

MASARYKOVA UNIVERZITA  
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA



Bakalářská práce

# Diferenční počet a iterování funkcí

Brno 2007

Eva Dubjaková

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně, pouze za odborného vedení prof. RNDr. Ondřeje Došlého, DrSc. Dále prohlašuji, že veškeré zdroje, prameny a literaturu, které jsem při vypracování použila, jsem uvedla v seznamu literatury.

V Brně, 25. května 2007

.....

Eva Dubjaková

## **Poděkování**

Ráda bych poděkovala svému vedoucímu bakalářské práce, prof. RNDr. Ondřeji Došlému, DrSc., za pečlivé pročitání textu, cenné rady a připomínky k práci, které mi pomohly při zpracování tématu.

# Obsah

Úvod	5
1 Iterace funkce	6
2 Pevné body	8
3 Cykly	12
4 Stabilita a chaos	21
5 Použití iterací	24
Seznam použité literatury	28

# Úvod

Iterace spojitých a nespojitých funkcí v reálném oboru jsou už dlouho předmětem zájmu matematiků. První práce zabývající se tímto tématem jsou známy z 30. let minulého století. Všechny úvahy se však věnují jen konkrétním, ne příliš složitým funkcím. Proto v 70. letech minulého století vyvolala velký rozruch práce ruského matematika A. N. ŠARKOVSKÉHO uveřejněná v roce 1964, která řeší problémy ve všeobecnosti a především obecně osvětluje existenci cyklů iterovaných funkcí.

Cílem této práce je seznámit čtenáře s problematikou iterace funkce z pohledu diferenčních rovnic a diskrétních dynamických systémů. Zvláštní pozornost je věnována existenci limitních cyklů a Šarkovského uspořádání na množině přirozených čísel. Při čerpání informací o těchto tématech byly využity především [2] a [7].

V první kapitole zavádíme pojem iterace funkce, a to pomocí jednoduchého příkladu, kde se snažíme najít přibližné řešení jisté rovnice. Druhá kapitola objasňuje význam pevných bodů a zabývá se jejich klasifikací. Ve třetí kapitole nalezne čtenář pojednání o cyklech, jejichž vznik a vývoj je vysvětlen na příkladě s parametrem. Zde je také uvedena a dokázána významná Šarkovského věta, která měla vliv na rozvoj dynamických systémů a teorii chaosu. Právě teorie chaosu je předmětem kapitoly 4, ale vzhledem k rozsahu této práce jde o pouhé uvedení do problému. Především jsou studovány otázky stability chaotických a nechaotických funkcí. Konečně, kapitola 5 se dotýká možných aplikací iterací v biologii a epidemiologii.

Pro lepší představu je celá práce doplněna obrázky. Použité značení je v souladu s běžně užívaným. Práce předpokládá, že čtenář má středoškolské znalosti matematiky.

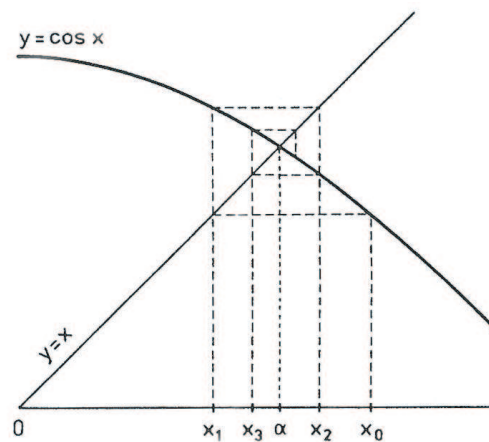
# Kapitola 1

## Iterace funkce

Jako motivaci pro vyšetřování iterací funkcí, pokusme se najít řešení rovnice

$$\cos x = x \quad \text{pro } x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad (1.1)$$

kde úhel  $x$  měříme v obloukové míře. Zvolme libovolné číslo  $x = x_0$ ,  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , vypočítejme  $x_1 = \cos x_0$ , pak  $x_2 = \cos x_1 = \cos(\cos x_0)$  atd. Získáme posloupnost čísel  $x_0, x_1, x_2, \dots$ , o které numerickým výpočtem zjistíme, že konverguje k číslu  $\alpha = 0,73908\dots$  jako na obrázku 1.1.



Obrázek 1.1: Graf iterace funkce  $\cos x = x$

Popišme si tedy blíže tuto metodu. Nechť  $f$  je spojitá funkce definovaná na uzavřeném intervalu  $[a, b]$  a nechť tento interval zobrazuje do sebe. Zvolme libovolnou počáteční aproximaci  $x_0 \in [a, b]$ . Generujme posloupnost  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  takto:

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

Funkci  $f$  nazveme *iterační funkcí* a metodu (1.2) *iterační metodou* nebo také *metodou prosté iterace*. Složená funkce  $f^n$ , kde  $n \in \mathbb{N}$ , se nazývá *n - tá iterace funkce f* a lze ji rekurzivně

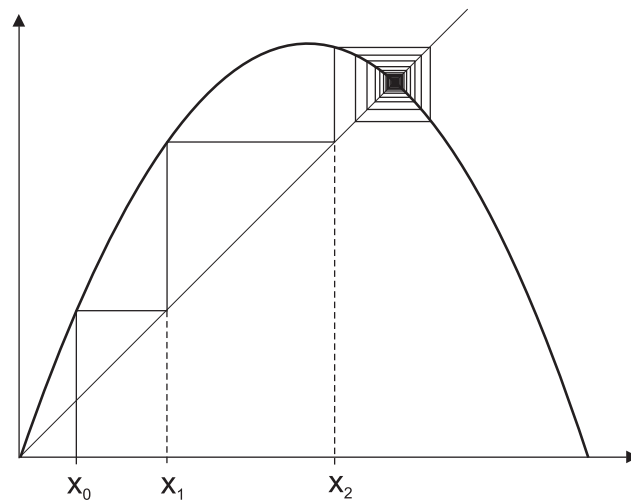
definovat takto:

$$f^1(x) = f(x), \quad f^{n+1}(x) = f(f^n(x)), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Tato metoda je v mnohých případech jediným prostředkem pro nalezení řešení různých rovnic, hodnot některých funkcí, a podobně.

Všimněme si, že tvar rovnice  $x_{n+1} = f(x_n)$ , je vlastně *diferenční rovnicí 1. řádu*. Systém těchto rovnic tvoří tak zvaný *diskrétní dynamický systém*, který popisuje změnu stavu v určitých pravidelných časových intervalech např. po rocích, hodinách, sekundách, tedy popisuje dynamické chování. Pomocí vhodných dynamických systémů můžeme modelovat průběhy některých matematických, fyzikálních a biologických dějů, jako např. průběhy některých algoritmů, pohyby planet, počty jedinců určitých populací. Časový průběh takových systémů bývá různý. Někdy se systém po určitém počtu kroků (tj. po určitém čase) ustálí na nějaké hodnotě nebo se alespoň nějaké hodnoty v pravidelném cyklu opakují, jindy rostou nabývané hodnoty nade všechny meze. V následujícím textu se budeme zabývat vlastnostmi těchto dosažených stavů.

Také nás zajímá, jak se bude systém pro různé počáteční podmínky vyvíjet, proto studujeme tzv. *orbity bodů*. Jsou to posloupnosti  $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f^2(x_0) = f(f(x_0)), x_3 = f^3(x_0) = f(f(f(x_0))) \dots$ , kde  $x_0$  udává počáteční stav,  $x_1$  stav po prvním časovém intervalu,  $x_2$  stav po druhém časovém intervalu, atd.



Obrázek 1.2: Orbity bodu  $x_0$

Na obrázku 1.2 je znázorněna orbita bodu  $x_0$  nějakého diskrétního dynamického systému. „Schody“ spojují body o souřadnicích  $(x_0, 0), (x_0, f(x_0)), (f(x_0), f(x_0)), (f(x_0), f(f(x_0))) \dots$ . Z obrázku je vidět, jak se body o souřadnicích  $(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0))$  blíží k jednomu bodu.

## Kapitola 2

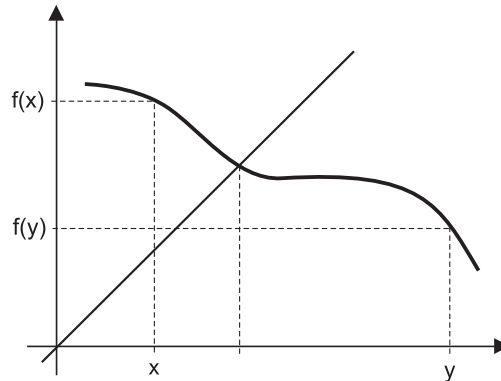
# Pevné body

V této části se budeme zabývat existencí a klasifikací bodů, ke kterým se „schody“ popsané v předcházejícím odstavci mohou blížit, utíkat do nekonečna nebo se v pravidelných cyklech opakovaně přibližovat. Mluvíme o tak zvaných *pevných bodech*.

**Definice 1.** Řekneme, že bod  $\alpha \in [a, b]$  je pevným bodem funkce  $f$ , jestliže platí  $f(\alpha) = \alpha$ .

