Diskrétní deterministické modely – cvičné písemky

Písemka obsahuje tři úlohy, dvě na explicitní řešení diferenčních rovnic, jednu na kvalitativní analýzu řešení autonomní rovnice nebo systému.

Explicitní řešení rovnic:

- Lineární rovnice homogenní i nehomogenní.
- Lineární rovnice vyššího řádu s konstantními koeficienty,
  - nehomogenní rovnice se speciální pravou stranou,
  - nehomogenní rovnice řešené užitím variace konstant nebo Duhamelova principu.
- Systémy lineárních rovnic s konstantní maticí homogenní a nehomogenní.
- Rovnice transformovatelné na rovnice lineární:
  - Riccatiho rovnice,
  - rovnice homogenní.

Kvalitativní analýza autonomních rovnic:

- hledání stacionárních řešení skalární rovnice (prvního nebo druhého řádu) nebo dvojrozměrného systému,
- vyšetřování stability stacionárních řešení,
- hledání cyklů skalární rovnice a vyšetřování jejich stability,
- určení typu bifurkace stacionárního bodu autonomní rovnice s parametrem.

1. Najděte obecné řešení rovnice

$$x(t+1) = \frac{2x(t)+4}{x(t)-1}.$$

2. Najděte obecné řešení systému rovnic

$$\begin{aligned} x(t+1) &= -x(t) + y(t) \\ y(t+1) &= \qquad\quad 2y(t) + t. \end{aligned}$$

3. Uvažujte autonomní rovnici druhého řádu

$$x(t+1) = rx(t)\left(1 - \frac{x(t-1)}{K}\right);$$

parametry r a K jsou kladné. Najděte všechny její rovnovážné body a vyšetřete jejich stabilitu.
Uvedenou rovnici interpretujte.

Řešení:

1. Riccatiho rovnice
$x(t) = \dfrac{4(1+x_0)(-3)^t - (4-x_0)2^t}{(1+x_0)(-3)^t + (4-x_0)2^t} = 1 - \dfrac{2(4-x_0)}{4 - x_0 + (1+x_0)\left(-\frac{3}{2}\right)^t} + \dfrac{3(1+x_0)}{1 + x_0 + (4-x_0)\left(-\frac{2}{3}\right)^t}$

2. $x(t) = 2^t A + (-1)^t B - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}$,

   $y(t) = 3 \cdot 2^t A - t - 1$,

   podrobněji:

   $x(t) = \frac{1}{3}\big(3x_0 - y_0 + \frac{1}{2}t_0 - \frac{1}{4}\big)(-1)^{t-t_0} + \frac{1}{3}\big(y_0 + t_0 + 1\big)2^{t-t_0} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}$,

   $y(t) = \big(y_0 + t_0 + 1\big)2^{t-t_0} - t - 1$

3. Rovnovážné body jsou $x_1^* = 0$ a $x_2^* = K\dfrac{r-1}{r}$.

   - $0 < r < 1 \Rightarrow x_1^*$ je stabilní, x_2^* je nestabilní
   - $1 < r < 2 \Rightarrow x_1^*$ je nestabilní, x_2^* je stabilní
   - $2 < r \Rightarrow x_1^*$ oba rovnovážné body jsou nestabilní

   Rovnice může modelovat vývoj velikosti populace, u níž vnitrodruhová konkurence působí se zpožděním jedné generace. Parametr r je vnitřní koeficient růstu (maximální možný přírůstek velikosti populace, růstový koeficient populace bez vnitrodruhové konkurence, biotický potenciál modelované populace), parametr K vyjadřuje kapacitu (úživnost) prostředí; ta závisí na růstovém koeficientu a je $\left(1 - \dfrac{1}{r}\right)$-násobkem parametru K.

1. Najděte řešení počáteční úlohy

$$x(t+1)^2 - (2+t)x(t+1)x(t) + 2tx(t)^2 = 0, \quad x(1) = 1.$$

2. Najděte obecné řešení rovnice

$$x(t+2) - x(t) = 2^t t \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right).$$

3. Uvažujte autonomní systém

$$\begin{aligned} H(t+1) &= rH(t)\exp\big(-aP(t)\big), \\ P(t+1) &= cH(t)\big[1-\exp\big(-aP(t)\big)\big]; \end{aligned}$$

   parametry r, a a c jsou kladné. Najděte rovnovážný bod systému s oběma souřadnicemi kladnými a vyšetřete jeho stabilitu.

Řešení:

1. Homogenní rovnice, dvě řešení: $x_1(t) = 2^{t-1}$, $x_2(t) = (t-1)!$
2. $x(t) = A + (-1)^t B + \frac{1}{25}2^t(8-5t)\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$
3.
   - $r \le 1$ rovnovážný bod uvnitř prvního kvadrantu neexistuje
   - $r > 1$ rovnovážný bod $\left(\frac{1}{ac}\frac{r\ln r}{r-1}, \frac{\ln r}{a}\right)$ je nestabilní

1. Najděte obecné řešení rovnice
$$x(t+1) = \frac{1 - x(t)}{2x(t)\big(1 - x(t)\big) + \big(1 - x(t)\big)^2}\, x(t).$$

2. Najděte řešení počáteční úlohy pro diferenční rovnici druhého řádu
$$\Delta^2 x + 2\Delta x = t, \quad x(0) = 0,\ x(1) = -\tfrac{1}{4}.$$

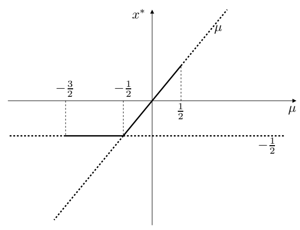
3. Najděte hodnoty parametru μ, při kterých dochází k bifurkaci stacionárních bodů diferenční rovnice
$$x(t+1) = 2x(t)\big(\mu - x(t)\big) + \mu$$
a určete typy bifurkace.

Řešení:

1. Riccatiho rovnice, $x(t) = \dfrac{C}{1 + Ct}$

2. $x(t) = \frac{1}{4}\left(t^2 - 2t\right)$

3. Označení: $f(x,\mu) = 2x(\mu - x) + \mu$.
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\mu) = 2\mu - 4x,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,\mu) = -4,\ \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,\mu) = 0,\ \dfrac{\partial f}{\partial \mu}(x,\mu) = 2x + 1,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial \mu \partial x}(x,\mu) = 2.$
Stacionární body $x_1^* = \mu$, $x_2^* = -\frac{1}{2}$.
Jejich stabilita:



   - $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_1^*,\mu) = -2\mu \in (-1,1)$ pro $\mu \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
   - $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_2^*,\mu) = 2(\mu + 1) \in (-1,1)$ pro $\mu \in (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$

$(x^*,\mu_0) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$**:** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = 1,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = -4 \neq 0,\ \dfrac{\partial f}{\partial \mu}(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = 0,$
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial \mu \partial x}(x,\mu) = 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ transkritická (to je už vidět z obrázku)

$(x^*,\mu_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$**:** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = -1,\ 2\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + 3\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\right)^2 = 48 \neq 0,$
$2\dfrac{\partial^2 f}{\partial \mu \partial x}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\dfrac{\partial f}{\partial \mu}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = -4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ zdvojení periody (flip)

$(x^*,\mu_0) = (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$**:** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}) = -1,\ 2\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}) + 3\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})\right)^2 = 48 \neq 0,$
$2\dfrac{\partial^2 f}{\partial \mu \partial x}(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})\dfrac{\partial f}{\partial \mu}(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}) = 4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ zdvojení periody (flip)