. A to za podmínky, že pozitivní partner je více pozitivní, než je negativní partner negativní. Během vyhýbání se interakci, když je jeden negativní, čerpá tento pár pozitivitu od pozitivního partnera a není ovlivněn negativitou toho druhého.

Může být nepřátelsko-lhostejný vztah úspěšný?

Než se pustíme do zodpovídání této otázky, ukážeme si jeden překvapující důsledek našeho modelu. Že totiž *nezáleží na stylu interakce (vyhýbavý, hádavý atd.) každého z partnerů, pokud jsou oba partneři sami o sobě pozitivní*, tj. $x_0 > 0, y_0 > 0$.

Máme systém rovnic

$$\begin{cases} x' = r_1(x_0 - x) + I_{yx}(y) \\ y' = r_2(y_0 - y) + I_{xy}(x), \end{cases} \quad (2.5.14)$$

kde funkce I jsou ve tvaru (2.5.9) a (2.5.10). Chceme určit jeho stacionární bod $[x^*, y^*]$. To nám komplikují funkce I . Proto předpokládáme, že pro něj platí

$$x^* > 0, y^* > 0.$$

Souřadnice stacionárního bodu pak určíme jako řešení soustavy algebraických rovnic

$$\begin{aligned} 0 &= r_1(x_0 - x^*) + I_{yx}(y^*) = r_1(x_0 - x^*) + a_1y^*, \\ 0 &= r_2(y_0 - y^*) + I_{xy}(x^*) = r_2(y_0 - y^*) + a_2x^*. \end{aligned}$$

Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} x^* &= \left[x_0 + \frac{a_1}{r_1}y_0 \right] / \left[1 - \frac{a_1a_2}{r_1r_2} \right] > 0, \\ y^* &= \left[y_0 + \frac{a_2}{r_2}x_0 \right] / \left[1 - \frac{a_1a_2}{r_1r_2} \right] > 0. \end{aligned}$$

Protože jmenovatel těchto souřadnic je díky předpokladu o stabilitě všech stacionárních bodů kladný, musí pro

$$x^* > 0, \quad y^* > 0$$

platit

$$\begin{aligned} x_0 + \frac{a_1}{r_1}y_0 &> 0, \\ y_0 + \frac{a_2}{r_2}x_0 &> 0. \end{aligned}$$

Tato podmínka je splněna vždy, když je

$$x_0 > 0, \quad y_0 > 0$$

a tudíž jsou-li oba partneři sami o sobě pozitivní, v jejich vztahu dochází k aditivnímu a multiplikativnímu efektu a platí

$$\begin{aligned} x^* &> x_0 > 0, \\ y^* &> y_0 > 0. \end{aligned}$$

O funkci vlivu jsme zde nic nepředpokládali a tedy za podmínky $x_0 > 0$ a $y_0 > 0$ bude vztah úspěšný, ať zvolíme jakoukoliv kombinaci funkcí vlivu (vyhýbavá, potvrzovací, hádací).

Nyní k otázce, zda-li může být nepřátelsko-lhostejný vztah úspěšný. Díky předchozí analýze bysme mohli tipnout, že může. Stačí, když budou oba partneři sami od sebe pozitivní.

V nepřátelsko-lhostejném vztahu je muž potvrzovač a žena hádač. Systém rovnic modelující tento vztah je

$$\begin{cases} x' = r_1(x_0 - x) + a_1y \\ y' = r_2(y_0 - y) + a_2I(x), \end{cases} \quad (2.5.15)$$

kde x je skóre ženy, y je skóre muže a

$$I(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x > 0 \\ x & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

Předpokládejme tedy, že jsou muž i žena sami od sebe pozitivní. Aby byl vztah úspěšný, musí platit

$$x^* \geq x_0 > 0, \quad y^* \geq y_0 > 0.$$

Hledáme tedy stacionární bod $[x^*, y^*]$ s kladnými souřadnicemi, takže řešíme soustavu algebraických rovnic

$$0 = r_1(x_0 - x^*) + a_1 y^*, \quad 0 = r_2(y_0 - y^*) + 0,$$

jejímž řešením jsou souřadnice hledaného stacionárního bodu

$$x^* = x_0 + \frac{a_1}{r_1} y_0,$$
$$y^* = y_0.$$

Vidíme, že zatímco muž je stále stejně šťastný, ženu tento vztah naplňuje a činí ji šťastnější. Jsou-li tedy oba partneři pozitivní, jejich vztah lze klasifikovat jako úspěšný.