Samozřejmě, všechny funkce nemají pevný bod, dokonce i když jsou spojité. Příkladem je funkce  $f(x) = x + 1$ , která nemá žádný pevný bod, protože neexistuje řešení rovnice  $x + 1 = x$ . Pro spojité funkce platí následující věta, která (jak je vidět z obrázku 2.1) zaručuje existenci pevných bodů.

**Věta 2.1.** *Nechť  $f$  je spojitá funkce na intervalu  $I$  a nechť existují takové body  $x, y \in I$ , že  $f(x) > x$  a  $f(y) < y$ . Potom  $f$  má pevný bod ležící mezi  $x$  a  $y$ .*



Obrázek 2.1: Pevný bod  $\alpha$  ležící mezi body  $x$  a  $y$

*Důkaz.* Položme  $g(t) = f(t) - t$ . Protože  $f(x) > x$  a  $f(y) < y$ , tak platí, že  $g(x) > 0$ ,  $g(y) < 0$ . Vzhledem k tomu, že funkce  $g$  je spojitá, musí mít podle Bolzanovy věty<sup>1</sup> mezi  $x$  a  $y$  nulový bod  $\alpha$ . Potom ale  $f(\alpha) = \alpha$ .  $\square$

<sup>1</sup>Nechť  $f$  je spojitá funkce na intervalu  $[a, b]$ . Pak  $f$  nabývá všech hodnot mezi svou největší a nejmenší hodnotou.



**Důsledek 2.2.** *Nechť  $f$  je spojitá funkce definovaná na uzavřeném intervalu  $I$ . Jestliže  $f(I) \subset I$ , pak  $f$  má v  $I$  pevný bod.*

*Důkaz.* Nechť  $I = [a, b]$  a předpokládejme, že ani  $a$  ani  $b$  nejsou pevné body. Potom  $f(a) > a$  a  $f(b) < b$  a stačí použít větu 2.1.  $\square$

Pevné body lze podle chování funkce  $f$  v okolí těchto bodů klasifikovat následovně:

**Definice 2.** Nechť  $f: I \rightarrow I$ , kde  $I$  je interval v  $\mathbb{R}$ , a  $\alpha$  je pevný bod funkce  $f$ . Pak

1.  $\alpha$  je *stabilní* pevný bod, jestliže pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  tak, že pro každé  $x \in I$  splňující  $|x - \alpha| < \delta$  platí  $|f^n(x) - \alpha| < \varepsilon$  pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ . Jinak se pevný bod  $\alpha$  nazývá *nestabilní*.
2.  $\alpha$  je *přitahující* pevný bod, jestliže existuje  $\eta > 0$  tak, že pro každé  $x \in I$  splňující  $|x - \alpha| < \eta$  platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \alpha$ .
3.  $\alpha$  je *asymptoticky stabilní* pevný bod, jestliže je jak stabilním, tak přitahujícím pevným bodem. Jestliže  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \alpha$  pro každé  $x \in I$ , pak  $\alpha$  je *globálně asymptoticky stabilní* pevný bod.

Následující věta uvádí jiná kritéria, kterými můžeme rozhodnout o nestabilitě a asymptotické stabilitě pevných bodů.

**Věta 2.3.** *Nechť  $f: I \rightarrow I$  je spojitá funkce a nechť  $\alpha$  je její pevný bod.*

1. *Jestliže pro všechna  $x \neq \alpha$  z nějakého okolí  $V$  bodu  $\alpha$  platí*

$$\left| \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right| < 1, \quad (2.1)$$

*pak  $\alpha$  je asymptoticky stabilní pevný bod.*

2. *Jestliže pro všechna  $x \neq \alpha$  z nějakého okolí  $V$  bodu  $\alpha$  platí*

$$\left| \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right| > 1, \quad (2.2)$$

*pak  $\alpha$  je nestabilní pevný bod.*

*Důkaz.* Dokážeme tvrzení týkající se asymptotické stability, v případě nestability je důkaz analogický. Nechť  $x_0 \in V$  je libovolné číslo,  $x_0 \neq \alpha$ . Označme  $x_n = f^n(x_0)$  pro  $n = 1, 2, \dots$ . Jestliže v (2.1) položíme  $x = x_n$ , dostaneme

$$|f(x_n) - f(\alpha)| < |x_n - \alpha|$$

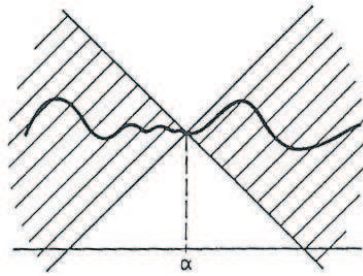
a jestliže  $f(\alpha) = \alpha$  a  $f(x_n) = x_{n+1}$ , tak

$$|x_{n+1} - \alpha| < |x_n - \alpha|.$$

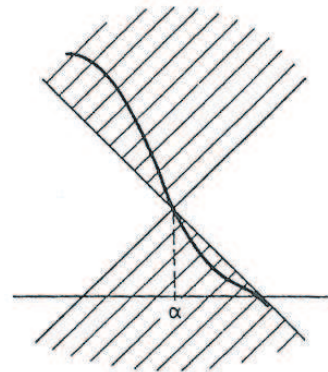
Je vidět, že posloupnost  $a_n = |x_n - \alpha|$  je klesající a zdola omezená (například nulou), má tedy nějakou limitu  $a$ . Stačí ukázat, že  $a = 0$ . Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme tedy,

že  $a > 0$ . Z (2.1) vyplývá, že  $f(\alpha - a) \in (\alpha - a, \alpha + a) = J$ . Protože  $f$  je spojitá funkce, pak existuje takové okolí  $V_-$  bodu  $\alpha - a$ , že  $f(V_-) \subset J$ . Podobně existuje okolí  $V_+$  bodu  $\alpha + a$  se stejnou vlastností, že  $f(V_+) \subset J$ . Protože  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \alpha| = a$ , existuje takové  $n$ , že  $x_n \in V_-$  nebo  $x_n \in V_+$ . Potom ale  $x_{n+1} = f(x_n) \in J$ , tedy  $|x_{n+1} - \alpha| < a$ , a to není možné. Dostali jsme spor, a tak jsme dokázali tvrzení 1.  $\square$

Podmínka (2.1) znamená, že graf funkce  $f$  v okolí bodu  $\alpha$  leží v oblasti, která je vyšrafovaná na obrázku 2.2, podmínka (2.2) znamená, že graf leží v oblasti vyšrafované na obrázku 2.3.



Obrázek 2.2: oblast asymptoticky stabilního pevného bodu



Obrázek 2.3: oblast nestabilního pevného bodu

Jestliže funkce  $f$  má v pevném bodě  $\alpha$  derivaci, pak v některých případech můžeme rozhodnout o charakteru pevného bodu podle následující věty:

**Věta 2.4.** *Nechť spojitá funkce  $f: I \rightarrow I$  má v pevném bodě  $\alpha \in I$  derivaci.*

1. *Jestliže  $|f'(\alpha)| < 1$ , pak  $\alpha$  je asymptoticky stabilní pevný bod.*
2. *Jestliže  $|f'(\alpha)| > 1$ , pak  $\alpha$  je nestabilní pevný bod.*

*Důkaz.* Dokážeme vztah, který platí pro asymptotickou stabilitu. Pro nestabilitu je důkaz analogický. Nechť  $|f'(\alpha)| < 1$ . Ze vztahu

$$f'(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$$

vyplývá, že pro všechny  $x \neq \alpha$ , které leží dostatečně blízko k  $\alpha$ , musí platit (2.1) a stačí použít větu 2.3.  $\square$

Vyšetřovat případ, kdy  $|f'(\alpha)| = 1$ , je poněkud složitější. Může vzniknout situace, kdy při počáteční iteraci na jedné straně okolí bodu  $\alpha$  je proces konvergentní a na druhé divergentní.

V závěru této části ještě uvedme větu, kterou použijeme později.

**Věta 2.5.** *Nechť  $f: I \rightarrow I$  je spojitá funkce a nechť pro nějaké  $x_0 \in I$  posloupnost  $\{f^n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$  konverguje k nějakému bodu  $\alpha$ . Potom  $\alpha$  je pevný bod funkce  $f$ .*

*Důkaz.* Nechť  $\varepsilon > 0$ . Protože  $f$  je spojitá funkce v bodě  $\alpha$ , existuje  $\delta > 0$  takové, že pro každé  $y \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$  je

$$|f(y) - f(\alpha)| < \varepsilon. \quad (2.3)$$

Můžeme předpokládat, že  $\delta < \varepsilon$ . Protože  $f^n(x_0)$  konverguje k  $\alpha$ , pro všechna dostatečně velká  $n$  bude

$$|f^n(x_0) - \alpha| < \delta < \varepsilon, \quad (2.4)$$

tedy podle (2.3)

$$|f(f^n(x_0)) - f(\alpha)| = |f^{n+1}(x_0) - f(\alpha)| < \varepsilon. \quad (2.5)$$

Z (2.4) a (2.5) vyplývá, že

$$|f(\alpha) - \alpha| \leq |f(\alpha) - f^{n+1}(x_0)| + |f^{n+1}(x_0) - \alpha| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

pro všechna dostatečně velká  $n$ . Ukázali jsme, že  $|f(\alpha) - \alpha|$  je menší než libovolné kladné číslo, tedy  $f(\alpha) - \alpha = 0$ ,  $\alpha$  je pevný bod funkce  $f$ .  $\square$

## Kapitola 3

# Cykly

V matematickém modelu představuje pevný bod ustálený režim. Například v modelu vývoje populace to znamená, že jestliže úroveň populace dosáhne hodnoty  $x_n = \alpha$ , kde  $\alpha$  je pevný bod, pak se už dále nemění. To jistě platí v případě, kdy posloupnost  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  konverguje (podle věty 2.5 k nějakému pevnému bodu). Ustálený režim ale mohou představovat i některé nekonvergentní posloupnosti, například periodická posloupnost  $1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots$  s periodou 3. V této části se budeme věnovat funkcím, které generují periodické posloupnosti a otázkám existence a stability periodických bodů.

