Nové třídy rozdělení vytvoříme z třídy (a,b,1) pomocí dvou *operací*

– *Skládání*

– *Míšení* (směsi)

Budeme uvažovat pouze diskrétní rozdělení s hodnotami v $\mathbb{N}_0$, t.j.

čítací rozdělení.

Součty náhodných veličin

Nechť X a Y jsou dvě náhodné veličiny na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a $f(x, y)$ je jejich sdružená pravděpodobnostní funkce. Pak pro jejich součet $Z = X + Y$ platí

$$P(X + Y = z) = \sum_x f(x,\, z - x).$$

Důkaz:

Máme

$$\{X + Y = z\} = \bigcup_x (\{X = x \wedge Y = z - x\})$$

tedy

$$P(X + Y = z) = \sum_x P(\{X = x\} \wedge \{Y = z - x\}) = \sum_x f(x, z - x).$$

Pokud X, Y jsou navíc nezávislé, pak

$$f_{X,Y}(x, z-x) = f_X(x) f_Y(z-x),$$

tedy

$$f_{X+Y}(z) = \sum_x f_X(x) f_Y(z-x),$$

což je **konvoluce funkcí** f_X a f_Y. Označuje se $f_X \star f_Y$.

Diskrétní (čítací) složená rozdělení

lze získat procesem skládání dvou libovolných diskrétních rozdělení

Definice: Nechť N je diskrétní náhodná veličina a nechť $M_1, M_2, \ldots$ jsou IID (vzájemně nezávislé, stejně rozdělené) diskrétní náhodné veličiny. Předpokládejme, že M_i pro $i = 1, 2, \ldots$ nezávisejí na N. Potom náhodná veličina

$$S = \sum_{i=1}^{N} M_i$$

má složené rozdělení.

– Máme tedy součet náhodného počtu náhodných veličin

Pojistná praxe

- náhodná veličina N může např. udávat počet různých dopravních nehod
- náhodné proměnné $M_i, i = 1, 2, \ldots, N$ představují počet zraněných z i-té nehody
- náhodný součet S udává celkový počet zraněných

Proč složená?

Označení: N ... primární (vnější) M ... sekundární (vnitřní)

Nechť M má generující funkcí $G_M(s)$. Pak pro generující funkci S platí

$$G_S(s) = G_N\big(G_M(s)\big) \quad \text{pro } s \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

kde $G_N(s)$ představuje generující funkci primárního rozdělení a $G_M(s)$ generující funkci sekundárního rozdělení.

Pravděpodobnostní funkce složeného rozdělení

- pravděpodobnost, že dojde právě ke k pojistným nárokům (= zraněním) lze vyjádřit z věty o celkové pravděpodobnosti

$$
\begin{aligned}
P(S=k) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(S=k|N=n)\cdot P(N=n) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P(M_1+M_2+\cdots+M_N=k|N=n)\cdot P(N=n) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P(M_1+M_2+\cdots+M_n=k)\cdot P(N=n)
\end{aligned} \tag{2}
$$

- Víme, že pst. funkce součtu nezávislých n.v. je konvoluce

- označme jednotlivé pst. funkce

  $g_S(n) = P(S = n)$, $q_M(n) = P(M = n)$, $p_N(n) = P(N = n)$

- potom (2) lze zapsat

$$g_S(k) = \sum_{n=0}^{\infty} q_M^{*n}(k) \cdot p_N(n) \tag{3}$$

Pro praktický výpočet se nehodí, výpočet konvoluce je náročný.

Číselné charakteristiky

Střední hodnota:

- očekávání složené náhodné veličiny S vypočítáme ze znalosti vlastnosti podmíněné střední hodnoty náhodné veličiny S za podmínky $N = n$

- M_i pro $i = 1, 2, \dots$ jsou IID, píšeme $M \sim M_i$ pro libovolné i.

