

# Metody řešení diferenčních rovnic

# Obsah

<b>1</b>	<b>Rovnice řešitelné sumací</b>	<b>1</b>
1.1	Posun, diference, antidiference, suma . . . . .	1
1.2	Nejjednodušší diferenční rovnice . . . . .	7
1.3	Cvičení . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Lineární rovnice</b>	<b>11</b>
2.1	Rovnice prvního řádu . . . . .	11
2.2	Rovnice druhého řádu . . . . .	13
2.2.1	Struktura řešení homogenní rovnice . . . . .	14
2.2.2	Řešení nehomogenní rovnice . . . . .	17
2.2.3	Homogenní rovnice s konstantními koeficienty . . . . .	20
2.2.4	Nehomogenní rovnice, jejíž levá strana má konstantní koeficienty . . . . .	23
2.3	Lineární rovnice $k$ -tého řádu . . . . .	26
2.3.1	Fundamentální systém řešení homogenní rovnice . . . . .	27
2.3.2	Nehomogenní rovnice a metoda variace konstant . . . . .	28
2.3.3	Homogenní rovnice s konstantními koeficienty . . . . .	31
2.3.4	Rovnice s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou . . . . .	36
2.3.5	Cauchyho-Eulerova rovnice . . . . .	40
2.4	Cvičení . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Další explicitně řešitelné rovnice</b>	<b>45</b>
3.1	Riccatiho a Bernoulliho rovnice . . . . .	45
3.2	Homogenní rovnice . . . . .	50
3.2.1	Implicitní rovnice $x(t + 1)^2 + a(t)x(t + 1)x(t) + b(t)x(t)^2 = 0$ . . . . .	52
3.3	Logaritmicky lineární rovnice . . . . .	53
3.4	Rovnice řešitelné speciálními substitucemi . . . . .	54
3.4.1	Goniometrické a hyperbolické substituce . . . . .	54
3.4.2	Logistická rovnice . . . . .	60
3.5	Cvičení . . . . .	67



# Kapitola 1

## Rovnice řešitelné sumací

Řešením diferenční rovnice je posloupnost, která tuto rovnici splňuje. Proto se budeme nejdříve zabývat posloupnostmi (definovanými poněkud obecněji než v základním kursu matematické analýzy) a některými operacemi s nimi. Dvě z těchto operací (diference a sumace) jsou analogiemi operací derivace a integrace funkce, další (posun a součin) u funkcí analogie nemají. Dosažené výsledky umožní řešení nejjednodušších diferenčních rovnic, tj. rovnic tvaru  $\Delta x = b$ , kde  $b$  je známá posloupnost a  $x$  je hledaná posloupnost.

### 1.1 Posun, diference, antidiference, suma

Intervalem celých čísel rozumíme libovolnou z množin

$$\{p, p+1, p+2, \dots, q-1, q\},$$

$$\{p, p+1, p+2, \dots\}, \quad \{\dots, q-2, q-1, q\}, \quad \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\},$$

kde  $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $p < q$ . Pro interval  $I$  celých čísel klademe  $I^\kappa = I \setminus \max I$ . To znamená, že

$$\{p, p+1, p+2, \dots, q-1, q\}^\kappa = \{p, p+1, p+2, \dots, q-2, q-1\},$$

$$\{\dots, q-2, q-1, q\}^\kappa = \{\dots, q-3, q-2, q-1\}$$

a v ostatních případech  $I^\kappa = I$ .

Uvažujme posloupnost  $a$ , tj. zobrazení intervalu  $I$  celých čísel do čísel reálných,  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Členy této posloupnosti budeme zapisovat standardním symbolem  $a(t)$  jako hodnotu posloupnosti  $a$  v indexu (nezávisle proměnné)  $t$ . Definiční obor posloupnosti  $a$  označíme  $\text{Dom } a$ .

Pro každou posloupnost  $a$  a index  $t \in (\text{Dom } a)^\kappa$  klademe

$$a^\sigma(t) = a(t+1).$$

Posloupnost  $a^\sigma$  se nazývá *posun* (podrobněji *posun vpřed*, anglicky *shift*) *posloupnosti*  $a$ .

*Diference* posloupnosti  $a$  je posloupnost, označená  $\Delta a$ , definovaná vztahem

$$\Delta a(t) = a(t+1) - a(t).$$

Diference i posun posloupnosti  $a$  jsou definovány na množině  $(\text{Dom } a)^\kappa$ . Vztah posunu a diference posloupnosti je zřejmý,

$$\Delta a = a^\sigma - a.$$

Pro libovolné posloupnosti  $a, b$  se stejným definičním oborem, pro libovolné reálné konstanty  $\alpha, \beta$  a každý index  $t \in (\text{Dom } a)^\kappa$  platí

$$\Delta(\alpha a + \beta b)(t) = \alpha \Delta a(t) + \beta \Delta b(t),$$

tj. diference je lineární operátor na prostoru posloupností. Dále

$$\Delta(ab)(t) = (\Delta a(t))b(t) + a(t+1)(\Delta b(t)) = (\Delta a(t))b(t+1) + a(t)(\Delta b(t)).$$

Pokud navíc  $b(t) \neq 0 \neq b(t+1)$ , pak

$$\Delta \frac{a}{b}(t) = \frac{(\Delta a(t))b(t) - a(t)(\Delta b(t))}{b(t)b(t+1)}.$$

Stručně odvozené rovnice zapíšeme jako

$$\Delta(\alpha a + \beta b) = \alpha \Delta a + \beta \Delta b, \quad \Delta ab = b \Delta a + a^\sigma \Delta b = b^\sigma \Delta a + a \Delta b, \quad \Delta \frac{a}{b} = \frac{b \Delta a - a \Delta b}{b b^\sigma}.$$

*Antidiference* posloupnosti  $a$  je posloupnost  $A$  se stejným definičním oborem  $\text{Dom } a$ , pro kterou platí  $\Delta A = a$ , podrobněji

$$\Delta A(t) = a(t)$$

pro všechna  $t \in (\text{Dom } a)^\kappa$ . Antidiference není určena jednoznačně: Je-li  $\gamma$  libovolná konstanta a  $A$  antidiference posloupnosti  $a$ , pak posloupnost  $\tilde{A} = A + \gamma$  je také antidiferencí posloupnosti  $a$ , neboť

$$\Delta \tilde{A}(t) = \Delta(A + \gamma)(t) = A(t+1) + \gamma - (A(t) + \gamma) = A(t+1) - A(t) = \Delta A(t) = a(t).$$

Naopak, pokud posloupnosti  $A$  a  $\tilde{A}$  jsou antidiference posloupnosti  $a$ , pak

$$a(t) = \Delta A(t) = \Delta \tilde{A}(t),$$

neboli

$$A(t+1) - A(t) = \tilde{A}(t+1) - \tilde{A}(t)$$

pro všechny indexy  $t \in (\text{Dom } a)^\kappa$ . Odtud dostaneme rovnost

$$(A - \tilde{A})(t+1) = A(t+1) - \tilde{A}(t+1) = A(t) - \tilde{A}(t) = (A - \tilde{A})(t),$$

která zase platí pro všechny indexy  $t$ . To znamená, že posloupnost  $A - \tilde{A}$  je konstantní. Dostáváme tak závěr, že dvě posloupnosti  $A$  a  $\tilde{A}$  jsou antidiferencí téže posloupnosti  $a$  právě tehdy, když se liší o aditivní konstantu.

Nechť posloupnost  $A$ , resp.  $B$ , je antidiference posloupnosti  $a$ , resp.  $b$ , a  $\alpha, \beta$  jsou libovolné konstanty. Pak lineární kombinace  $\alpha A + \beta B$  je antidiferencí posloupnosti  $\alpha a + \beta b$ .