**Definice 3.** Nechť  $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ . Pak řekneme, že bod  $x_0$  je *bodem cyklu řádu  $n$*  funkce  $f$  (*periodickým bodem* funkce  $f$  s *periodou  $n$*  nebo že  $x_0$  generuje *cyklus řádu  $n$*  či  *$n$ -periodní limitní cyklus*), jestliže  $f^n(x_0) = x_0$  a současně  $f^i(x_0) \neq x_0$  pro  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ .

Zřejmě posloupnost generovaná takovýmto bodem  $x_0$  je periodická a má (základní) periodu  $n$ . Orbita periodického bodu  $x_0$  funkce  $f$  s periodou  $n$ , je tedy posloupnost  $x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)$ . Je zřejmé, že body této posloupnosti tvoří cyklus řádu  $n$ .

**Příklad 1.** Uvažujme funkci  $f(x) = -x$ , definovanou na celé množině  $\mathbb{R}$ . Tato funkce má jediný pevný bod  $\alpha = 0$  (který je vlastně bodem cyklu řádu 1) a všechny ostatní body jsou cykly řádu 2. To znamená, že každý takový bod  $x_0$  generuje periodickou posloupnost  $x_0, -x_0, x_0, -x_0, \dots$  s periodou 2. ▲

**Příklad 2.** Definujme funkci  $f$  z  $\mathbb{R}$  do  $\mathbb{R}$  takto:

$$f(1) = 2, \quad f(2) = 3, \quad f(3) = 1 \quad \text{a} \quad f(x) = 0 \quad \text{pro ostatní } x.$$

Tato funkce má právě jeden cyklus řádu 3 tvořený body 1, 2, 3 a nemá žádný jiný cyklus. Naše funkce má ale nevýhodu – je nespojitá. ▲

Kdybychom se snažili najít *spojitou* funkci v  $\mathbb{R}$ , která by měla právě jeden cyklus řádu 3 a žádné jiné cykly, tak bychom neuspěli. Jak uvidíme v následujícím příkladě, pro existenci cyklů spojitých funkcí platí jisté zákonitosti. Například spojitá funkce, která má cyklus řádu 3, musí mít cykly všech možných řádů, včetně pevných bodů. Dále budeme zkoumat pouze spojitě funkce. Uvedeme příklad funkce závislé na parametru, kde si ukážeme, jak se změnou parametru vznikají cykly různých řádů. Dříve než uvedeme tento příklad, vyslovíme definici a větu, které využijeme při vyšetřování stability vzniklých cyklů.

**Definice 4.** Nechť  $f: I \rightarrow I$  je spojitá funkce a nechť body  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  tvoří její cyklus řádu  $k$ . Potom tento cyklus je:

1. *asymptoticky stabilní*, jestliže alespoň jeden z bodů tohoto cyklu je asymptoticky stabilním bodem funkce  $f^k$ ;
2. *nestabilní*, jestliže alespoň jeden z bodů tohoto cyklu je nestabilním bodem funkce  $f^k$ .

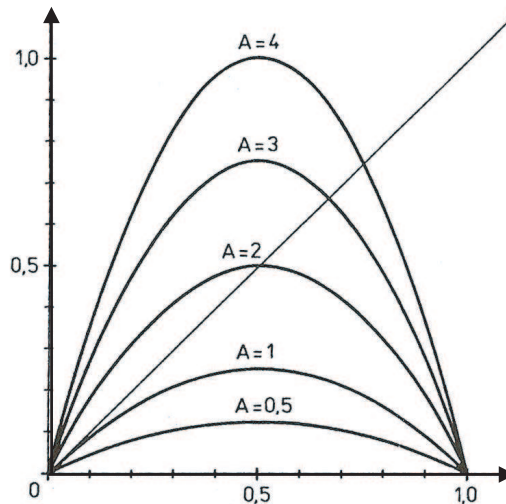
**Věta 3.1.** Nechť  $f: I \rightarrow I$  je spojitá funkce, která má všude v  $I$  derivaci a nechť  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  je její  $k$ -cyklus. Označme  $D = f'(\alpha_1) \cdot f'(\alpha_2) \cdot \dots \cdot f'(\alpha_k)$ . Potom uvedený cyklus je asymptoticky stabilní, jestliže  $|D| < 1$ , a nestabilní, jestliže  $|D| > 1$ .

*Důkaz.* Pro derivování složené funkce  $g(h(x))$  platí vztah  $[g(h(x))]' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$ . Když toto pravidlo opakovaně použijeme v případě složené funkce  $f^k(x)$ , dostaneme

$$[f^k(x)]' = f'(f^{k-1}(x)) \cdot f'(f^{k-2}(x)) \cdot \dots \cdot f'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Když za  $x$  dosadíme  $\alpha_1$  a použijeme vztahy  $\alpha_2 = f(\alpha_1)$ ,  $\alpha_3 = f(\alpha_2) = f^2(\alpha_1), \dots$  a větu 2.4, dostaneme tvrzení věty 3.1.  $\square$

**Příklad 3.** Vyšetřeme stabilitu pevných bodů funkce  $f(x) = Ax(1-x)$  pro  $x \in [0, 1]$  a  $A \in [0, 4]$  v závislosti na parametru  $A$ . Touto funkcí můžeme například modelovat růst populace na omezeném teritoriu. Za výše uvedených předpokladů je funkce  $f$  spojitá na intervalu  $[0, 1]$  a zobrazuje tento interval do sebe. V případě, kdy  $A \notin [0, 4]$ , funkce  $f$  nezobrazuje interval  $[0, 1]$  do sebe. Tímto problémem se ale zabývat nebudeme.



Obrázek 3.1: Graf funkce  $f(x) = Ax(1-x)$  pro některé hodnoty parametru  $A$

Najdeme nyní pevné body funkce  $f$ . Získáme je řešením rovnice  $f(x) = x$ , tj.

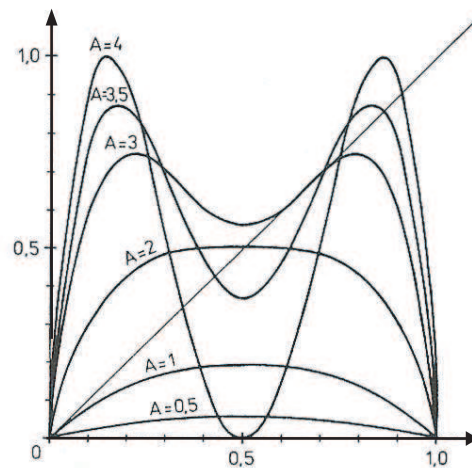
$$x = Ax(1-x). \quad (3.1)$$

Vidíme, že pro  $A \in [0, 1]$  existuje v  $[0, 1]$  jediný pevný bod  $\alpha = 0$ , pro  $A \in (1, 4]$  právě dva pevné body  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1 - \frac{1}{A}$ . Rozeberme nyní podrobně jednotlivé případy.

1.  $A \in [0, 1]$ 

Vzhledem k tomu, že funkce  $f$  má v intervalu  $[0, 1]$  jediný pevný bod  $\alpha = 0$ , její graf musí ležet pod přímkou  $y = x$ . Protože  $f'(x) = A - 2Ax$  a tedy  $|f'(0)| = |A| \leq 1$ , pak podle věty 2.4 jde o asymptoticky stabilní pevný bod (i pro  $A = 1$ , kde konvergence bude pomalá). Tedy pro každé  $x_0 \in [0, 1]$  posloupnost  $\{f^n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$  konverguje k 0. Populace s takovým parametrem  $A$  vyhyne.

Všimněme si, co se bude dít s dosud jediným pevným bodem  $\alpha = 0$ , když se  $A$  začne měnit od 1 do 4. Bod  $\alpha$  se „rozdvojí“ – oddělí se od něho bod  $\beta = 1 - \frac{1}{A}$  a začne se vzdalovat (pro  $A = 1$  je  $\beta = 0$  pro  $A = 4$  je  $\beta = 3/4$ ). Hodnotu  $A = 1$  můžeme tedy považovat za *kritickou hodnotu* parametru  $A$  pro vznik druhého pevného bodu.