- Tedy podle věty o celkovém očekávání dostaneme

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}[\mathrm{E}(S|N)] &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E}(S|N=n) \cdot P(N=n) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E}(M_1 + M_2 + \cdots + M_N | N=n) \cdot P(N=n) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E}(M_1 + M_2 + \cdots + M_n) \cdot P(N=n) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E}(M) \cdot n \cdot P(N=n) = \mathrm{E}(M) \cdot \mathrm{E}(N)
\end{aligned} \tag{4}
$$

Rozptyl:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(S) &= \mathrm{E}[\mathrm{Var}(S|N)] + \mathrm{Var}[\mathrm{E}(S|N)] = \\
&= \mathrm{E}\big(N \cdot \mathrm{Var}(M)\big) + \mathrm{Var}\big(N \cdot \mathrm{E}(M)\big) = \\
&= \mathrm{E}(N) \cdot \mathrm{Var}(M) + \mathrm{Var}(N) \cdot \big(\mathrm{E}(M)\big)^2
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Moment generující funkce:

$$M_S(t) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{tS}) = \mathrm{E}[\mathrm{E}(\mathrm{e}^{tS}|N)] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E}(\mathrm{e}^{tS}|N=n) \cdot P(N=n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{t(M_1+M_2+\cdots+M_N)}|N=n\right) \cdot P(N=n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{t(M_1+M_2+\cdots+M_n)}\right) \cdot P(N=n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(M_M(t)\right)^n \cdot P(N=n) = \mathrm{E}\left([M_M(t)]^N\right) =$$

$$= \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{N \cdot \ln(M_M(t))}\right) = M_N\left(\ln[M_M(t)]\right), \; t \geq 0 \tag{6}$$

Jak efektivně vypočítat pst. funkci složeného rozdělení?

Věta (Panjerova rekurze)

Je-li primární rozdělení členem třídy $(a, b, 0)$, *pak platí rekurentní vztah*

$$g_S(k) = \frac{1}{1 - a \cdot q_M(0)} \cdot \sum_{j=1}^{k} \left(a + \frac{jb}{k}\right) q_M(j) \cdot g_S(k-j), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Analogie platí i pro třídu $(a, b, 1)$.

Věta

Je-li primární rozdělení členem třídy $(a, b, 1)$, potom

$$g_S(k) = \frac{\left[p_N(1) - (a+b)p_N(0)\right] \cdot q_M(k) + \sum_{j=1}^{k} \left(a + \frac{jb}{k}\right) q_M(j) \cdot g_S(k-j)}{1 - a \cdot q_M(0)}$$

pro $k = 1, 2, \ldots$

$$(8)$$

- výše uvedené rekurentní formule v sobě nezahrnují konvoluci, tím výrazně ulehčují naše výpočty
- k jejich použití musíme znát hodnotu $g_S(0)$

Věta

Pro každé složené rozdělení platí

$$g_S(0) = G_N\big(q_M(0)\big), \tag{9}$$

kde $G_N(s)$ je generující funkce primárního rozdělení a $q_M(0)$ je pravděpodobnost, že náhodná veličina M ze sekundárního rozdělení nabude hodnoty 0, tj. $P(M = 0)$.

1. Diskrétní složené Poissonovo rozdělení

je považováno za nejdůležitější diskrétní složené rozdělení, neboť právě Poissonovo rozdělení bývá nejčastěji využíváno k popisu počtu škod

Definice

Nechť mají IID náhodné veličiny $M_1, M_2, \ldots$ společnou distribuční funkci $F_M(k)$ a nechť jsou nezávislé na N. Pak náhodný součet $S = \sum_{i=1}^{N} M_i$ má složené Poissonovo rozdělení s parametry λ a $F_M(k)$, značíme $S \sim CPo\big(\lambda, F_M(k)\big)$, jestliže se N řídí Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda > 0$.

Tedy

$$P(N = n) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!}, & n = 0, 1, 2, \ldots, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{10}$$

Označení: Poisson - M, např. Poisson - geometrické, pokud M má geometrické rozdělení.

- připomeňme si, že $N \sim Po(\lambda)$ má $G_N(s) = \mathrm{e}^{\lambda \cdot (s-1)}$

  a $\mathrm{E}(N) = \mathrm{Var}(N) = \lambda$

- pravděpodobnost, že nedojde k žádné pojistné události na pojistném kmeni s primárním Poissonovým rozdělením, vyplývá ze vztahu (9)

$$g_S(0) = \mathrm{e}^{\lambda \cdot (q_M(0) - 1)} \tag{11}$$

- pravděpodobnost, že v portfoliu nastane právě k pojistných událostí, vypočítáme dle vztahu (7), kde $a = 0$ a $b = \lambda$

$$g_S(k) = \frac{\lambda}{k} \sum_{j=1}^{k} j \cdot q_M(j) \cdot g_S(k-j), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{12}$$