Nechť  $a$  je posloupnost. Její (nějakou) antidiferenci také nazýváme *sumace* a označujeme  $\Sigma a$  (význam této terminologie a symboliky se objasní později). Předchozí výsledek lze při tomto označení zapsat ve tvaru

$$\Sigma(\alpha a + \beta b) = \alpha \Sigma a + \beta \Sigma b. \quad (1.1)$$

Z druhé formule pro diferenci součinu posloupností plyne další rovnost

$$\Sigma(a \Delta b) = ab - \Sigma(b^\sigma \Delta a). \quad (1.2)$$

Rovnosti (1.1) a (1.2) chápeme ve smyslu „až na aditivní konstantu“, tj. rozdíl posloupností na levé a pravé straně těchto rovností je konstantní posloupnost.

Diference a antidiference některých posloupností („elementárních posloupností“) jsou shrnuty v tabulce 1.1

posloupnost $a$	diference $\Delta a$	antidiference $\sum a$
1. $a(t) = 1$	0	$t$
2. $a(t) = t$	1	$\frac{1}{2}t(t-1)$
3. $a(t) = t^{(r)} = \prod_{j=t-r+1}^t j, t \geq 0$	$rt^{(r-1)}$	$\frac{t^{(r+1)}}{r+1}, r \neq -1$
4. $a(t) = \alpha^t, \alpha \neq 1$	$(\alpha - 1)\alpha^t$	$\frac{\alpha^t}{\alpha - 1}$
5. $a(t) = \cos(\alpha t + \beta), \alpha \not\equiv 0, \text{ mod } 2\pi$	$-2 \sin \frac{1}{2}\alpha \sin(\alpha t + \beta + \frac{1}{2}\alpha)$	$\frac{\sin(\alpha t + \beta - \frac{1}{2}\alpha)}{2 \sin \frac{1}{2}\alpha}$
6. $a(t) = \sin(\alpha t + \beta), \alpha \not\equiv 0, \text{ mod } 2\pi$	$2 \sin \frac{1}{2}\alpha \cos(\alpha t + \beta + \frac{1}{2}\alpha)$	$-\frac{\cos(\alpha t + \beta - \frac{1}{2}\alpha)}{2 \sin \frac{1}{2}\alpha}$
7. $a(t) = P_n(t)$	$P_{n-1}(t)$	$P_{n+1}(t)$

Tabulka 1.1: Diference a antidiference některých posloupností. Posloupnost na řádce 1. je konstantní, na ř. 2. aritmetická s diferencí 1, posloupnost na řádce 3. se nazývá *faktoriálová*, na řádce 4. je geometrická posloupnost s kvocientem  $\alpha$ , na řádcích 5. a 6. jsou posloupnosti goniometrické. Symbol  $P_\nu(t)$  v 7. řádce zastupuje libovolný polynom stupně  $\nu$  v proměnné  $t$ ; řádky 1. a 2. jsou vlastně zvláštními případy řádku posledního.

### Sumace a součiny.

Nechť  $a$  je posloupnost,  $p, q \in \text{Dom}(a)$  takové, že  $p \leq q$ . Sumu členů posloupnosti  $a$  od  $p$  do  $q$  definujeme obvyklým způsobem jako

$$\sum_{j=p}^q a(j) = a(q) + a(q-1) + \cdots + a(p+1) + a(p)$$

a podobně součin členů posloupnosti  $a$  od  $p$  do  $q$  jako

$$\prod_{j=p}^q a(j) = a(q)a(q-1) \cdots a(p+1)a(p).$$

Dále klademe

$$\sum_{j=p}^{p-1} a(j) = 0, \quad \prod_{j=p}^{p-1} a(j) = 1.$$

Pro  $p, q \in \text{Dom } a$  takové, že  $p > q$  klademe

$$\sum_{j=p}^q a(j) = - \sum_{j=q+1}^{p-1} a(j)$$

a pokud jsou všechny členy  $a(q+1), a(q+2), \dots, a(p-2), a(p-1)$  nenulové, klademe také

$$\prod_{j=p}^q a(j) = \left( \prod_{j=q+1}^{p-1} a(j) \right)^{-1} = \prod_{j=q+1}^{p-1} \frac{1}{a(j)}.$$

Při této konvenci pro libovolné hodnoty  $p, q, r \in \text{Dom } a$  platí

$$\sum_{j=p}^q a(j) + \sum_{j=q+1}^r a(j) = \sum_{j=p}^r a(j), \quad \prod_{j=p}^q a(j) \prod_{j=q+1}^r a(j) = \prod_{j=p}^r a(j).$$

Suma diferencí posloupnosti  $a$  splňuje rovnosti

$$\sum_{j=t_0}^{t-1} \Delta a(j) = \sum_{j=t_0}^{t-1} (a(j+1) - a(j)) = \sum_{j=t_0+1}^t a(j) - \sum_{j=t_0}^{t-1} a(j) = a(t) - a(t_0). \quad (1.3)$$

Odtud vidíme, že pro posloupnost  $a$  a její antidiferenci  $A$  platí

$$\sum_{j=t_0}^{t-1} a(j) = A(t) - A(t_0);$$

zavedeme-li pro libovolnou posloupnost  $x$  označení

$$[x(j)]_{j=t_0}^t = x(t) - x(t_0),$$

můžeme předchozí výsledek přepsat ve tvaru

$$\sum_{j=t_0}^{t-1} a(j) = [A(j)]_{j=t_0}^t. \quad (1.4)$$

Při znalosti antidiference posloupnosti tedy již snadno spočítáme konečný součet členů posloupnosti.

Z rovnosti (1.2) získáme užitečnou formuli

$$\sum_{j=t_0}^{t-1} a(j) \Delta b(j) = [a(j)b(j)]_{j=t_0}^t - \sum_{j=t_0}^{t-1} b(j+1) \Delta a(j); \quad (1.5)$$

nazýváme ji *sumace „per partes“*.

Odvozené výsledky jsou užitečné při sčítání členů posloupností.

### Příklady:

1. Najdeme součet  $s_n$  prvních  $n$  členů aritmetické posloupnosti, tj. posloupnosti s obecným členem  $a_n = a_1 + (n-1)d$ :  
Součet přepíšeme a upravíme,

$$s_n = \sum_{j=1}^n (a_1 + (j-1)d) = a_1 \sum_{j=1}^n 1 + d \sum_{j=1}^n (j-1) = a_1 \sum_{j=1}^n 1 + d \sum_{j=0}^{n-1} j.$$

Z formule (1.4) a prvních dvou řádků tabulky 1.1 nyní dostaneme

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 \left[ j \right]_{j=1}^{n+1} + d \left[ \frac{j(j-1)}{2} \right]_{j=0}^n = a_1(n+1-1) + d \frac{n(n-1)}{2} = \\ &= \frac{1}{2}n(2a_1 + (n-1)d) = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n), \end{aligned}$$

což je vzoreček známý ze střední školy.

2.  $S_{n,2} = 1 + 4 + 9 + \dots + n^2$ :

Součet přepíšeme, využijeme vzorec pro antidiferenci faktoriálové posloupnosti z třetího řádku tabulky 1.1 a pak formuli (1.4):

$$\begin{aligned} 1+4+9+\dots+n^2 &= \sum_{j=1}^n j^2 = \sum_{j=1}^n (j(j-1)+j) = \sum_{j=1}^n j(j-1) + \sum_{j=1}^n j = \sum_{j=1}^n j^{(2)} + \sum_{j=1}^n j^{(1)} = \\ &= \left[ \frac{1}{3}j^{(3)} \right]_{j=1}^{n+1} + \left[ \frac{1}{3}j^{(2)} \right]_{j=1}^{n+1} = \left[ \frac{1}{3}j(j-1)(j-2) \right]_{j=1}^{n+1} + \left[ \frac{1}{3}j(j-1) \right]_{j=1}^{n+1} = \\ &= \frac{1}{3}(n+1)n(n-1) + \frac{1}{2}(n+1)n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1). \end{aligned}$$

Povšimněme si ještě, že výsledek je v souladu se sedmým řádkem tabulky 1.1 (diference a antidiference polynomu).