Obrázek 3.2: Graf funkce  $f^2$  pro některé hodnoty parametru  $A$

2.  $A \in (1, 3]$ 

V tomto případě  $f'(0) = A$  a  $f'(\beta) = A - 2$ . Použitím věty 2.4 zjistíme, že bod  $\alpha$  je nestabilním pevným bodem, protože  $|f'(\alpha)| > 1$  a  $\beta$  pro  $A \in (1, 3)$  je asymptoticky stabilním pevným bodem, neboť  $|f'(\beta)| < 1$ . Pro  $A = 3$  je  $|f'(\beta)| = 1$ , tedy větu 2.4 nelze použít. Ale i v tomto případě je  $\beta$  asymptoticky stabilní pevný bod i když konvergence bude velmi pomalá. Lze ukázat, že pro  $A \in (1, 3]$  posloupnost generovaná libovolným bodem  $x_0$  konverguje k pevnému bodu  $\beta$ . Vyplývá to z vět 3.2 a 3.4, které jsou uvedeny později. Z těchto vět také plyne asymptotická stabilita  $\beta$  pro  $A = 3$ . Tedy pro hodnoty parametru  $A \in (1, 3]$  se stav populace ustálí na hodnotě  $x_n$  a v dalších generacích nenastávají žádné výraznější změny.

3.  $A \in (3, 4]$ 

Pro tyto hodnoty  $A$  vždy existuje alespoň jedna dvojice bodů  $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in (0, 1)$  tak, že  $f(\bar{x}_1) = \bar{x}_2$  a  $f(\bar{x}_2) = \bar{x}_1$ ; body  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$  tvoří cyklus řádu 2 funkce  $f$ . Pro každý z bodů  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$  platí  $f^2(\bar{x}_1) = \bar{x}_1, f^2(\bar{x}_2) = \bar{x}_2$ . Tedy  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$  jsou pevné body funkce  $f^2$  a můžeme

je najít řešením rovnice  $f^2(x) = x$  tj. rovnice

$$A[Ax(1-x)][1-Ax(1-x)] = x.$$

Po úpravě

$$A^3x^4 - 2A^3x^3 + (A^3 + A^2)x^2 - A^2x + x = 0. \quad (3.2)$$

Kořeny této rovnice jsou oba pevné body (cykly řádu 1)  $x = 0$  a  $x = 1 - \frac{1}{A}$ . Když rovnici (3.2) vydělíme polynomem  $x(x - (1 - \frac{1}{A}))$ , dostaneme kvadratickou rovnici

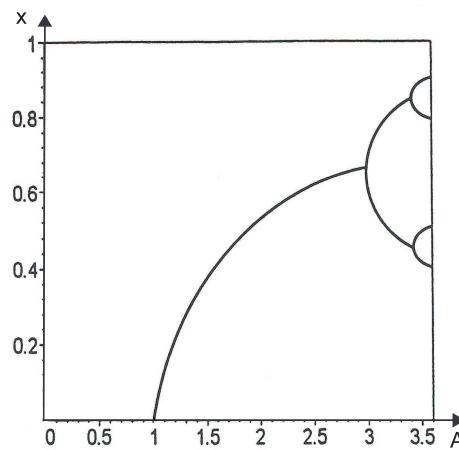
$$A^2x^2 - (A^2 + A)x + (A + 1) = 0. \quad (3.3)$$

Řešením této rovnice je

$$\bar{x}_1 = \frac{(1+A) + \sqrt{(A+1)(A-3)}}{2A},$$

$$\bar{x}_2 = \frac{(1+A) - \sqrt{(A+1)(A-3)}}{2A}.$$

Diskriminant je  $D = (A+1)(A-3)$ . Vidíme, že  $D > 0$  (a tedy rovnice má dva různé kořeny) právě tehdy, když  $A > 3$  (případ, kdy  $A < -1$  vylučujeme). Pro  $A = 3$  je  $D = 0$  a jediným kořenem a to dvojnásobným je pevný bod  $\beta = 2/3$ . Tedy cyklus řádu 2 vznikne tak, že se z pevného bodu  $\beta = 2/3$  s rostoucím  $A$  oddělí dva další body a budou se vzdalovat od  $\beta$  a od sebe navzájem (viz obrázek 3.3).



Obrázek 3.3: Vznik cyklu řádu 2 a 4

Vyšetřujeme nyní stabilitu tohoto cyklu. Podle věty 3.1 je tento 2-cyklus asymptoticky stabilní, jestliže

$$|f'(\bar{x}_1) \cdot f'(\bar{x}_2)| < 1.$$

Dostáváme nerovnosti

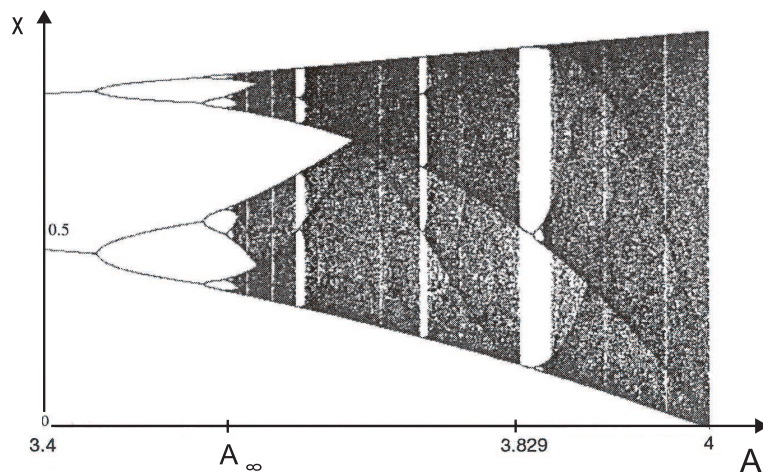
$$\begin{aligned} -1 &< A^2(1 - 2\bar{x}_1)(1 - 2\bar{x}_2) < 1 \\ -1 &< A^2 \left(1 - \frac{(1+A)+\sqrt{A^2-2A-3}}{A}\right) \left(1 - \frac{(1+A)-\sqrt{A^2-2A-3}}{A}\right) < 1 \\ -1 &< -A^2 + 2A + 4 < 1. \end{aligned}$$

Po vyřešení posledních dvou nerovností dostaneme, že cyklus řádu 2 je asymptoticky stabilní pro  $3 < A < 1 + \sqrt{6}$ . Pro případ, kdy  $A = 1 + \sqrt{6}$ , je

$$|f'(\bar{x}_1) \cdot f'(\bar{x}_2)| = 1.$$

Zde nelze aplikovat větu 3.1, ale užitím jiných prostředků (které zde nebudeme popisovat) dojdeme k závěru asymptotické stability i pro tuto hodnotu parametru  $A$ . Když  $A > 1 + \sqrt{6}$  je 2-cyklus nestabilní.

Najít 2<sup>2</sup>-cyklus, znamená vyřešit rovnici  $f^4(x) = x$ . To vyžaduje řešit rovnici 12-tého stupně, což je prakticky nemožné. Z toho důvodu se věnujme pouze grafickému znázornění vzniku 2<sup>2</sup>-cyklů.



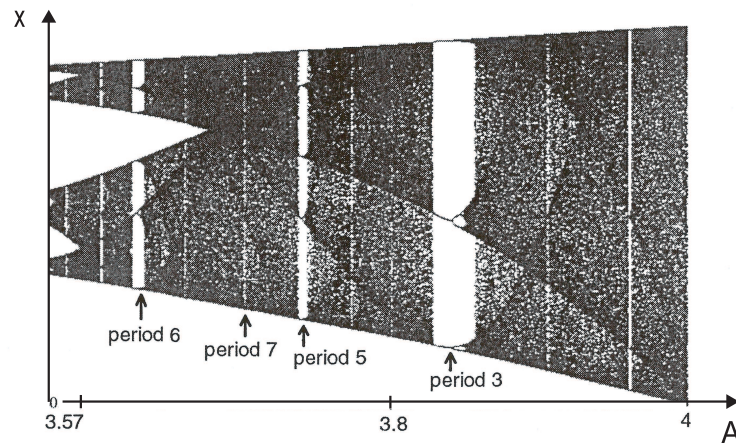
Obrázek 3.4: Bifurkační diagram funkce  $f(x) = Ax(1 - x)$

Z obrázku 3.3 je vidět, že 2<sup>2</sup>-cyklus vznikne když  $A > 1 + \sqrt{6} \approx 3,44949$ . Tento cyklus je asymptoticky stabilní pro  $1 + \sqrt{6} < A \leq 3,54409$  a ztratí svoji stabilitu při  $A > 3,54409$ . Úvahu opakujeme pro  $A > 3,54409$ . Cyklus řádu 2<sup>2</sup> se rozdvojí (bifurkuje) na asymptoticky stabilní 2<sup>3</sup> cyklus. Tento proces zdvojení bude pokračovat do nekonečna a vytvoří posloupnost  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ , která bude asymptoticky konvergovat k  $A_{\infty} \approx 3,5700\dots$ . Hodnota parametru  $A_{\infty} \approx 3,5700\dots$  má mezi všemi hodnotami parametrů zvláštní postavení. Pro populace s parametrem  $A_{\infty}$  můžeme ještě s jistotou předpovídat její dlouhodobý časový vývoj. Protože jestliže  $A < A_{\infty}$ , pak každá posloupnost generovaná libovolným prvkem  $x_0 \in [0, 1]$  je buď periodická (a její periodou musí být jedno z čísel



$1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$ ), nebo konverguje k některé takové periodické posloupnosti tj. existuje taková periodická posloupnost  $y_0, y_1, y_2, \dots$  s periodou  $2^n$ , že  $\lim_{i \rightarrow \infty} (y_i - f^i(x_0)) = 0$ . Výše uvedená periodická posloupnost je generovaná prvkem  $y_0$  a funkcí  $f(x)$ . Říkáme, že posloupnost  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  je *asymptoticky periodická*. Teprve pro hodnoty  $A > 3,5700$  nelze předpovědět její další vývoj.