Generující funkce:

$$G_S(s) = \mathrm{e}^{\lambda\cdot(G_M(s)-1)} \quad \text{pro } s \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

kde $G_M(s)$ je generující funkce sekundárního rozdělení

Moment generující funkce:

$$M_S(t) = \mathrm{e}^{\lambda\cdot(M_M(t)-1)} \quad \text{pro } t \geq 0, \tag{14}$$

kde $M_M(t)$ je moment generující funkce sekundárního rozdělení

Střední hodnota a ***rozptyl***:

$$\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}(M) \cdot \mathrm{E}(N) = \lambda \mathrm{E}(M) \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(S) &= \mathrm{E}(N) \cdot \mathrm{Var}(M) + \mathrm{Var}(N) \cdot \left(\mathrm{E}(M)\right)^2 = \\
&= \lambda \mathrm{Var}(M) + \lambda \left(\mathrm{E}(M)\right)^2 = \lambda \left[\mathrm{Var}(M) + \left(\mathrm{E}(M)\right)^2\right] = \\
&= \lambda \left[\mathrm{E}(M^2) - \left(\mathrm{E}(M)\right)^2 + \left(\mathrm{E}(M)\right)^2\right] = \lambda \mathrm{E}(M^2)
\end{aligned} \tag{16}$$

Věta

Nechť $S_1, S_2, \dots, S_n$ jsou vzájemně nezávislé náhodné veličiny. Dále nechť S_j má složené Poissonovo rozdělení s parametrem λ_j pro primární rozdělení a se sekundárním rozdělením $\{q_j(k) : k \in \mathbb{N}_0\}$ pro $j = 1, 2, \dots, n$. Potom součet $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ má také složené Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$ a sekundárním rozdělením $\{q_S(k) : k \in \mathbb{N}_0\}$, kde

$$q_S(k) = \frac{\lambda_1 q_1(k) + \lambda_2 q_2(k) + \cdots + \lambda_n q_n(k)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{j=1}^{n} \lambda_j q_j(k),$$

$$k = 0, 1, \dots \tag{17}$$

Pojistná praxe

- mějme n různých, vzájemně nezávislých portfolií, kde se celkový počet nároků jednotlivých portfolií řídí složeným Poissonovým rozdělením, potom se celkový počet nároků vzniklý kombinací těchto n portfolií bude také řídit složeným Poissonovým rozdělením
- uvažujeme-li pojistné portfolio na dobu n let a předpokládáme-li, že celkové počty nároků jednotlivých let jsou navzájem nezávislé a mají složené Poissonovo rozdělení, pak celkový počet nároků vzniklý za n let bude mít také složené Poissonovo rozdělení

Příklady diskrétních složených Poissonových rozdělení

a) Negativně binomické rozdělení

- získáme složením primárního Poissonova a sekundárního logaritmického rozdělení
- generující funkce negativně binomického rozdělení je dána ve tvaru

$$G_{N'}(s) = \left(\frac{1}{1-\beta(s-1)}\right)^m, \quad m > 0, \beta > 0, s \in \mathbb{R}$$

- ověříme, že generující funkce složeného rozdělení $G_S(s) = G_N(G_M(s))$, kde $G_N(s)$ představuje generující funkci Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda > 0$ a $G_M(s)$ generující funkci logaritmického rozdělení s parametrem $\beta > 0$, je totožná s generující funkcí negativně binomického rozdělení

$$
\begin{aligned}
G_S(s) &= \exp\left\{\lambda\left(-\frac{\ln\big(1-\beta(s-1)\big)}{\ln(1+\beta)}\right)\right\} = \\
&= \exp\left\{\ln\big(1-\beta(s-1)\big)\cdot\frac{-\lambda}{\ln(1+\beta)}\right\} = \\
&= \left(\exp\left\{\ln\big(1-\beta(s-1)\big)\right\}\right)^{\frac{-\lambda}{\ln(1+\beta)}} = \\
&= \big(1-\beta(s-1)\big)^{\frac{-\lambda}{\ln(1+\beta)}} = \\
&= \left(\frac{1}{1-\beta(s-1)}\right)^{\frac{\lambda}{\ln(1+\beta)}}
\end{aligned}
$$