3.  $s_n = \sum_{j=1}^n (j^2 + 2j - 3)$ :

Jedná se o součet členů posloupnosti, které jsou kvadratickými polynomy v indexu posloupnosti. Antidiference takové posloupnosti je kubický polynom. Součtem tedy musí být výraz

$$s_n = an^3 + bn^2 + cn + d.$$

Dosazením do obou vztahů vyjadřujících  $s_n$  dostaneme pro  $n = 1, 2, 3, 4$  rovnosti

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 + 2 - 3 = 0 = a + b + c + d, \\ s_2 &= s_1 + 4 + 4 - 3 = 5 = 8a + 4b + 2c + d, \\ s_3 &= s_2 + 9 + 6 - 3 = 17 = 27a + 9b + 3c + d, \\ s_4 &= s_3 + 16 + 8 - 3 = 38 = 64a + 16b + 4c + d. \end{aligned}$$

Koeficienty  $a, b, c, d$  jsou tedy řešením soustavy lineárních algebraických rovnic

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 0 \\ 8a + 4b + 2c + d &= 5 \\ 27a + 9b + 3c + d &= 17 \\ 64a + 16b + 4c + d &= 38 \end{aligned}$$

Její řešení dostaneme  $a = \frac{1}{3}$ ,  $b = \frac{3}{2}$ ,  $c = -\frac{11}{6}$ ,  $d = 0$ , takže  $s_n = \frac{1}{6}(2n^3 + 9n^2 - 11n)$ . Stejnou formuli můžeme získat (dokonce rychleji) pomocí výsledků 1. a 2. příkladu.



4.  $S_{n,k} = 1 + 2^k + 3^k + \dots + n^k$ :

Nejprve vypočítáme  $S_{n,0} = 1 + 1^0 + \dots + n^0 = n$ . Dále využijeme sumaci „per partes“, binomickou větu a vlastnosti kombinačních čísel. Dostaneme

$$\begin{aligned}
S_{n,k} &= \sum_{j=1}^n j^k = \sum_{j=1}^n j^k \cdot 1 = \sum_{j=1}^n j^k \Delta j = \left[ j^k j \right]_{j=1}^{n+1} - \sum_{j=1}^n j^k \left( (j+1)^k - j^k \right) (j+1) = \\
&= (n+1)^k - 1 - \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{p=0}^{k-1} j^p \binom{k}{p} \right] (j+1) = (n+1)^k - 1 - \sum_{p=0}^{k-1} \binom{k}{p} \sum_{j=1}^n (j^{p+1} + j^p) = \\
&= (n+1)^k - 1 - \sum_{p=0}^{k-1} \binom{k}{p} \left( \sum_{j=1}^n j^{p+1} + S_{n,p} \right) = \\
&= (n+1)^k - 1 - \sum_{p=1}^k \binom{k}{p-1} \sum_{j=1}^n j^p - \sum_{p=0}^{k-1} \binom{k}{p} S_{n,p} = \\
&= (n+1)^k - 1 - \binom{k}{k-1} S_{n,k} - \sum_{p=1}^k \left[ \binom{k}{p-1} + \binom{k}{p} \right] S_{n,p} - \binom{k}{0} S_{n,0} = \\
&= (n+1)^k - 1 - k S_{n,k} - n - \sum_{p=1}^{k-1} \binom{k+1}{p} S_{n,p}.
\end{aligned}$$

Tento výsledek považujeme za rovnici pro hledaný výraz  $S_{n,k}$ . Z ní vyjádříme  $S_{n,k}$  pomocí rekurentní formule

$$S_{n,k} = \frac{1}{k+1} \left( (n+1)^{k+1} - n - 1 - \sum_{p=1}^{k-1} \binom{k+1}{p} S_{n,p} \right).$$

Konkrétně můžeme počítat:

$$S_{n,1} = \frac{1}{2} \left( (n+1)^2 - n - 1 - 0 \right) = \frac{1}{2} n(n+1),$$

$$S_{n,2} = \frac{1}{3} \left( (n+1)^3 - n - 1 - \binom{3}{1} S_{n,1} \right) = \frac{1}{3} \left( (n+1)^3 - n - 1 - \frac{3}{2} n(n+1) \right) =$$

$$= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1), \quad S_{n,3} = \frac{1}{4} \left( (n+1)^4 - n - 1 - \binom{4}{1} S_{n,1} - \binom{4}{2} S_{n,2} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \left( (n+1)^4 - n - 1 - 2n(n+1) - n(n+1)(2n+1) \right) = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2,$$

atd. Vidíme, že výrazy  $S_{n,1}$  a  $S_{n,2}$  získané tímto postupem jsou stejné, jako ve výsledcích 1. a 2. příkladu. ■

Mezi „elementárními posloupnostmi“ uvedenými v tabulce 1.1 je také posloupnost *faktoriálová*, definovaná pro celé číslo  $r$  a pro  $t \geq 0$  vztahem

$$t^{(r)} = \prod_{j=t-r+1}^t j.$$

Pro  $r = 0$  je tedy podle zavedené konvence  $t^{(0)} = 1$  a pro  $r > 0$  je

$$t^{(r)} = t(t-1)(t-2)\cdots(t-r+1) = \begin{cases} 0, & t < r, \\ \frac{t!}{(t-r)!}, & t \geq r. \end{cases}$$

Pro  $r < 0$  je

$$t^{(r)} = t^{(-|r|)} = \prod_{j=t+|r|+1}^t j = \left( \prod_{j=t+1}^{t+|r|} \right)^{-1} = \frac{1}{(t+1)(t+2)\cdots(t+|r|)} = \frac{t!}{(t-r)!},$$

což je formálně stejný vztah, jako v případě  $r \geq 0$ . Z něho také plyne název této posloupnosti.

Antiderivaci faktoriálové posloupnosti  $t^{(-1)}$  nazýváme *harmonické číslo* a značíme ji  $H(t)$ .  
Součet

$$H(t) = \sum_{j=0}^{t-1} j^{(-1)} = \sum_{j=1}^t \frac{1}{j}$$

nelze vyjádřit v uzavřeném tvaru. Pro velká  $t$  platí přibližný vztah

$$H(t) \approx \gamma + \frac{\ln(t+1) + \ln t}{2} + \frac{1}{6t(t+1)},$$

kde  $\gamma \doteq 0,5772$  je Eulerova konstanta. Chyba této aproximace je řádu  $O(n^{-4})$ .

## 1.2 Nejjednodušší diferenční rovnice

Počáteční úlohu pro diferenční rovnici prvního typu ve tvaru

$$\Delta x = b(t), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1.6}$$

kde  $x$  je hledaná posloupnost a  $b$  je daná posloupnost, můžeme bezprostředně vyřešit sumací obou jejích stran. Podle (1.3) je totiž

$$x(t) - x(t_0) = \sum_{j=t_0}^{t-1} b(j),$$

takže

$$x(t) = x_0 + \sum_{j=t_0}^{t-1} b(j).$$

Pokud známe antidiferenci  $B$  posloupnosti  $b$ , řešení úlohy (1.6) zapíšeme ve tvaru

$$x(t) = x_0 + [B(j)]_{j=t_0}^t.$$

**Příklady:** Najdeme řešení počáteční úlohy:

1.  $\Delta x = t^3$ ,  $x(1) = 1$ .