Nejllepší způsob jak ilustrovat vzniklou situaci je vytvořit tzv. *bifurkační diagram*, který vznikl zaznamenáním 5001.-5120. iterace vyšetřované funkce  $f$  pro různé hodnoty parametru  $A \in [0, 4]$  jako na obrázku 3.4.



Obrázek 3.5: Liché cykly a jejich  $2^n$ násobky

Největší „okno“ v bifurkačním diagramu vzniklo pro hodnotu  $A$  mezi 3,828 a 3,857. Nazývá se „okno periody 3“. Asymptoticky stabilní 3-cyklus se poprvé objeví pro  $A = 1 + \sqrt{8} \approx 3,828$ . Tento cyklus se začne zdvojit a postupně vzniknou všechny cykly liché délky a jejich  $2^n$ násobky. Okna těchto cyklů se objevují nalevo od okna periody 3 (viz obrázek 3.5). ▲

Z uvedeného příkladu je vidět, že vyšetřovat existenci cyklů některých funkcí není jednoduchá záležitost. Vlastnosti iterace funkce jsou již dlouho předmětem zájmu matematiků. V roce 1975 Li a Yorke [5] uveřejnili článek: „Perioda tři implikuje chaos“. Zde dokázali, že jestliže spojité zobrazení  $f$  má cyklus řádu 3, pak musí mít cykly řádu  $k$  pro každé  $k \in \mathbb{N}$ . Později se zjistilo, že tato Li – Yorke věta je pouze speciální případ významné věty publikované v roce 1964 Ukrajinským matematikem A. N. Šarkovským [2, 3, 5, 7]. Šarkovský zavedl nový způsob uspořádání  $\prec$  přirozených čísel, které začíná číslem 3. Dokázal, že jestli  $k \prec r$  a  $f$  má cyklus řádu  $k$ , pak musí mít cykly řádu  $r$ . Uvedme si nyní přesné znění Šarkovského věty a některých jejích speciálních případů:

**Věta 3.2 (Šarkovského věta).** *Nechť  $f: I \rightarrow I$  je spojitá funkce. Na množině přirozených čísel zavedme nové uspořádání definováno takto:*

$$3 \prec 5 \prec 7 \prec \dots \prec 2 \cdot 3 \prec 2 \cdot 5 \prec 2 \cdot 7 \prec \dots \prec 2^2 \cdot 3 \prec 2^2 \cdot 5 \prec 2^2 \cdot 7 \prec \\ \prec \dots \prec 2^n \cdot 3 \prec 2^n \cdot 5 \prec 2^n \cdot 7 \prec \dots \prec 8 \prec 4 \prec 2 \prec 1$$

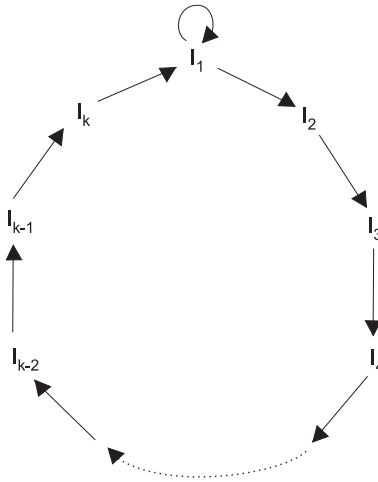
(tj. nejprve jsou všechna lichá čísla různá od 1 v přirozeném pořadí, potom jejich 2násobky, dále jejich  $2^2$ násobky atd. a uspořádání končí mocninami čísla 2 v sestupném pořadí). Potom jestliže  $f$  má cyklus řádu  $m$  a  $m \prec n$ , tak  $f$  má cyklus řádu  $n$ .

K důkazu Šarkovského věty je třeba znát následující lemma, které uvedeme bez důkazu. Důkaz lemmatu lze najít v [2, strana 85].

**Lemma 3.3.** *Nechť  $f$  je spojitá funkce z intervalu  $[a, b]$  a necht'  $I_0, I_1, \dots, I_{k-1}$  jsou uzavřené podintervaly z  $[a, b]$ . Jestliže  $I_{j+1} \subset f(I_j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, k-2$ ,  $I_0 \subset f(I_{k-1})$ , pak rovnice  $f^k(x) = x$  má alespoň jedno řešení  $x_0 \in I_0$  takové, že*

$$f^j(x_0) \in I_j, \quad j = 0, 1, \dots, k-1.$$

*Důkaz Šarkovského věty.* Předpokládejme, že  $x_0$  je periodickým bodem funkce  $f$  se základní lichou periodou  $k$ . Seřadíme body orbity  $x_0$  podle velikosti a označme je jako  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , kde  $x_i < x_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k-1$ . Všimněme si, že  $f(x_k)$  je menší než  $x_k$ . Necht'  $j$  je největší index, pro který platí  $f(x_j) > x_j$ . Necht'  $I_1 = [x_j, x_{j+1}]$ . Protože  $f(x_{j+1}) \leq x_{j+1}$ , potom  $f(x_{j+1}) \leq x_j$ . Proto tedy  $I_1 \subset f(I_1)$  a  $I_1 \rightarrow I_1$ . Protože  $x_0$  negeneruje orbitu periody 2, tak  $f(I_1)$  musí obsahovat alespoň jeden interval různý od  $[x_i, x_{i+1}]$ .



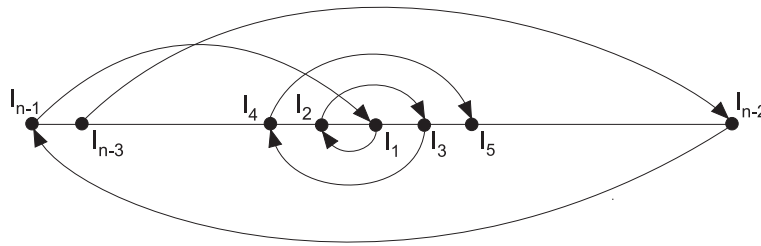
Obrázek 3.6: Řetězec  $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_k \rightarrow I_1$

Nechť  $U_2$  značí sjednocení všech intervalů tvaru  $[x_i, x_{i+1}]$ , které jsou pokryty obrazem intervalu  $I_1$ . Potom  $I_1 \subset U_2$  a  $I_1 \neq U_2$ . Navíc, jestliže  $I_2 = [x_i, x_{i+1}]$  je nějaký interval z  $U_2$ , pak  $I_1 \rightarrow I_2$ .

Nechť  $U_3$  značí sjednocení všech intervalů tvaru  $[x_i, x_{i+1}]$ , které jsou pokryty obrazem nějakého intervalu z  $U_2$ . Opakujeme tento proces, tj.  $U_{r+1}$  značí sjednocení všech intervalů, které jsou pokryty obrazem nějakého intervalu z  $U_r$ . Všimněme si, že jestliže  $I_{r+1}$  je nějaký interval

z  $U_{r+1}$ , pak zde existuje posloupnost intervalů  $I_2, I_3, \dots, I_r$ , kde  $U_i \subset I_i$  tak, že  $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_r \rightarrow I_{r+1}$ .

Protože orbita  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  je konečná, potom existuje index  $s$  tak, že  $U_{s+1} = U_s$ . Pro tento index obsahuje  $U_s$  všechny intervaly tvaru  $[x_i, x_{i+1}]$ , jinak  $x_0$  by byl periodickým bodem s menší periodou než  $k$ . Všimněme si, že existuje nejméně jeden interval  $[x_i, x_{i+1}] \neq I_1$  v  $U_r$ , jehož obraz pokrývá  $I_1$ . To plyne z toho, že  $k$  je liché, a tak na jedné straně od  $I_1$  je více bodů  $x_i$  než na druhé. Z toho důvodu po aplikaci zobrazení  $f$  na  $x_i$  některé body „přeskočí“ na opačnou stranu od intervalu  $I_1$  a některé zůstanou na stejné straně.

