Kapitoly z pojistné matematiky

Silvie Zlatošová, Mai Truongová, Martin Kolář

Ústav matematiky a statistiky PřF MU

October 5, 2020

Úvod

Pojistná = aktuárská matematika

Pojistný matematik = aktuár

NYT Best jobs (2015) ... 1. Actuary

Aktuárské organizace: SOA, AAE, ČSpA

ČSpA "uznává" studium na MFF UK, na PřF MU a na VŠE

Aktuárské zkoušky ... Core Syllabus AAE, www.actuary.eu

Historie pojistné matematiky u nás:

1900 Matyáš Lerch (zakladatel ÚMS)

1990 Petr Mandl, obnovení ČSpA

2016 Solvency 2

Životní pojištění ... deterministické metody, Life tables

Neživotní pojištění ... stochastické metody

Teorie rizika, teorie ruinování, teorie kredibility, pricing (GLM, decision trees, neural nets)

Hlavní cíl : předpovídat pomocí pravděpodobnostního modelu budoucí výdaje pojišťovny.

Základní nástroj - teorie pravděpodobnosti

Příklady náhodných veličin v pojistné matematice

– zda nastala pojistná událost z dané smlouvy (0 nebo 1)

– čas kdy nastala pojistná událost

– velikost ztráty z pojistné události

– celkový počet pojistných nároků z jedné smlouvy (portfolia)

– velikost pojistného plnění z jedné smlouvy (portfolia)

Musíme tedy umět:

1. Modelovat celkový počet nároků
2. Modelovat velikost jednotlivých nároků
3. Dát to dohromady – Kolektivní teorie rizika

(+ závislost na čase ... stochastické procesy)

Literatura: Klugman, Panjer, Willmot: Loss models (KPW)
DP Mai Truongové (DMT)

Diskrétní rozdělení

- diskrétní rozdělení hrají v pojistné matematice důležitou roli při modelování počtu pojistných událostí za stanovené časové období
- počet škod v praxi nenabývá záporných hodnot, budeme tedy uvažovat množinu $\mathbb{N}_0$

Definice

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor. Pak zobrazení $N : \Omega \to \{k_1, k_2, \dots\}$, kde $\{k_1, k_2, \dots\}$ je diskrétní podmnožina množiny $\mathbb{R}$, nazýváme *diskrétní náhodnou veličinou.*

V případě počtu škod je diskrétní množina $\mathbb{N}_0$.

Definice

Nechť N je diskrétní náhodná veličina udávající počet škod. Pak funkci $p_N(k) = P(N = k), k \in \mathbb{N}_0$, nazýváme *pravděpodobnostní funkcí* diskrétní náhodné veličiny N.

Generující funkce

Uvažujeme posloupnost reálných čísel

$$a = \{a_n;\ n = 0,\ 1,\ 2,\ ..\}\,.$$

Taková posloupnost obsahuje velké množství informace, kterou můžeme výhodně "zakódovat" do jediného objektu (funkce).

S ním budeme moci lépe pracovat.

Získáme možnost použít operace (např. derivaci), které pro posloupnosti nemají smysl.

Generující funkce posloupnosti a je funkce daná součtem mocninné řady

$$G_a(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$$

pro $s \in \mathbb{R}$, pro která řada konverguje.

Posloupnost a dostaneme z generující funkce G_a zpět vztahem

$$a_n = \frac{G_a^{(n)}(0)}{n!},$$

kde $G_a^{(n)}(0)$ je n-tá derivace G_a v bodě 0.

Příklad: Nechť $a = \{0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, ...\}$. Pak

$$G_a = s - s^3 + s^5 - s^7 + \ ... \ ,$$

což je geometrická řada s prvním členem s a s kvocientem $q = -s^2$. Tedy

$$G_a(s) = \frac{s}{1 + s^2}$$

pro $\mid s \mid < 1$ (obor konvergence).

Dále budeme definovat generující funkci diskrétní náhodné veličiny.

Definice: Nechť N je diskrétní náhodná veličina s hodnotami na množině $\mathbb{N}_0$ a nechť $p_N(k)$ je její pravděpodobnostní funkce. Potom generující funkce náhodné veličiny N je definována vztahem

$$G_N(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_N(k) \cdot s^k = \mathrm{E}(s^N), \quad s \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Základní vlastnosti generujících funkcí:

– Existuje nezáporné číslo R (poloměr konvergence) takové, že $G(s)$ konverguje pro $\mid s \mid < R$ a diverguje pro $\mid s \mid > R$.