Posloupnost na pravé straně rozepíšeme pomocí faktoriálních posloupností,

$$t^3 = t(t-1)(t-2) + 3t^2 - 2t = t(t-1)(t-2) + 3t(t-1) + t = t^{(3)} + 3t^{(2)} + t^{(1)}.$$

S využitím třetího a druhého řádku tabulky 1.1 dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{t-1} j^3 &= \sum_{j=1}^{t-1} j^{(3)} + 3 \sum_{j=1}^{t-1} j^{(2)} + \sum_{j=1}^{t-1} j = \left[ \frac{j^{(4)}}{4} \right]_{j=1}^t + 3 \left[ \frac{j^{(3)}}{3} \right]_{j=1}^t + \left[ \frac{j(j-1)}{2} \right]_{j=1}^t = \\ &= \frac{1}{4}t(t-1)(t-2) - 0 + 3 \left( \frac{1}{3}t(t-1)(t-2) - 0 \right) + \frac{1}{2}t(t-1) - 0 = \frac{1}{4}t^2(t-1)^2. \end{aligned}$$

Řešení dané úlohy tedy je posloupnost daná předpisem

$$x(t) = 1 + \frac{t^2(t-1)^2}{4}.$$

Alternativně bychom tuto úlohu mohli řešit pomocí výsledku 4. příkladu v předchozí části. Je totiž

$$x(t) = x(1) + \sum_{j=1}^{t-1} j^3 = 1 + S_{t-1,3} = 1 + \frac{1}{4}(t-1)^2 t^2.$$

2.  $\Delta x(t) = \frac{1}{(t+1)(t+3)}$ ,  $x(1) = 0$ .

Nejprve upravíme pravou stranu rovnice:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(t+1)(t+3)} &= \frac{t+2}{(t+1)(t+2)(t+3)} = \\ &= \frac{1}{(t+1)(t+2)} - \frac{1}{(t+1)(t+2)(t+3)} = t^{(-2)} - t^{(-3)}. \end{aligned}$$

Nyní využijeme 3. řádek tabulky 1.1 a vyjádříme řešení dané úlohy:

$$\begin{aligned} x(t) &= \left[ \frac{j^{(-1)}}{-1} \right]_{j=1}^t - \left[ \frac{j^{(-2)}}{-2} \right]_{j=1}^t = - \left[ \frac{1}{j+1} \right]_{j=1}^t + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(j+1)(j+2)} \right]_{j=1}^t = \\ &= -\frac{1}{t+1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(t+1)(t+2)} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) = \frac{5}{12} - \frac{2t+3}{2(t+1)(t+2)}. \end{aligned}$$

3.  $\Delta x = 2^t t$ ,  $x(0) = 0$ .

Pro nalezení sumy posloupnosti na pravé straně rovnice využijeme sumaci „per partes“ (1.5) (kde  $a(t) = t$ ,  $\Delta b(t) = 2^t$ , tj.  $b(t) = 2^t$ ) a čtvrtý řádek tabulky 1.1:

$$\sum_{j=0}^{t-1} 2^j j = [2^j j]_{j=0}^t - \sum_{j=0}^{t-1} 2^{j+1} = 2^t t - 0 - \left[ \frac{2^{j+1}}{1} \right]_{t=0}^t = 2^t t - 2^{t+1} + 2.$$

Řešení dané rovnice tedy je  $x(t) = 2^t(t - 2) + 2$ .

$$4. \quad x(t+1) = \frac{t}{t+1}x(t) + \frac{(-1)^t}{t+1}, \quad x(1) = \frac{1}{2}.$$

Danou diferenční rovnici druhého typu (rekurentní relaci) převedeme na rovnici prvního typu

$$x(t+1) - x(t) = -\frac{1}{t+1}x(t) + \frac{(-1)^t}{t+1}$$

a dále upravíme na tvar

$$(1+t)x(t+1) - tx(t) = (-1)^t, \quad \text{tj. } \Delta(tx(t)) = \cos t\pi.$$

Nyní zavedeme novou neznámou posloupnost  $y$  substitucí  $y(t) = tx(t)$ . Posloupnost  $y$  vyhovuje diferenční rovnici

$$\Delta y(t) = \cos t\pi$$

s počáteční podmínkou  $y(1) = 1 \cdot x(1) = \frac{1}{2}$ . Pro řešení této úlohy využijeme pátý řádek tabulky 1.1:

$$y(t) = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{t-1} \cos t\pi = \frac{1}{2} + \left[ \frac{\sin(j\pi - \frac{\pi}{2})}{2 \sin \frac{\pi}{2}} \right]_{j=1}^t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\sin(t\pi - \frac{\pi}{2}) - 1) = \frac{1}{2} \sin(2t-1)\frac{\pi}{2}.$$

Zpětnou substitucí dostaneme řešení dané úlohy ve tvaru

$$x(t) = \frac{\sin(2t-1)\frac{\pi}{2}}{2t} = \frac{(-1)^{t-1}}{2t}.$$

■

### 1.3 Cvičení

1. Ověřte platnost vzorců v tabulce 1.1.

2. Vypočítejte součet  $s_n = \sum_{j=1}^n (j^2 + 2j - 3)$  alternativním postupem k postupu uvedenému ve 3. příkladu na str. 5.

V úlohách 3–6 najděte antidiferenci dané posloupnosti.

3.  $a(t) = t(-1)^t$

5.  $a(t) = t^2 q^t$

4.  $a(t) = t \sin \alpha t$

6.  $a(t) = t^{(r)} q^t$

V úlohách 7–10 najděte řešení počáteční úlohy.

7.  $\Delta x(t) = t^2 2^t, \quad x(0) = 6$

9.  $\Delta x(t) = \frac{t}{(t+1)(t+2)(t+3)}, \quad x(1) = 0$

8.  $\Delta x(t) = \frac{1}{t(t+1)}, \quad x(1) = 0$

10.  $\Delta x(t) = (-1)^{\frac{1}{2}t(t-1)}, \quad x(0) = 0$

11. Najděte řešení rovnice  $(t+1)x(t+1) = tx(t)$  a určete interval, na kterém je definováno.

**Výsledky:**

3.  $\frac{1}{4}(t-2)(-1)^{t+1}$

4.  $\frac{\sin \alpha t}{2(1 - \cos \alpha)} - t \frac{\cos(\alpha t - \frac{1}{2}\alpha)}{2 \sin \frac{1}{2}\alpha}$

5.  $\left( \frac{t^2}{q-1} - \frac{2qt}{(q-1)^2} + \frac{q^2+2}{(q-1)^3} \right) q^t$

6.  $-\frac{r!}{(1-q)^{r+1}} \left[ 1 + \sum_{j=1}^r \left( \frac{1-q}{q} \right)^j \frac{t^{(j)}}{j!} \right] q^{t+r}$

7.  $(t^2 - 4t + 6) 2^t$

8.  $\frac{t-1}{t}$

9.  $\frac{1}{4}t^{(2)}t^{(-2)} = \frac{t(t-1)}{4(t+1)(t+2)}$

10.  $2 \left( \sin \frac{1}{4}\pi t \right)^2 = 1 - \frac{1}{2}((-1)^t + 1)(-1)^{\frac{1}{2}t(t-1)}$

11.  $x(t) = \begin{cases} C/t, & t \in (-\infty, -1] \text{ nebo } t \in [1, \infty) \\ 0, & t \in (-\infty, \infty), \end{cases}$   
 $C$  je libovolná konstanta.

## Kapitola 2

# Lineární rovnice

### 2.1 Rovnice prvního řádu

Lineární diferenční rovnice prvního řádu je tvaru

$$\Delta x = a(t)x + b(t), \quad (2.1)$$

kde  $a, b$  jsou nějaké posloupnosti. Pokud je posloupnost  $b$  identicky nulová,  $b \equiv 0$ , nazýváme rovnici (2.1) *homogenní*.