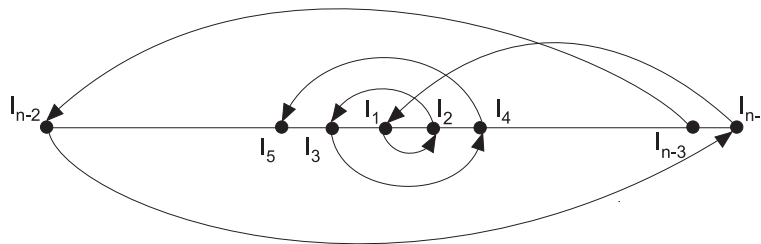


Obrázek 3.7: První z možných uspořádání  $I_j$

Tedy existuje alespoň jeden interval, jehož obraz pokrývá  $I_1$ . Z toho plyne, že existuje řetězec  $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_s \rightarrow I_1$ , jako na obrázku 3.6, kde  $I_i$  je tvaru  $[x_j, x_{j+1}]$  pro nějaké  $j$  a  $I_2 \neq I_1$ . Navíc předpokládejme, že  $s$  je nejmenší přirozené číslo pro které řetězec existuje, tedy řetězec je nejkratší netriviální cesta z  $I_1$  do  $I_1$ .

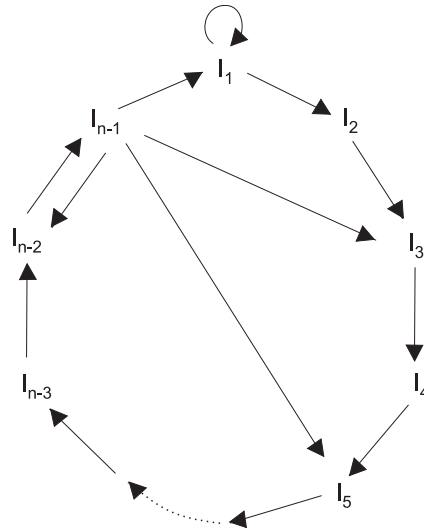
Jestliže  $s < k - 1$ , potom jeden z uzavřených řetězců  $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_s \rightarrow I_1$  nebo  $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_s \rightarrow I_1 \rightarrow I_1$  generuje pevný bod funkce  $f^m$ , kde  $m$  je liché číslo menší než  $s$ . Tento bod musí mít základní periodu menší než  $s$ , neboť  $I_1 \cap I_2$  má pouze jeden bod a perioda tohoto bodu je větší než  $m$ . Proto tedy  $s = n - 1$ .

Vzhledem k tomu, že  $s$  je nejmenší přirozené číslo se kterým pracujeme, nemůže platit  $I_l \rightarrow I_j$  pro nějaké  $j > l + 1$ . Z toho plyne, že orbita  $x_0$  bude mít v  $\mathbb{R}$  uspořádání buď jako na obrázku 3.7 nebo na obrázku 3.8.



Obrázek 3.8: Druhé z možných uspořádání  $I_j$

Můžeme tedy diagram na obrázku 3.6 rozšířit jak ukazuje obrázek 3.9. Dokázali jsme tak Šarkovského větu pro případ, kdy  $k$  je liché. Poznamenejme ještě, že periody větší než  $k$  jsou dány cykly tvaru  $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_{k-1} \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_1$ . Menší sudé periody jsou dány cykly tvaru  $I_{k-1} \rightarrow I_{k-2} \rightarrow I_{k-1}$  nebo  $I_{k-1} \rightarrow I_{k-4} \rightarrow I_{k-3} \rightarrow I_{k-2} \rightarrow I_{k-1}$ .



Obrázek 3.9: Rozšířený řetězec

Nyní předpokládejme, že  $k$  je sudé, potom  $f$  musí mít bod periody 2. To plyne z tvrzení uvedeného výše. Pokud můžeme zaručit, že podobně jako v předchozí části důkazu, po aplikaci zobrazení  $f$  některé body  $x_i$  změní pozici vzhledem k  $I_1$  a některé zůstanou na stejné straně od  $I_1$ . Pokud to neplatí, pak všechny  $x_i$  vymění pozici vzhledem k  $I_1$  a odtud  $[x_{j+1}, x_j] \subset f[x_1, x_j]$  a  $[x_1, x_j] \subset f[x_{j+1}, x_k]$ . Ale pak v  $[x_1, x_j]$  musí být bod periody 2.

Nyní dokažme větu pro  $k = 2^m$ . Nechť  $n = 2^l$  s  $l < m$ . Položme  $g = f^{k/2}$ . Podle předpokladu má  $g$  periodický bod s periodou  $2^{m-l+1}$ . Tedy  $g$  má bod  $z$  periody 2. Což znamená, že  $z$  má vzhledem k  $f$  periodu  $2^l$ .

Nakonec předpokládejme, že  $k = p \cdot 2^m$ , kde  $p$  je liché. Důkaz je obdobný jako v předchozím případě, proto ho neuvádíme.  $\square$

**Věta 3.4.** *Nechť  $f: I \rightarrow I$  je spojitá funkce. Potom posloupnost generovaná libovolným prvkem  $x \in I$  a funkcí  $f$  konverguje k nějakému pevnému bodu právě tehdy, když  $f$  nemá žádný cyklus, kromě cyklů řádu 1.*

*Důkaz.* Pro jeho složitost neuvádíme. Lze ho najít v [8].  $\square$

**Důsledek 3.5.** *Nechť  $f: I \rightarrow I$  je spojitá funkce, která má jen cykly řádu  $1, 2, 2^2, \dots, 2^n$ . Potom každá posloupnost  $\{f^n(x)\}_{n=1}^\infty$ , kde  $x \in I$ , konverguje k některému cyklu nebo pevnému bodu funkce  $f$ ; je tedy asymptoticky periodická.*

*Důkaz.* Uveden v [7].  $\square$

S použitím vět 3.2 a 3.4 lze snadno zdůvodnit proč jsou funkcí  $f(x) = Ax(1-x)$  z příkladu 3 pro  $A \leq 3$  generovány jen konvergentní posloupnosti. Plyne to z toho, že tato funkce nemá žádný 2-cyklus a tedy podle Šarkovského věty nemá žádný cyklus větší jak 1 a stačí aplikovat větu 3.4.

## Kapitola 4

# Stabilita a chaos

Podle důsledku 3.5 z předcházející kapitoly, spojitá funkce, která má pouze cykly řádu 1, 2,  $2^2, \dots, 2^n$ , kde  $n \in \mathbb{N}$ , generuje jen asymptoticky periodické posloupnosti. Co se ale stane, jestliže funkce má i cykly jiných řádů? Tehdy může být chování posloupnosti komplikované. V roce 1975 Li a Yorke [5] dokázali tento výsledek:

**Věta 4.1.** *Nechť  $f: I \rightarrow I$  je spojitá funkce, která má 3-cyklus. Potom existuje nespočetná množina  $B \subset I$  s těmito vlastnostmi:*

*Pro každé  $x, y \in B$ ,  $x \neq y$ , a pro libovolný bod  $p$  který generuje nějaký cyklus*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0, \quad (4.1)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0, \quad (4.2)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - f^n(p)| > 0. \quad (4.3)$$

*Důkaz.* Viz např. [5]. □

Funkci s vlastnostmi uvedenými v této větě nazýváme *chaotickou funkcí* a množinu  $B$  *chaotickou množinou* funkce  $f$ .

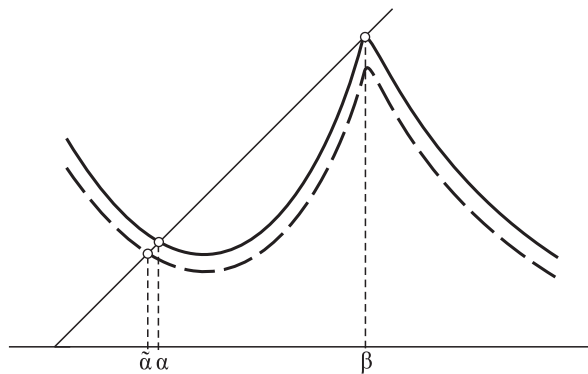
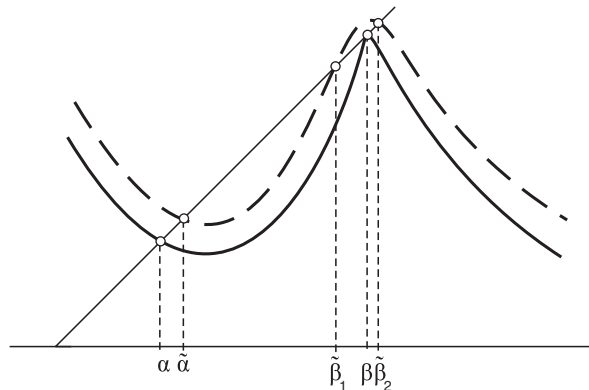
**Věta 4.2.** *Jestliže  $f: I \rightarrow I$  je spojitá funkce s cyklem řádu  $k \neq 2^i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , pak  $f$  i všechny její iterace jsou chaotické.*

*Důkaz.* Nechť  $k = p \cdot m$ , kde  $p$  je prvočíslo větší jak 2 a  $m \in \mathbb{N}$ . Potom funkce  $f^m$  má  $p$ -cyklus. Ze Šarkovského věty plyne, že  $f^m$  má i  $2 \cdot 3$ -cyklus, tedy  $f^{2m}$  má 3-cyklus a podle věty 4.1 je chaotická. Jestliže je iterace dané funkce chaotická, tak i původní funkce musí být chaotická. Zbývající část tvrzení, že všechny iterace funkce  $f$  jsou chaotické, vyplývá opět ze Šarkovského věty a z už dokázané části: Jestliže  $f$  má cyklus řádu  $k \neq 2^i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  a  $m$  je libovolné přirozené číslo, tak  $f$  má i cyklus řádu  $k \cdot m$ , teda  $f^m$  má cyklus řádu  $k$ . □

Z věty 4.2 plyne, že při matematickém modelování velmi záleží na tom, zda použijeme funkci chaotickou nebo nechaotickou, neboť posloupnosti generované takovými funkcemi mají odlišný charakter. Vzniká tak otázka: Jestliže místo původní funkce  $f$  v modelu použijeme funkci  $\tilde{f}$ , která se od  $f$  liší jen málo, může se stát, že posloupnosti generované funkcí  $\tilde{f}$  mají podstatně jiné vlastnosti jako posloupnosti generované původní funkcí  $f$ ? Jestliže se některá vlastnost

podstatně nemění, řekneme, že funkce  $f$  je při malých změnách vzhledem k této vlastnosti *stabilní*, v opačném případě je *nestabilní*. Pro lepší pochopení tohoto problému uveďme následující příklad.