- vidíme, že pro $m = \frac{\lambda}{\ln(1+\beta)} > 0$ se $G_{N'}(s) = G_S(s)$

- spočítejme si dále $G_M(0)$

$$G_M(0) = 1 - \frac{\ln\big(1 - \beta \cdot (-1)\big)}{\ln(1+\beta)} = 0$$

- nyní jsme schopni odvodit $g_S(0)$
$g_S(0) = G_N\big(G_M(0)\big) = \mathrm{e}^{\lambda \cdot (0-1)} = \mathrm{e}^{-\lambda}$

$$p_{N'}(0) = \underbrace{\binom{0+m-1}{0}}_{=1} \cdot \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^m \cdot \underbrace{\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^0}_{=1} = (1+\beta)^{-m}$$

$$g_S(0) = \mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda \cdot \frac{\ln(1+\beta)}{\ln(1+\beta)}} = \big(\exp\{\ln(1+\beta)\}\big)^{-\frac{\lambda}{\ln(1+\beta)}} =$$
$$= (1+\beta)^{-\frac{\lambda}{\ln(1+\beta)}}$$

b) Další rozdělení

Poisson-binomické rozdělení
Poissonovo rozdělení
binomické rozdělení
$\lambda > 0; p \in (0,1), n \in \mathbb{N}$
$g_S(0) = \mathrm{e}^{\lambda \cdot ((1-p)^n - 1)}$
$g_S(k) = \frac{\lambda}{k} \sum_{j=1}^{k} j \cdot \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \cdot g_S(k-j)$

Neymanovo rozdělení typu A
Poissonovo rozdělení (parametr λ_1)
Poissonovo rozdělení (parametr λ_2)
$\lambda_1 > 0; \lambda_2 > 0$
$g_S(0) = \mathrm{e}^{\lambda_1 \cdot (\mathrm{e}^{-\lambda_2} - 1)}$
$g_S(k) = \frac{\lambda_1 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda_2}}{k} \sum_{j=1}^{k} j \cdot \frac{\lambda_2^j}{j!} \cdot g_S(k-j)$
Poisson-ETNB rozdělení
Poissonovo rozdělení
ETNB rozdělení
$\lambda > 0; p \in (0,1),$ resp. $\beta > 0, m > -1, m \neq 0$
$g_S(0) = \mathrm{e}^{-\lambda}$
$g_S(k) = \frac{\lambda}{k} \sum_{j=1}^{k} j \cdot \frac{\binom{j+m-1}{j} \cdot (1-p)^j}{p^{-m} - 1} \cdot g_S(k-j)$ $g_S(k) = \frac{\lambda}{k} \sum_{j=1}^{k} j \cdot \frac{(j+m-1) \cdot \ldots \cdot (m+1) \cdot m}{j! \cdot ((1+\beta)^m - 1)} \cdot \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^j \cdot g_S(k-j)$

Rozdělení Polya-Aeppli
Poissonovo rozdělení
ETNB rozdělení
$\lambda > 0; p \in (0,1),$ resp. $\beta > 0, m = 1$
$g_S(0) = \mathrm{e}^{-\lambda}$
$g_S(k) = \frac{\lambda \cdot p}{k} \sum_{j=1}^{k} j \cdot (1-p)^{j-1} \cdot g_S(k-j)$ $g_S(k) = \frac{\lambda}{k} \sum_{j=1}^{k} j \cdot \frac{\beta^{j-1}}{(1+\beta)^j} \cdot g_S(k-j)$

Tabulka: Příklady diskrétních složených Poissonových rozdělení

2. Další diskrétní složená rozdělení

Definice

Nechť mají IID náhodné veličiny $M_1, M_2, \ldots$ distribuční funkci $F_M(k)$ a nechť jsou nezávislé na N. Potom řekneme, že náhodná veličina $S = \sum_{i=1}^{N} M_i$ má složené geometrické rozložení s parametry p a $F_M(k)$, píšeme $S \sim CGe\big(p, F_M(k)\big)$, má-li N geometrické rozložení s parametrem $p \in (0,1)$, tj.

$$P(N = n) = \begin{cases} p \cdot (1-p)^n, & n = 0, 1, \ldots, \\ 0, & \text{jinak} \end{cases} = \begin{cases} \frac{\beta^n}{(1+\beta)^{n+1}}, & n = 0, 1, \ldots; \\ & \beta > 0, \\ 0, & \text{jinak}. \end{cases} \tag{18}$$

- analogicky nadefinujeme složené negativně binomické rozdělení a složené binomické rozdělení