Diferenční rovnici (2.1) můžeme přepsat do tvaru rekurentní formule (diferenční rovnice druhého typu)

$$x(t+1) = (a(t)+1)x(t) + b(t),$$

nebo

$$x(t+1) - q(t)x(t) = b(t), \quad (2.2)$$

při označení  $q(t) = a(t) + 1$ . K rovnici přidáme počáteční podmínku

$$x(t_0) = x_0. \quad (2.3)$$

Z rovností (2.2), (2.3) postupně počítáme:

$$\begin{aligned} x(t_0+1) &= q(t_0)x_0 + b(t_0) = x_0q(t_0) + b(t_0), \\ x(t_0+2) &= q(t_0+1)x(t_0) + b(t_0+1) = q(t_0+1)(x_0q(t_0) + b(t_0)) + b(t_0+1) = \\ &= x_0q(t_0)q(t_0+1) + b(t_0)q(t_0+1) + b(t_0+1), \\ x(t_0+3) &= q(t_0+2)(x_0q(t_0)q(t_0+1) + b(t_0)q(t_0+1) + b(t_0+1)) + b(t_0+2) = \\ &= x_0q(t_0)q(t_0+1)q(t_0+2) + \\ &\quad + b(t_0)q(t_0+1)q(t_0+2) + b(t_0+1)q(t_0+2) + b(t_0+2) = \\ &= x_0 \prod_{i=0}^2 q(t_0+i) + \sum_{i=0}^2 b(t_0+i) \prod_{j=i+1}^2 q(t_0+j), \end{aligned}$$

atd. Obecně

$$x(t_0+l) = x_0 \prod_{i=0}^{l-1} q(t_0+i) + \sum_{i=0}^{l-1} b(t_0+i) \prod_{j=i+1}^{l-1} q(t_0+j) = x_0 \prod_{i=t_0}^{t_0+l-1} q(i) + \sum_{i=t_0}^{t_0+l-1} b(i) \prod_{j=i+1}^{t_0+l-1} q(j).$$

Tento výsledek lze snadno ověřit úplnou indukcí. Dostáváme tak

**Tvrzení 1.** Řešení lineární diferenční rovnice (2.1) s počáteční podmínkou (2.3) je dáno formulí

$$x(t) = x_0 \prod_{i=t_0}^{t-1} (1 + a(i)) + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i) \prod_{j=i+1}^{t-1} (1 + a(j)); \quad (2.4)$$

řešení lineární rekurentní formule prvního řádu (2.2) s počáteční podmínkou (2.3) je dáno formulí

$$x(t) = x_0 \prod_{i=t_0}^{t-1} q(i) + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i) \prod_{j=i+1}^{t-1} q(j). \quad (2.5)$$

Významné speciální případy lineární rovnice prvního řádu jsou ty, ve kterých je některá z posloupností  $a$ ,  $b$  konstantní,  $a \equiv \alpha \neq -1$  nebo  $b \equiv \beta$ .

**Důsledky.**

1. Řešení lineární diferenční rovnice, resp. rekurentní formule, prvního řádu

$$\Delta x = \alpha x + b(t), \quad \text{resp.} \quad x(t+1) = \kappa x(t) + b(t),$$

s počáteční podmínkou (2.3) je dáno formulí

$$x(t) = x_0(1 + \alpha)^{t-t_0} + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i)(1 + \alpha)^{t-1-i},$$

resp.

$$x(t) = x_0 \kappa^{t-t_0} + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i) \kappa^{t-1-i}.$$

2. Řešení lineární diferenční rovnice, resp. rekurentní formule, prvního řádu

$$\Delta x = \alpha x + \beta, \quad \text{resp.} \quad x(t+1) = \kappa x(t) + \beta,$$

s počáteční podmínkou (2.3) je dáno formulí

$$x(t) = x_0(1 + \alpha)^{t-t_0} - \frac{\beta}{\alpha} (1 - (1 + \alpha)^{t-t_0}) = \left( x_0 + \frac{\beta}{\alpha} \right) (1 + \alpha)^{t-t_0} - \frac{\beta}{\alpha},$$

resp.

$$x(t) = \left( x_0 - \frac{\beta}{1 - \kappa} \right) \kappa^{t-t_0} + \frac{\beta}{1 - \kappa}.$$

(Při odvození druhého důsledku byl využit vzorec pro součet konečné geometrické posloupnosti.)

### Metoda sumačního faktoru

Vzorec (2.5) pro řešení počáteční úlohy (2.2), (2.3) jsme „uhodli“ přímo z počáteční podmínky a tvaru rekurentní relace. Ukážeme „solistikovanější“ postup jeho odvození.

Rovnici (2.2) vynásobíme výrazem  $\prod_{j=t+1}^{t_0} q(j)$ . Dostaneme

$$x(t+1) \prod_{j=t+1}^{t_0} q(j) - x(t)q(t) \prod_{j=t+1}^{t_0} q(j) = b(t) \prod_{j=t+1}^{t_0} q(j)$$

a po úpravě

$$x(t+1) \prod_{j=t+1}^{t_0} q(j) - x(t) \prod_{j=t}^{t_0} q(j) = b(t) \prod_{j=t+1}^{t_0} q(j).$$

Výraz na levé straně je diferencí posloupnosti s obecným členem  $x(t) \prod_{j=t}^{t_0} q(j)$ . Rekurentní relace (2.2) se tímto způsobem převádí na diferenční rovnici

$$\Delta \left( x(t) \prod_{j=t}^{t_0} q(j) \right) = b(t) \prod_{j=t+1}^{t_0} q(j),$$

která je řešitelná prostou sumací, viz 1.2. Řešení této rovnice s počáteční podmínkou (2.3) je tedy dáno součtem

$$x(t) \prod_{j=t}^{t_0} q(j) = x(t_0) \prod_{j=t_0}^{t_0} q(j) + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i) \prod_{j=i+1}^{t_0} q(j) = x_0 q(t_0) + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i) \prod_{j=i+1}^{t_0} q(j).$$

Tuto rovnost vydělíme součinem  $\prod_{j=t}^{t_0} q(j)$ , tj. vynásobíme součinem  $\prod_{j=t_0+1}^{t-1} q(j)$ , a upravíme:

$$x(t) = x_0 q(t_0) \prod_{j=t_0+1}^{t-1} q(j) + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i) \prod_{j=i+1}^{t_0} q(j) \prod_{j=t_0+1}^{t-1} q(j) = x_0 \prod_{j=t_0}^{t-1} q(j) + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i) \prod_{j=i+1}^{t-1} q(j).$$

Dostáváme tak opět formuli (2.5).

Posloupnost  $\pi$  definovaná vztahem

$$\pi(t) = \prod_{j=t+1}^{t_0} q(j) = \prod_{j=t_0+1}^t \frac{1}{q(j)}$$

se nazývá *sumační faktor* rovnice (2.2).

## 2.2 Rovnice druhého řádu

*Lineární diferenční rovnice druhého typu (rekurentní formule) druhého řádu* je tvaru

$$x(t+2) + a_1(t)x(t+1) + a_0(t)x(t) = b(t), \quad (2.6)$$

kde  $a_0$  je posloupnost taková, že  $a(t) \neq 0$ . Pokud je posloupnost  $b$  identicky nulová,  $b \equiv 0$ , nazýváme rovnici (2.6) *homogenní*.



K rovnici (2.6) přísluší počáteční podmínka

$$x(t_0) = \xi_0, \quad x(t_0 + 1) = \xi_1. \quad (2.7)$$

Počáteční úloha pro rovnici (2.6) má zřejmě jediné řešení definované na průniku definičních oborů posloupností  $a_0, a_1, b$ . Na této množině totiž můžeme spočítat člen hledané posloupnosti  $x$  ze dvou „předchozích“,

$$x(t + 2) = b(t) - a_0(t)x(t) - a_1(t)x(t + 1),$$

a díky předpokladu  $a_0(t)$  můžeme také spočítat člen posloupnosti ze dvou „následujících“,

$$x(t) = \frac{1}{a_0(t)}(b(t) - a_1(t)x(t + 1) - x(t + 2)).$$

Z počáteční podmínky tedy určíme členy hledané posloupnosti pro všechny přípustné hodnoty indexu  $t$ .

### 2.2.1 Struktura řešení homogenní rovnice

Pro lineární homogenní rovnici druhého řádu

$$x(t + 2) + a_1(t)x(t + 1) + a_0(t)x(t) = 0, \quad (2.8)$$

platí *princip superpozice*:

**Tvrzení 2.** Jsou-li  $x_1$  a  $x_2$  řešení rovnice (2.8) a  $c_1, c_2$  konstanty, pak také lineární kombinace  $y = c_1x_1 + c_2x_2$  je řešením této rovnice.