– $G(s)$ můžeme derivovat nebo integrovat člen po členu, libovolně mnohokrát, pro $\mid s \mid < R$.

–Jednoznačnost: Je-li $G_a(s) = G_b(s)$ pro $\mid s \mid < R'$, kde $0 < R' \leq R$, pak $a_n = b_n$ pro všechna n.

Příklady generujících funkcí náhodných veličin:

1. Konstantní náhodná veličina. $P(N = k) = 1$, kde $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Máme

$$G_N(s) = 1s^k = s^k.$$

2. Bernoulliho náhodná veličina. $P(N = 1) = p$ a $P(N = 0) = 1 - p$. Tedy

$$G_N(s) = ps^1 + (1 - p)s^0 = 1 - p + ps.$$

3. Geometrické rozdělení. $P(N = k) = p(1-p)^k$ pro $k \in \mathbb{N}_{\nvdash}$.

Počet neúspěchů před prvním úspěchem

Dostaneme

$$G_N(s) = \sum_{i=0}^{\infty} p_N(n) s^n = \sum_{n=0}^{\infty} p(1-p)^n s^n = \sum_{n=0}^{\infty} p \left[(1-p)s\right]^n =$$

$$= \frac{p}{1-(1-p)s} = \frac{p}{1-s+sp}.$$

Charakteristiky náhodných veličin a generující funkce

Základní charakteristiky n.v., $E(X)$ a $Var(X)$, lze snadno spočítat pomocí $G_X(s)$.

Věta: Nechť X je náhodná veličina s generující funkcí $G_X(s)$. Pak platí:

$E(X) = G'_X(1)$.

Obecně,

$$E(X(X-1)...(X-k+1)) = G_X^{(k)}(1)$$

(tzv. k-tý faktoriální moment).

Důkaz: První tvrzení je speciální případ druhého. Máme

$$G_X^{(k)}(s) = \sum_i s^{i-k} i(i-1)...(i-k+1)p_X(i) =$$

$$= E(s^{X-k}X(X-1)...(X-k+1)).$$

Pro $s = 1$ dostaneme

$$G_X^{(k)}(1) = E(X(X-1)...(X-k+1)).$$

Pro rozptyl dostaneme speciálně vztah

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X(X-1) + X) - E(X)^2 =$$

$$= E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = G_X''(1) + G_X'(1) - [G_X'(1)]^2 .$$

Součty náhodných veličin

Věta Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny. Pak

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s).$$

Důkaz:

$$E(s^{X+Y}) = E(s^X s^Y) = E(s^X)E(s^Y)$$

první rovnost plyne z vlastností exponenciály, druhá z nezávislosti X a Y. $\square$

Obecně, pro součet více nezávislých náhodných veličin dostaneme:

Je-li $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$, kde X_i jsou nezávislé, pak z předchozí věty plyne

$$G_S = G_{X_1} G_{X_2} ... G_{X_n}.$$

Definice

Moment generující funkce diskrétní náhodné veličiny N je definována vztahem

$$M_N(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_N(k) \cdot \mathrm{e}^{tk} = \mathsf{E}(\mathrm{e}^{tN}), \quad t \geq 0. \tag{2}$$

Výhoda: lze použít i pro spojité náhodné veličiny

Lemma

Pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí

$$\mathsf{E}(N^m) = M_N^{(m)}(0). \tag{3}$$

Typy diskrétních rozdělení

1. Poissonovo rozdělení

popisuje výskyt řídkých jevů za určitou jednotku času, např. počet pojistných nároků během jednoho pojistného období

Definice

Diskrétní náhodná veličina N má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda > 0$, píšeme $N \sim Po(\lambda)$, jestliže je pravděpodobnostní funkce tvaru

$$p_N(k) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}, & k = 0, 1, 2, \dots, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{4}$$

Generující funkce:

$$G_N(s) = \mathrm{e}^{\lambda\cdot(s-1)} \tag{5}$$

Střední hodnota a **rozptyl**:

$$\mathsf{E}(N) = \lambda \tag{6}$$

$$\mathrm{Var}(N) = \lambda \tag{7}$$

Věta

Nechť $N_1, N_2, \ldots, N_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny z Poissonova rozdělení s parametry $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Pak $N = N_1 + N_2 + \cdots + N_n$ má také Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$.