Závěr

Cílem práce bylo vytvoření učebního textu věnovaného autonomním diferenciálním systémům a jejich aplikacích v reálném světě. Učebních textů na toto téma je mnoho a vesměs jsou psány formou definice, věta, důkaz. Proto jsem se zaměřil na intuitivnější pohled na tuto problematiku, přičemž na formální výklad odkazuji v úvodu práce. V práci bylo představeno celkem pět aplikačních příkladů, z toho první čtyři jsou známé a hojně uváděné i v jiných publikacích a pracích. V pátém příkladu byla vyložena základní teorie manželských konfliktů, která se doposud v české literatuře nevyskytovala. Tato teorie vznikla v průběhu 90. let 20. století a v roce 2002 byla vydána kniha *The mathematics of marriage: dynamic nonlinear models*. Teorie v ní vyložená je mnohem obsáhlejší než v této práci. Rovnice jsou obohaceny o *opravný člen*, který představuje rozhodnutí jednoho z partnerů napravit jejich nefungující vztah. Dále je model rozšířen na triadickou interakci manžel-manželka-dítě atp. Vzhledem k rozsahu této práce nebyl prostor takto obširný model zpracovat. Případně zájemce o tuto problematiku je možné odkázat na již zmíněnou knihu [5].

Seznam použité literatury

- [1] BRAUN, Martin. *Differential equations and their applications: an introduction to applied mathematics*. 4th ed. New York: Springer-Verlag, c1993. ISBN 0-387-97894-1.
- [2] TUNG, K. K. *Topics in mathematical modeling*. Oxford: Princeton University Press, 2007. ISBN 978-0-691-11642-6.
- [3] KALAS, Josef a Miloš RÁB. *Obyčejné diferenciální rovnice*. Vyd. 2. Brno: Masarykova univerzita, 2001. ISBN 80-210-2589-1.
- [4] KALAS, Josef a Zdeněk POSPÍŠIL. *Spojité modely v biologii*. Brno: Masarykova univerzita, 2001. ISBN 80-210-2626-x.
- [5] GOTTMAN, John Mordechai. *The mathematics of marriage: dynamic nonlinear models*. Cambridge, Mass.: MIT Press, c2002. ISBN 0262072262.
- [6] DOBRUSHKIN, V. A. *Applied differential equations: the primary course*. Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis, 2015. ISBN 978-1-4398-5104-3.
- [7] COOK, Julian, Rebecca TYSON, Jane WHITE, Regina RUSHE, John GOTTMAN a James MURRAY. Mathematics of marital conflict: Qualitative dynamic mathematical modeling of marital interaction. *Journal of Family Psychology*. 1995, 1999, 9(2), 110-130. DOI: 10.1037/0893-3200.9.2.110. ISSN 1939-1293. Dostupné také z: <http://joe.ramfeezled.com/wp-content/uploads/Cook-et-al-JFamilyPsyc-19951.pdf>
- [8] *Autonomní diferenciální rovnice a jejich fázové portréty* [online]. Brno, 2009 [cit. 2018-04-20]. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/207590/prif_b/Autonomni_diferencialni_rovnice_a_jejich_fazove_portrety.pdf. Bakalářská práce. Masarykova Univerzita.
- [9] Frederick W. Lanchester. Wikipedia [online]. [cit. 2017-07-18]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Frederick_W._Lanchester#Petrol_engines
- [10] MOREHOUSE, Clifford Phelps. *The Iwo Jima operation*. Washington: Historical division, headquarters, U. S. Marine corps, 1946.