**Příklad 4.** Všimněme si funkce  $f$ , která je na obrázku 4.1 a 4.2 vyznačena plnou čarou. Tato funkce má dva pevné body  $\alpha$  a  $\beta$ . Pozorujme co se stane s těmito body, když funkci  $f$  málo změníme a nahradíme ji funkcí  $\tilde{f}$  vyznačenou přerušovanou čarou. Pevný bod  $\alpha$  se může o trochu posunout vlevo nebo vpravo a dostaneme tak pevný bod  $\tilde{\alpha}$ . Avšak pevný bod  $\beta$  se buď ztratí jako na obrázku 4.1 (stačí, aby se hodnota funkce  $f$  všude v nějakém okolí bodu  $\beta$  zmenšila) nebo místo jednoho pevného bodu vzniknou dva nové pevné body  $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2$  jako na obrázku 4.2 (stačí hodnotu funkce  $f$  všude v nějakém okolí bodu  $\beta$  o něco zvětšit). V tomto případě je  $\alpha$  stabilní pevný bod funkce  $f$  a  $\beta$  je její nestabilní pevný bod. ▲

Obrázek 4.1: Zmenšení funkce  $f$ Obrázek 4.2: Zvětšení funkce  $f$ 

**Příklad 5.** Vraťme se k funkci  $f(x) = Ax(1-x)$  z příkladu 3. Jak jsme viděli, tato funkce má 3-cyklus až pro  $A \geq 1 + \sqrt{8}$ , pro menší hodnoty cyklus řádu 3 neexistuje. Jestliže hodnotu parametru  $A$  libovolně málo zmenšíme, dostaneme novou funkci  $\tilde{f}$  blízkou k  $f$ , ale bez 3-cyklů. To znamená, že funkce  $f(x) = Ax(1-x)$  má pro  $A = 1 + \sqrt{8}$  nestabilní 3-cyklus. ▲

Dostáváme se tak k zajímavé otázce, zda při libovolně malé změně může funkce ztratit všechny cykly. Na otázku odpovídá následující věta:

**Věta 4.3.** *Nechť  $f: I \rightarrow I$  je spojitá funkce z uzavřeného ohraničeného intervalu  $I$ , která má cyklus řádu  $m$ . Potom existuje takové číslo  $\delta > 0$ , že každá spojitá funkce  $g: I \rightarrow I$ , splňující nerovnost  $|f(x) - g(x)| < \delta$  pro všechna  $x \in I$ , má cyklus řádu  $k$ , kde  $k$  je libovolné přirozené číslo ležící v Šarkovského uspořádání napravo od  $m$ .*

*Důkaz.* Důkaz pro jeho složitost neuvádíme. Je proveden v [2]. □

Z věty plyne, že malou změnou chaotické funkce vznikne opět chaotická funkce. Skutečně, jestliže  $f$  má cyklus řádu  $2^s p$ , kde  $p$  je nějaké liché číslo větší jak 1, tak každá funkce  $g$  dost blízká k  $f$  má podle věty 4.3 cykly všech řádů začínající řádem  $2^s(p+2)$  – je podle věty 4.2 chaotická. Tedy chaotické funkce jsou stabilní. Jak je to ale se stabilitou funkcí, které nejsou chaotické?

**Věta 4.4.** *Ke každé spojité funkci  $f: I \rightarrow I$  z uzavřeného ohraničeného intervalu  $I$  a ke každému  $\varepsilon > 0$  existuje chaotická funkce  $g$  taková, že  $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$  pro všechny  $x \in I$ .*

*Důkaz.* Důkaz je uveden v [7]. □

Jinými slovy, libovolně malou změnou lze z každé nechaotické funkce získat chaotickou funkci, ale chaos bude malý. Jestliže původní funkce nemá cykly a množina jejich pevných bodů neobsahuje žádný interval, tak malou změnou můžou vzniknout jen takové funkce, které generují skoro konvergentní posloupnosti.

## Kapitola 5

# Použití iterací

Teorii iterací lze aplikovat v mnoha oborech moderní matematiky. V této části si všimneme především aplikací iterací v biologii, kde si vystačíme se spojitými funkcemi jedné proměnné.

### Diskrétní model populace jednoho biologického druhu

Biologové už mnoho desetiletí studují populace a jejich vývoj v čase. Ukážeme, že kolísání těchto populací má přirozené vysvětlení. Přitom *populace* znamená systém živých organizmů žijících v dané oblasti a časem se rozumí rok, den, hodina, atd.

**Příklad 6.** Nechť v čase  $t_0$  žije v dané oblasti  $x_0$  jedinců jistého druhu. Pro jednoduchost položíme  $t_0 = 0$ . V čase  $t = 1$  se počet jedinců rovná číslu  $x_1$ . Je patrné, že číslo  $x_1$  dostaneme z  $x_0$  tak, že odečteme počet zemřelých jedinců a přičteme počet narozených jedinců v čase od 0 do 1. Číslo  $x_1$  se tedy rovná

$$x_1 = x_0 + \frac{k}{100}x_0 - \frac{s}{100}x_0,$$

kde  $k, s$  jsou kladné konstanty znamenající přírůstek a úbytek jedinců v procentech. Zkráceně lze tuto rovnici zapsat ve tvaru

$$x_1 = x_0q,$$

kde číslo  $q \geq 0$  nazveme *koeficientem přírůstku* (jestliže  $q > 1$ ) nebo *koeficientem úbytku* (jestliže  $q < 1$ ). Jestliže předpokládáme, že číslo  $q$  není závislé na  $x_0$ , dostaneme

$$x_2 = x_1q = x_0q^2$$

a obecně pro libovolné  $n \in \mathbb{N}$  máme

$$x_n = x_{n-1}q = x_0q^n. \tag{5.1}$$

Posloupnost  $\{x_n\}$  je tedy geometrická posloupnost. Jestliže  $q > 1$ , tak počet jedinců v populaci neomezeně roste, v opačném případě, kdy  $q < 1$ , populace vymírá. Jestliže populace vymírá  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ . Druhá možnost může v reálném prostředí pravděpodobně nastat, první však v reálném prostředí nikdy nenastane, protože zdroje růstu jsou pro každou populaci ohraničené. Jestliže chceme modelovat i nevymírající populaci, koeficient přírůstku nesmí být konstantní, ale funkcí stavu populace tedy  $q(x)$ . Předpokládejme, že dané prostředí má



jistou kapacitu  $\bar{x}$ , to znamená, že víc než  $\bar{x}$  jedinců daného druhu delší čas nemůže uživit. Potom koeficient přírůstku nebo úbytku můžeme položit

$$q = q(x) = 1 + A(\bar{x} - x),$$

kde  $A > 0$  je konstanta. Pak  $q$  je přímo úměrné vzdálenosti populace  $x$  od kapacity prostředí  $\bar{x}$ . Podle vztahu (5.1) dostáváme

$$x_{n+1} = x_n(1 + A(\bar{x} - x_n)). \quad (5.2)$$

Položíme-li  $\bar{x} = \frac{A-1}{A}$ , získáme tak nejjednodušší tvar rovnice (5.2). V našem modelu to pro  $A \in (0, 1)$  znamená, že kapacita  $\bar{x} < 0$ . To ale nevádí; model, který takto dostaneme

$$x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n) \quad (5.3)$$

popisuje i pro tyto hodnoty  $A \in (0, 1)$  stav odpovídajícím způsobem. Potom  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  a tedy populace vymírá. Analýzu rovnice (5.3) jsme provedli v kapitole 3 v příkladě 3. Připomeňme, že pro hodnoty  $A \in [0, 3]$  má funkce  $f(x) = Ax(1 - x)$  vždy asymptoticky stabilní pevný bod a to pro  $A \in [0, 1]$  bod  $\alpha = 0$  a pro  $A \in (1, 3]$  bod  $\beta = \frac{A-1}{A}$  ( $= \bar{x}$ ). Přitom pro výše uvedené hodnoty parametru  $A$  nemá funkce  $f(x) = Ax(1 - x)$  cykly vyšších řádů. Takže podle našeho modelu pro  $A \in [0, 3]$  je populace stabilní, tedy počet jedinců se v průběhu času vždy přibližuje k nějakému rovnovážnému stavu tj. k pevnému bodu funkce  $f(x) = Ax(1 - x)$ .