2. Geometrické rozdělení

Definice

Diskrétní náhodná veličina N se řídí geometrickým rozdělením s parametrem $p \in (0,1)$, zapisujeme $N \sim Ge(p)$, jestliže lze její pravděpodobnostní funkci psát ve tvaru

$$p_N(k) = \begin{cases} p \cdot (1-p)^k, & k = 0, 1, \ldots, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases} \tag{8}$$

resp. ve tvaru

$$p_N(k) = \begin{cases} \frac{\beta^k}{(1+\beta)^{k+1}}, & k = 0, 1, \ldots, \\ 0, & \text{jinak} \end{cases} \tag{9}$$

pro $p = \frac{1}{1+\beta}$, tj. $\beta = \frac{1-p}{p} > 0$.

Generující funkce:

$$G_N(s) = \frac{p}{1 - s \cdot (1-p)} = \frac{1}{1 - \beta \cdot (s-1)} \tag{10}$$

Střední hodnota a **rozptyl**:

$$\mathrm{E}(N) = \frac{1-p}{p} = \beta \tag{11}$$

$$\mathrm{Var}(N) = \frac{1-p}{p^2} = \beta \cdot (1+\beta) \tag{12}$$

3. Negativně binomické rozdělení

– Počet neúspěchů před m-tým úspěchem.

– Zobecnění geometrického rozdělení.

Definice

Diskrétní náhodná veličina N má negativně binomické rozdělení s parametry $m > 0$ a $p \in (0, 1)$, píšeme $N \sim NeBi(m, p)$, je-li pravděpodobnostní funkce tvaru

$$p_N(k) = \begin{cases} \binom{k+m-1}{k} p^m (1-p)^k, & k = 0, 1, \dots, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases} \tag{13}$$

Generující funkce:

$$G_N(s) = \left(\frac{p}{1 - s \cdot (1-p)}\right)^m = \left(\frac{1}{1 - \beta \cdot (s-1)}\right)^m \tag{14}$$

Střední hodnota a **rozptyl**:

$$\mathrm{E}(N) = m \cdot \frac{1-p}{p} = m\beta \tag{15}$$

$$\mathrm{Var}(N) = m \cdot \frac{1-p}{p^2} = m\beta \cdot (1+\beta) \tag{16}$$

$$\tag{17}$$

4. Alternativní a binomické rozdělení

Definice

Diskrétní náhodná veličina N má alternativní rozdělení s parametrem $p \in (0, 1)$, píšeme $N \sim Alt(p)$, je-li její pravděpodobnostní funkce

$$p_N(k) = \begin{cases} p, & k = 1, \\ 1 - p, & k = 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{18}$$

Definice

Diskrétní náhodná veličina N se řídí binomickým rozdělením s parametry $n \in \mathbb{N}$ a $p \in (0,1)$, zapisujeme $N \sim Bi(n,p)$, pokud je pravděpodobnostní funkce tvaru

$$p_N(k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, & k = 0, 1, \ldots, n, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{19}$$

Generující funkce:

$$G_N(s) = \big(1 + p \cdot (s-1)\big)^n \tag{20}$$

Střední hodnota a **rozptyl**:

$$\mathrm{E}(N) = np \tag{21}$$

$$\mathrm{Var}(N) = np \cdot (1-p) \tag{22}$$

Modely počtu pojistných událostí

rozhodujeme-li se při modelování počtu pojistných událostí, jaké pravděpodobnostní rozdělení použít, pak je nám nápomocen vztah mezi číselnými charakteristikami náhodné veličiny N

- Poissonovo rozdělení: $\mathrm{E}(N) = \mathrm{Var}(N)$ … **equidispersion**
- Negativně binomické rozdělení: $\mathrm{E}(N) < \mathrm{Var}(N)$ … **overdispersion**
- Binomické rozdělení: $\mathrm{E}(N) > \mathrm{Var}(N)$ … **underdispersion**

Třída rozdělení $(a, b, 0)$

Definice

Nechť $p_N(k) = P(N = k)$ je pravděpodobnostní funkce diskrétní náhodné veličiny N. Řekneme, že je členem třídy rozdělení $(a, b, 0)$, jestliže existují reálné konstanty a a b takové, že platí

$$\frac{p_N(k)}{p_N(k-1)} = a + \frac{b}{k} \quad \text{pro } k = 1, 2, 3, \dots \tag{23}$$

- pravděpodobnost $p_N(0)$ dopočítáme z $\sum_{k=0}^{\infty} p_N(k) = 1$
- do třídy obecných rozdělení $(a, b, 0)$ patří právě Poissonovo rozdělení, negativně binomické a binomické rozdělení