*Důkaz:*

$$\begin{aligned} y(t + 2) + a_1(t)y(t + 1) + a_0(t)y(t) &= \\ &= c_1x_1(t + 2) + c_2x_2(t + 2) + a_1(t)(c_1x_1(t + 1) + c_2x_2(t + 1)) + a_0(t)(c_1x_1(t) + c_2x_2(t)) = \\ &= c_1(x_1(t + 2) + a_1(t)x_1(t + 1) + a_0(t)x_1(t)) + \\ &\quad + c_2(x_2(t + 2) + a_1(t)x_2(t + 1) + a_0(t)x_2(t)) = 0. \end{aligned}$$

□

Bezprostředním důsledkem tohoto tvrzení je evidentní skutečnost, že nulová posloupnost je také řešením rovnice. Celkem tak dostáváme, že množina řešení lineární homogenní rovnice (2.8) je lineární (vektorový) prostor.

Řešení  $y_1$  rovnice (2.8) s počáteční podmínkou

$$x(t_0) = 1, \quad x(t_0 + 1) = 0$$

a řešení  $y_2$  této rovnice s počáteční podmínkou

$$x(t_0) = 0, \quad x(t_0 + 1) = 1$$

jsou evidentně lineárně nezávislá. To znamená, že prostor řešení lineární homogenní rovnice (2.8) má dimenzi alespoň 2. Naopak, pro jednoznačně určené řešení  $x$  rovnice (2.8) s obecnou počáteční podmínkou (2.7) platí

$$x = \xi_1y_1 + \xi_2y_2;$$

přítom  $y_1, y_2$  splňují uvedené počáteční podmínky. To znamená, že libovolné řešení homogenní rovnice (2.8) lze vyjádřit jako lineární kombinaci dvou posloupností  $y_1$  a  $y_2$ . Prostor řešení má tedy dimenzi nejvýše 2.

Provedené úvahy shrneme: Množina všech řešení lineární homogenní rovnice druhého řádu (2.8) tvoří dvourozměrný lineární prostor. Bázi tohoto prostoru nazveme *fundamentální systémem řešení homogenní rovnice (2.8)*.

Tvoří-li posloupnosti  $y_1$  a  $y_2$  fundamentální systém řešení homogenní rovnice (2.8), pak posloupnost  $c_1y_1 + c_2y_2$  je obecným řešením lineární homogenní rovnice (2.8). Řešení počáteční úlohy (2.8), (2.7) je totiž tohoto tvaru, přičemž konstanty  $c_1, c_2$  jsou řešením soustavy lineárních (algebraických) rovnic

$$\begin{aligned} c_1y_1(t_0) + c_2y_2(t_0) &= \xi_0 \\ c_1y_1(t_0 + 1) + c_2y_2(t_0 + 2) &= \xi_1. \end{aligned}$$

Známe-li tedy fundamentální systém  $y_1, y_2$  řešení lineární homogenní rovnice (2.8), můžeme psát řešení počáteční úlohy (2.8), (2.7) ve tvaru

$$x(t) = \frac{[\xi_0y_2(t_0 + 1) - \xi_1y_2(t_0)]y_1(t) - [\xi_0y_1(t_0 + 1) - \xi_1y_1(t_0)]y_2(t)}{y_1(t_0)y_2(t_0 + 1) - y_1(t_0 + 1)y_2(t_0)}.$$

### Výpočet druhé složky fundamentálního systému

Předpokládejme, že známe řešení  $y_1$  homogenní rovnice (2.8) takové, že  $y_1(t) \neq 0$ .

Rovnice (2.8) je diferenční, proto by se ve vyjádření jejího řešení mohla objevovat sumace. Z tohoto důvodu budeme hledat řešení této rovnice ve tvaru

$$x(t) = y_1(t) \sum_{i=t_0}^{t-1} u(i), \quad (2.9)$$

kde  $u$  je zatím neznámá posloupnost. Pak

$$\begin{aligned} x(t+1) &= y_1(t+1) \sum_{i=t_0}^t u(i) = y_1(t+1) \left( \sum_{i=t_0}^{t-1} u(i) + u(t) \right), \\ x(t+2) &= y_1(t+2) \left( \sum_{i=t_0}^{t-1} u(i) + u(t) + u(t+1) \right). \end{aligned}$$

Toto vyjádření dosadíme do rovnice (2.8),

$$\begin{aligned} (u_1(t+2) + a_1(t)y_1(t+1) + a_0(t)y_1(t)) \sum_{i=t_0}^{t-1} u(i) + (y_1(t+2) + a_1y_1(t+1))u(t) + \\ + y_1(t+2)u(t+1) = 0. \end{aligned}$$

Poněvadž posloupnost  $y_1$  je řešením rovnice (2.8), je výraz v první závorce roven nule a výraz ve druhé závorce je roven  $-a_0(t)y_1(t)$ . Podle předpokladu je  $y_1(t+2) \neq 0$ , proto můžeme tímto členem předchozí rovnost vydělit. Dostaneme

$$u(t+1) = a_0(t) \frac{y_1(t)}{y_1(t+2)} u(t).$$

To je lineární homogenní rovnice prvního řádu pro neznámou posloupnost  $u$ , jejíž řešení je podle Tvzení 1 dáno součinem

$$u(t) = c \prod_{j=t_0}^{t-1} a_0(j) \frac{y_1(j)}{y_1(j+1)},$$

kde  $c = u(t_0)$  je nějaká konstanta. Toto vyjádření dosadíme do rovnosti (2.9) a dostaneme řešení rovnice (2.8) ve tvaru

$$x(t) = cy_1(t) \sum_{i=t_0}^{t-1} \prod_{j=t_0}^{i-1} a_0(j) \frac{y_1(j)}{y_1(j+2)}. \quad (2.10)$$

Ověříme, že posloupnost daná výrazem (2.10) je pro  $c \neq 0$  lineárně nezávislá na posloupnosti  $y_1$ . Casoratián posloupností  $y_1$  a  $x$  je

$$\begin{aligned} C(t; y_1, x) &= \begin{vmatrix} y_1(t) & cy_1(t) \sum_{i=t_0}^{t-1} \prod_{j=t_0}^{i-1} a_0(j) \frac{y_1(j)}{y_1(j+1)} \\ y_1(t+1) & cy_1(t+1) \left( \sum_{i=t_0}^{t-1} \prod_{j=t_0}^{i-1} a_0(j) \frac{y_1(j)}{y_1(j+1)} + \prod_{j=t_0}^{t-1} a_0(j) \frac{y_1(j)}{y_1(j+1)} \right) \end{vmatrix} = \\ &= cy_1(t)y_1(t+1) \prod_{j=t_0}^{t-1} a_0(j) \frac{y_1(j)}{y_1(j+1)} \neq 0; \end{aligned}$$

nebot podle předpokladů  $a_0(t) \neq 0$ ,  $y_1(t) \neq 0$ . Dostali jsme tedy výsledek:

**Tvrzení 3.** Nechť posloupnost  $y_1$  je první složkou fundamentálního systému řešení rovnice (2.8) taková, že  $y_1(t) \neq 0$ . Pak druhá složka fundamentálního systému řešení je dána výrazem

$$y_2(t) = y_1(t) \sum_{i=t_0}^{t-1} \prod_{j=t_0}^{i-1} a_0(j) \frac{y_1(j)}{y_1(j+2)}.$$

**Příklad:**

$$x(t+2) - (t+2)x(t+1) + (t+2)x(t) = 0, \quad t > 0$$

V tomto případě je  $t_0 = 1$ ,  $a_0(t) = t+2$  a posloupnost  $y_1$  daná předpisem  $y_1(t) = t$  je řešením dané rovnice, neboť

$$t+2 - (t+2)(t+1) + (t+2)t = (t+2)(1-t-1+t) = 0.$$

Druhá složka fundamentálního systému řešení tedy je

$$y_2(t) = t \sum_{i=1}^{t-1} \prod_{j=1}^{i-1} (j+2) \frac{j}{j+2} = t \sum_{i=1}^{t-1} (i-1)!.$$

■

### 2.2.2 Řešení nehomogenní rovnice

Pokud jsou „koeficienty“  $a_1, a_2$  v rovnicích (2.6) a (2.8) stejné, řekneme, že rovnice (2.8) je přidružená homogenní rovnice k lineární rovnici (2.6).