Pro  $A > 3$ , jak už bylo popsáno v příkladě 3, má funkce  $f(x) = Ax(1 - x)$  cykly všech řádů, ale i v tomto případě můžeme popisovat dynamiku populace. Příkladem je populace hraboše polního, která se v našich podmínkách vyvíjí periodicky. Jestliže se populace přemnoží, což nastává vždy jednou za 3–4 roky, vznikají mezi jednotlivými koloniemi hrabošů boje o potravu, úkryt a prostor. Tak jsou zvířata stále ve stresu a vysílené po vzájemném zápění a nedokáží se bránit chorobám. Proto další zimu naráz vyhynou. Zahynutí uniknou jen ti jedinci, kteří se vystěhovali (z hlediska hrabošů) na nepříhodná místa. Tito zachránění jedinci se po populační pohromě vrátí zpět na opuštěná pole a celý cyklus se opakuje.

Ještě poznamenejme, že v průběhu úvah jsme se dostali model, ve kterém stav  $x$  znamená relativní četnost populace, protože  $x$  vždy patří do intervalu  $[0, 1]$ . ▲

## Diskrétní epidemický model

Pro odvození jednoduchého modelu šíření epidemií předpokládejme, že každý jedinec má stejný počet kontaktů s ostatními jedinci v určitém časovém období. Kromě toho předpokládejme, že populace je konstantní, tj. nemění se počet zkoumaných jedinců. Období, ve kterém je nakažený jedinec tak zvaným *zdrojem nákazy*, je též konstantní a je vztaženo na jednotku času (týden, 10 dní a pod.). V případě uzdravení se jedinec stává odolným vůči nemoci natrvalo nebo po určité období. V následujících příkladech se věnujme druhé možnosti.

**Příklad 7.** Celkový počet jedinců populace označme  $X$  a rozdělme na dvě skupiny: Nechť  $N(t)$  značí počet nakažených jedinců v čase  $t$  a  $V(t)$  počet zdravých (vnímavých) jedinců, kteří mohou být infikováni. Dále předpokládejme, že jestliže vybereme z celé populace libovolného

zdravého a libovolného nemocného jedince, tak pravděpodobnost nakažení zdravého jedince od nemocného vztaheno na jednotku času je  $p$  a není závislá na konkrétním výběru jedinců.

Položme  $q = 1 - p = e^{-\alpha}$ . Protože  $0 \leq p \leq 1$ , musí být i  $0 \leq q \leq 1$ , a proto je  $\alpha$  nějaké nezáporné číslo.

Pravděpodobnost  $P$ , že jistý vnímavý jedinec za časovou jednotku, tj. v intervalu  $(t, t + 1)$ , nebude infikován, je závislá na celkovém počtu infikovaných v čase  $t$ . Tedy čím je celkový počet nakažených větší, tím je pravděpodobnost  $P$  menší. Jestliže  $N(t) = 1$ , pak  $P = q$ , pokud  $N(t) = 2$ , potom  $P = q^2$ . Obecně pak  $P = q^{N(t)}$ . Pravděpodobnost nákazy jednoho zdravého jedince za časovou jednotku v čase  $t$  je potom  $1 - P = 1 - q^{N(t)}$  a pravděpodobný počet nově infikovaných bude úměrný celkovému počtu zdravých jedinců, tedy bude to číslo

$$V(t)(1 - q^{N(t)}) = V(t)(1 - e^{-\alpha N(t)}).$$

Vyšetřeme, jak vypadají hodnoty funkcí  $N(t)$  a  $V(t)$  v čase  $t + 1$ . Nejprve

$$N(t + 1) = V(t)(1 - e^{-\alpha N(t)}). \quad (5.4)$$

Předpokládáme totiž, že ti jedinci, kteří byli v čase  $t$  nemocní, budou v čase  $t + 1$  zase zdraví. Dále patrně pro každé  $t$  platí

$$V(t) = X - N(t). \quad (5.5)$$

Nyní pro jednoduchost změňme dosud zavedené veličiny na bezrozměrné hodnoty. Označme

$$x_1(t) = \frac{N(t)}{X}, \quad x_2(t) = \frac{V(t)}{X}, \quad \alpha X = a.$$

Dosazením do (5.4) a (5.5) dostaneme

$$\begin{aligned} x_1(t + 1) &= x_2(t)(1 - e^{-ax_1(t)}), \\ x_2(t) &= 1 - x_1(t). \end{aligned}$$

Po vyloučení  $x_2$  z prvního vztahu dostaneme

$$x_1(t + 1) = (1 - x_1(t))(1 - e^{-ax_1(t)})$$

tj.

$$z_{n+1} = (1 - z_n)(1 - e^{-az_n}), \quad (5.6)$$

kde  $z_n$  značí relativní počet nemocných v čase  $n$ . Rovnice (5.6) je hledaným modelem. ▲

Pokusme se vzniklý model analyzovat, tedy přezkoumat, zda vystihuje skutečnost a má ty vlastnosti, které má mít. Většinou tato analýza bývá těžší, než samotný návrh modelu. O vlastnostech epidemického modelu (5.6) mluví následující věta.

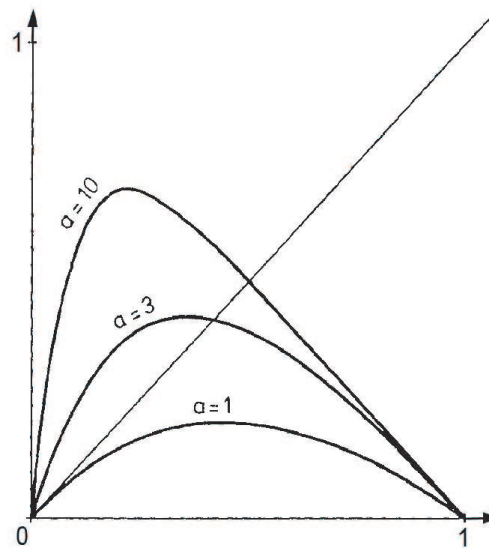
**Věta 5.1.** *Nechť  $f(x) = (1 - x)(1 - e^{-ax})$ . Potom:*

1. *Pro všechny hodnoty parametru  $a \geq 0$  funkce  $f$  zobrazuje interval  $[0, 1]$  do  $[0, 1]$ .*
2. *Jestliže  $0 \leq a \leq 1$ , tak  $f$  má jediný pevný bod  $\alpha = 0$  a každá posloupnost generovaná nějakým prvkem  $x_0 \in [0, 1]$  konverguje k  $\alpha$ .*

3. Jestliže  $a > 1$ , tak  $f$  má dva pevné body, nestabilní bod  $\alpha = 0$  a asymptoticky stabilní bod  $\beta \in (0, \frac{1}{2})$  a každá posloupnost generovaná nějakým  $x_0 \in (0, 1)$  konverguje k  $\beta$ .

*Důkaz.* Je uveden v [7]. □

Pomocí této věty můžeme interpretovat náš model. Jestliže  $a \leq 1$ , tak  $\ln q = -\frac{a}{X} \geq -\frac{1}{X}$ . Tedy pokud bude koeficient  $q$  v modelu (5.6) dost velký (to je když pravděpodobnost nakažení bude dost malá), nemoc po čase v celé populaci vymizí. Ale pokud  $q$  klesne pod jistou hranici, nemoc nevymizí, ale procento infikovaných se po dostatečně dlouhém čase stabilizuje na nenulové hodnotě  $100\beta\%$ . Tato hodnota je stabilní. To znamená, že když se procento infikovaných důsledkem nějakých velmi příznivých nebo nepříznivých okolností změní, po určitém čase se opět vrátí zpět.



Obrázek 5.1: Graf funkce  $f(x) = (1-x)(1-e^{-ax})$  pro některé hodnoty parametru  $a$

## Seznam použité literatury

- [1] DOŠLÁ Z., KUBEN J.: *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*, Brno, Přírodovědecká fakulta MU, 2003
- [2] ELAYDI, SABER N.: *Discrete chaos*, Boca Raton, Chapman & Hall/CRC, 2000
- [3] HOROVÁ I., ZELINKA J.: *Numerické metody*, Brno, Přírodovědecká fakulta MU, 2004
- [4] KŮRKOVÁ V.: *Geometrie živého*, Praha, ZP ČSVTS při FGÚ ČSAV a Nakladatelství Doporučená četba, 1991
- [5] LI T., YORKE J.: *Period three implies chaos*, Amer. Math. Monthly 82, 1975, s. 985–992
- [6] PRÁGEROVÁ, A.: *Diferenční rovnice*, Praha, SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1971
- [7] SMÍTAL, J.: *O funkciach a funkcionálnych rovniciach*, Bratislava, Epsilon, 1984
- [8] ŠARKOVSKIJ, A. N.: O cyklech a struktuře spojitého zobrazení, (v ruštině), Ukrain. Mat. Žurnal, 17 (1965), s. 100–111