Složené geometrické rozdělení
$p \in (0,1),$ resp. $\beta > 0$
$g_S(0) = \frac{p}{1-q_M(0)+p\cdot q_M(0)} = \frac{1}{1+\beta-\beta\cdot q_M(0)}$
$a = 1-p = \frac{\beta}{1+\beta}, b = 0$
$g_S(k) = \frac{1-p}{1-(1-p)\cdot q_M(0)} \sum_{j=1}^{k} q_M(j)\cdot g_S(k-j)$ $g_S(k) = \frac{\beta}{1+\beta-\beta\cdot q_M(0)} \sum_{j=1}^{k} q_M(j)\cdot g_S(k-j)$
$G_S(s) = \frac{p}{1-G_M(s)\cdot(1-p)} = \frac{1}{1-\beta\cdot\left(G_M(s)-1\right)}$
$M_S(t) = \frac{p}{1-M_M(t)\cdot(1-p)} = \frac{1}{1-\beta\cdot\left(M_M(t)-1\right)}$
$\mathrm{E}(S) = \frac{1-p}{p}\cdot\mathrm{E}(M) = \beta\cdot\mathrm{E}(M)$
$\mathrm{Var}(S) = \frac{1-p}{p}\cdot\mathrm{Var}(M) + \frac{1-p}{p^2}\cdot\left(\mathrm{E}(M)\right)^2 =$ $= \beta\cdot\mathrm{Var}(M) + \beta\cdot(1+\beta)\cdot\left(\mathrm{E}(M)\right)^2$

Složené negativně binomické rozdělení
$m > 0, p \in (0,1),\ \text{resp. } \beta > 0$
$g_S(0) = \left(\frac{p}{1-q_M(0)\cdot(1-p)}\right)^m = \left(\frac{1}{1-\beta\cdot(q_M(0)-1)}\right)^m$
$a = 1-p = \frac{\beta}{1+\beta}, b = (m-1)\cdot(1-p) = (m-1)\cdot\frac{\beta}{1+\beta}$
$g_S(k) = \frac{1-p}{1-(1-p)\cdot q_M(0)}\sum_{j=1}^{k}\frac{k+j\cdot(m-1)}{k}\cdot q_M(j)\cdot g_S(k-j)$ $g_S(k) = \frac{\beta}{1+\beta-\beta q_M(0)}\sum_{j=1}^{k}\frac{k+j\cdot(m-1)}{k}\cdot q_M(j)\cdot g_S(k-j)$
$G_S(s) = \left(\frac{p}{1-G_M(s)\cdot(1-p)}\right)^m = \left(\frac{1}{1-\beta\cdot(G_M(s)-1)}\right)^m$
$M_S(t) = \left(\frac{p}{1-M_M(t)\cdot(1-p)}\right)^m = \left(\frac{1}{1-\beta\cdot(M_M(t)-1)}\right)^m$
$\mathrm{E}(S) = m\cdot\frac{1-p}{p}\cdot\mathrm{E}(M) = m\cdot\beta\cdot\mathrm{E}(M)$
$\mathrm{Var}(S) = m\cdot\frac{1-p}{p}\cdot\left[\mathrm{Var}(M)+\frac{1}{p}\cdot\left(\mathrm{E}(M)\right)^2\right] =$ $= m\cdot\beta\cdot\mathrm{E}(M^2)+m\cdot\beta^2\cdot\left(\mathrm{E}(M)\right)^2$

Složené binomické rozdělení
$p \in (0,1), n \in \mathbb{N}$
$g_S(0) = \big(1 - p \cdot (q_M(0) - 1)\big)^n$
$a = -\frac{p}{1-p}, b = (n+1) \cdot \frac{p}{1-p}$
$g_S(k) = \frac{p}{1-p+p \cdot q_M(0)} \sum_{j=1}^{k} \frac{j \cdot (n+1) - k}{k} \cdot q_M(j) \cdot g_S(k-j)$
$G_S(s) = \big(1 + p \cdot (G_M(s) - 1)\big)^n$
$M_S(t) = \big(1 + p \cdot (M_M(t) - 1)\big)^n$
$\mathrm{E}(S) = n \cdot p \cdot \mathrm{E}(M)$
$\mathrm{Var}(S) = n \cdot p \cdot \mathrm{E}(M^2) - n \cdot p^2 \cdot \big(\mathrm{E}(M)\big)^2$

Tabulka: Další složená rozdělení