Předpokládejme, že známe fundamentální systém řešení  $y_1, y_2$  homogenní rovnice (2.8) a nějaké řešení  $x_N$  nehomogenní rovnice. Pak posloupnost  $x$ , definovaná jako součet obecného řešení homogenní rovnice (2.8) a posloupnosti  $x_N$ , tj.  $x = c_1 y_1 + c_2 y_2 + x_N$ , kde  $c_1, c_2$  jsou nějaké konstanty, je řešením nehomogenní rovnice (2.6). Vskutku

$$\begin{aligned} x(t+2) + a_1(t)x(t+1) + a_0(t)x(t) &= \\ &= c_1 y_1(t+2) + c_2 y_2(t+2) + x_N(t+2) + \\ &\quad + a_1(t)(c_1 y_1(t+1) + c_2 y_2(t+1) + x_N(t+1)) + a_0(t)(c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + x_N(t)) = \\ &= c_1(y_1(t+2) + a_1(t)y_1(t+1) + a_0(t)y_1(t)) + \\ &\quad + c_2(y_2(t+2) + a_1(t)y_2(t+1) + a_0(t)y_2(t)) + \\ &\quad + x_N(t+2) + a_1(t)x_N(t+1) + a_0(t)x_N(t) = 0 + 0 + b(t) = b(t). \end{aligned}$$

Pokud konstanty  $c_1$  a  $c_2$  zvolíme tak, aby byla splněna počáteční podmínka (2.7), tj. aby splňovaly soustavu lineárních algebraických rovnic

$$\begin{aligned} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) + x_N(t_0) &= \xi_0, \\ c_1 y_1(t_0 + 1) + c_2 y_2(t_0 + 1) + x_N(t_0 + 1) &= \xi_1, \end{aligned}$$

neboli

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{(\xi_0 - x_N(t_0))y_2(t_0 + 1) - (\xi_1 - x_N(t_0 + 1))y_2(t_0)}{y_1(t_0)y_2(t_0 + 1) - y_2(t_0)y_1(t_0 + 1)}, \\ c_2 &= \frac{y_1(t_0)(\xi_1 - x_N(t_0 + 1)) - y_1(t_0 + 1)(\xi_0 - x_N(t_0))}{y_1(t_0)y_2(t_0 + 1) - y_2(t_0)y_1(t_0 + 1)}, \end{aligned}$$

pak posloupnost  $x = c_1 y_1 + c_2 y_2 + x_N$  je řešením počáteční úlohy (2.6), (2.7). Touto úvahou dostáváme

**Tvrzení 4.** Obecné řešení lineární rovnice (2.6) je součtem obecného řešení přidružené homogenní rovnice a nějakého řešení nehomogenní rovnice.

Ještě poznamenejme, že výpočet konstant  $c_1, c_2$  pro konkrétní počáteční úlohu je nejjednodušší, pokud partikulární řešení  $x_N$  nehomogenní rovnice volíme tak, aby  $x_N(t_0) = 0$  a  $x_N(t_0 + 1) = 0$ .

#### Nalezení partikulárního řešení nehomogenní rovnice

Budeme hledat řešení rovnice (2.6) s nulovou počáteční podmínkou

$$x(t_0) = 0, \quad x(t_0 + 1) = 0. \quad (2.11)$$

Budeme přitom předpokládat, že známe fundamentální systém řešení  $y_1, y_2$  přidružené homogenní rovnice.

Počáteční úlohu (2.6), (2.11) lze interpretovat: Proces, který je popsán nehomogenní rovnicí (2.6), začíná s nulovými hodnotami a v průběhu času na něho působí nějaké vlivy. Stav procesu v čase  $t$  tedy můžeme popsat jako součet těchto vlivů od počátečního okamžiku  $t_0$

do okamžiku  $t - 1$  bezprostředně předcházejícímu času  $t$ . Přesněji vyjádřeno, řešení počáteční úlohy (2.6), (2.11) budeme hledat ve tvaru

$$x(t) = \sum_{i=t_0}^{t-1} w(i, t), \quad (2.12)$$

kde  $w$  je nějaká, zatím neurčená, funkce dvou celočíselných proměnných. Myšlenka hledat řešení nehomogenní rovnice s nulovými počátečními podmínkami ve tvaru součtu (nebo integrálu) se nazývá *Duhamelův princip*.

Posloupnost daná rovností (2.12) splňuje první z počátečních podmínek (2.11). Ta druhá z nich nabývá tvar

$$0 = x(t_0 + 1) = w(t_0, t_0 + 1).$$

Tato podmínka bude splněna zejména tehdy, když po funkci  $w$  budeme požadovat, aby měla vlastnost

$$w(i, i + 1) = 0 \quad (2.13)$$

pro všechny přípustné hodnoty  $i$ .

Z rovnosti (2.12) dále s využitím podmínky (2.13) dostaneme

$$x(t + 1) = \sum_{i=t_0}^t w(i, t + 1) = \sum_{i=t_0}^{t-1} w(i, t + 1) + w(t, t + 1) = \sum_{i=t_0}^{t-1} w(i, t + 1),$$

$$x(t + 2) = \sum_{i=t_0}^t w(i, t + 2) = \sum_{i=t_0}^{t-1} w(i, t + 2) + w(t, t + 2).$$

Toto vyjádření dosadíme do dané rovnice (2.6). Dostaneme

$$\sum_{i=t_0}^{t-1} [w(i, t + 2) + a_1(t)w(i, t + 1) + a_0(t)w(i, t)] + w(t, t + 2) = b(t).$$

Tato rovnost bude splněna zejména tehdy, pokud funkce  $w$  bude mít vlastnosti

$$w(i, i + 2) = b(i), \quad \text{pro všechna } i, \quad (2.14)$$

$$w(i, t + 2) + a_1(t)w(i, t + 1) + a_0(t)w(i, t) = 0, \quad \text{pro všechna } i, t. \quad (2.15)$$

Nyní budeme proměnnou  $i$  považovat za parametr. Získané rovnosti budeme chápat jako úlohu pro lineární homogenní rovnici druhého řádu (2.15) s počátečními podmínkami (2.13) a (2.14); hledaná posloupnost je  $w(i, \cdot)$ . Rovnice (2.15) je přidruženou homogenní rovnicí k dané rovnici (2.6). Podle předpokladu tedy známe její fundamentální systém řešení, její obecné řešení je lineární kombinací bázevých posloupností  $y_1, y_2$ . Příslušné koeficienty ovšem závisí na parametru  $i$ , tedy

$$w(i, t) = c_1(i)y_1(t) + c_2(i)y_2(t). \quad (2.16)$$

Konkrétní vyjádření koeficientů (posloupností)  $c_1, c_2$  získáme z počátečních podmínek (2.13) a (2.14):

$$\begin{aligned} c_1(i)y_1(i + 1) + c_2(i)y_2(i + 1) &= 0, \\ c_1(i)y_1(i + 2) + c_2(i)y_2(i + 2) &= b(i), \end{aligned}$$

tj.

$$c_1(i) = \frac{-b(i)y_2(i+1)}{y_1(i+1)y_2(i+2) - y_1(i+2)y_2(i+1)},$$

$$c_2(i) = \frac{b(i)y_1(i+1)}{y_1(i+1)y_2(i+2) - y_1(i+2)y_2(i+1)}.$$

Dosazením těchto výrazů do rovnosti (2.16) a pak do (2.12) dostaneme řešení počáteční úlohy (2.6), (2.11) ve tvaru

$$x(t) = \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i) \frac{y_2(i+1)y_1(t) - y_1(i+1)y_2(t)}{y_1(i+2)y_2(i+1) - y_1(i+1)y_2(i+2)}. \quad (2.17)$$

Při označení  $C_j(t) = \sum_{i=t_0}^{t-1} c_j(i)$ ,  $j = 1, 2$  můžeme předchozí formuli pro řešení nehomogenní lineární rovnice druhého řádu přepsat ve tvaru

$$x(t) = C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t),$$

tedy jako lineární kombinaci bázových posloupností  $y_1, y_2$ ; přitom koeficienty nejsou konstantní ale variabilní, závisí na čase  $t$ . Proto se rovnost (2.17) nazývá *formule variace konstant*.

**Příklad:** Najdeme řešení počáteční úlohy

$$x(t+2) + \frac{1}{t}x(t+1) - \left(1 + \frac{1}{t}\right)x(t) = 4(t+1), \quad x(1) = 1, \quad x(2) = -1.$$

Prvním problémem je najít fundamentální systém řešení přidružené homogenní rovnice

$$x(t+2) + \frac{1}{t}x(t+1) - \left(1 + \frac{1}{t}\right)x(t) = 0.$$

Tato rovnice má evidentně konstantní řešení  $y_1 \equiv 1$ . Druhou složku fundamentálního systému řešení vypočítáme podle Tvrzení 3:

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \sum_{i=1}^{t-1} \prod_{j=1}^{i-1} \left(-1 - \frac{1}{j}\right) = \sum_{i=1}^{t-1} (-1)^{i-1} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{j+1}{j} = \sum_{i=1}^{t-1} (-1)^{i-1} \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{i-1}{i-2} \cdot \frac{i}{i-1}\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{t-1} (-1)^{i-1} i = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-1)^{t-3}(t-2) + (-1)^{t-2}(t-1) = \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{2}(t-2) + t - 1, & t \text{ sudé} \\ -\frac{1}{2}(t-1), & t \text{ liché} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}t, & t \text{ sudé} \\ \frac{1}{2}(1-t), & t \text{ liché} \end{cases} = \frac{1}{4}(1 + (-1)^t(2t-1)). \end{aligned}$$

Dostáváme tak obecné řešení  $x_H$  přidružené homogenní rovnice ve tvaru

$$x_H(t) = A + \frac{1}{4}B(1 + (-1)^t(2t-1)).$$

Počáteční hodnoty jsou

$$1 = x_H(1) = A, \quad -1 = x_H(2) = A + B.$$

Z těchto rovnic snadno vypočítáme  $A = 1$ ,  $B = -2$ . Řešení přidružené homogenní rovnice které splňuje počáteční podmínky je tedy dáno rovností

$$x_H(t) = 1 - \frac{1}{2} (1 + (-1)^t(2t - 1)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^t(2t - 1).$$

Řešení nehomogenní rovnice, které splňuje nulové počáteční podmínky  $x_N(1) = x_N(2) = 0$  dostaneme dosazením do vzorce (2.17).

$$\begin{aligned} x_N(t) &= \sum_{i=1}^{t-1} 4(i+1) \frac{\frac{1}{4}(1 - (-1)^i(2i+1)) - \frac{1}{4}(1 + (-1)^t(2t-1))}{\frac{1}{4}(1 - (-1)^i(2i+1)) - \frac{1}{4}(1 + (-1)^i(2i+3))} = \\ &= \sum_{i=1}^{t-1} [2i+1 + (-1)^{t+i}(2t-1)] = \sum_{i=1}^{t-1} (2i+1) + (-1)^t(2t-1) \sum_{i=1}^{t-1} (-1)^i = \\ &= \frac{1}{2}(t-1)(2t+2) - (-1)^t(2t-1)\frac{1}{2}((-1)^t+1) = t(t-1) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^t(2t-1). \end{aligned}$$

Řešení dané rovnice je součet posloupností  $x_H$  a  $x_N$ , tedy

$$x(t) = t(t-1) - (-1)^t(2t-1).$$

■

### 2.2.3 Homogenní rovnice s konstantními koeficienty

Lineární homogenní rovnice prvního řádu

$$x(t+1) = \kappa x(t)$$

má podle důsledku Tvzení 1 řešení  $x(t) = \kappa^t$ , tj. geometrickou posloupnost. Toto pozorování vede k myšlence hledat řešení lineární homogenní rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty

$$x(t+2) + \alpha_1 x(t) + \alpha_0 x(t) = 0 \quad (2.18)$$

také ve tvaru geometrické posloupnosti

$$x(t) = \lambda^t, \quad (2.19)$$

kde  $\lambda$  je nějaká nenulová konstanta.

Po dosazení výrazu (2.19) do dané rovnice (2.18) dostaneme

$$\lambda^{t+2} + \alpha_1 \lambda^{t+1} + \alpha_0 \lambda^t = 0 \quad \text{tj.} \quad \lambda^t (\lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0) = 0.$$

Podle předpokladu  $\lambda \neq 0$  je tato rovnost ekvivalentní s rovnicí

$$\lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0. \quad (2.20)$$

To je kvadratická rovnice, která má kořeny

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( -\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0} \right).$$

Z obecného předpokladu kladeného na lineární rovnice druhého řádu plyne  $\alpha_0 \neq 0$ , takže oba kořeny jsou nenulové. Dostáváme tak dvě, ne nutně různá, řešení dané diferenční rovnice ve tvaru  $x_1(t) = \lambda_1^t$ ,  $x_2(t) = \lambda_2^t$ . Casoratián posloupností  $x_1, x_2$  je

$$C(t; x_1, x_2) = \begin{vmatrix} \lambda_1^t & \lambda_2^t \\ \lambda_1^{t+1} & \lambda_2^{t+1} \end{vmatrix} = (\lambda_1 \lambda_2)^t (\lambda_2 - \lambda_1).$$

Pro  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  je  $C(t; x_1, x_2) \neq 0$ , takže posloupnosti  $x_1, x_2$  jsou v takovém případě nezávislé.

(Algebraická) rovnice (2.20) se nazývá *charakteristická rovnice*, její řešení se nazývají *charakteristické kořeny*. Rozlišíme tři standardní případy:

### Dva reálné různé charakteristické kořeny

Tento případ nastává, pokud  $\alpha_1^2 > 4\alpha_0$ . Bezprostředně můžeme napsat fundamentální systém řešení rovnice (2.18),

$$y_1(t) = \lambda_1^t = \left[ \frac{1}{2} \left( \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0} - \alpha_1 \right) \right]^t, \quad y_2(t) = \lambda_2^t = \left[ -\frac{1}{2} \left( \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0} + \alpha_1 \right) \right]^t$$

a její obecné řešení ve tvaru

$$x(t) = A\lambda_1^t + B\lambda_2^t.$$

**Příklad:** Najdeme obecné řešení rovnice

$$x(t+2) - 4x(t+1) + 3x(t) = 0.$$

Charakteristická rovnice

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

má kořeny  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 1$ , takže obecné řešení dané rovnice je

$$x(t) = 3^t A + B.$$

■

### Komplexně sdružené charakteristické kořeny

Tento případ nastává, pokud  $\alpha_1^2 < 4\alpha_0$ . Charakteristické kořeny jsou

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( -\alpha_1 \pm i\sqrt{4\alpha_0 - \alpha_1^2} \right),$$

v goniometrickém tvaru

$$\lambda_{1,2} = r e^{\pm i\omega} = r (\cos \omega \pm i \sin \omega),$$

kde

$$r = \sqrt{\alpha_0}, \quad \omega = \arccos \left( -\frac{\alpha_1}{2\sqrt{\alpha_0}} \right), \quad \omega \in (0, \pi). \quad (2.21)$$

Dostáváme tak dvě řešení rovnice (2.18) ve tvaru

$$x_1(t) = r^t e^{i\omega t} = r^t (\cos \omega t + i \sin \omega t), \quad x_2(t) = r^t e^{-i\omega t} = r^t (\cos \omega t - i \sin \omega t).$$



Lineární kombinace těchto posloupností jsou podle principu superpozice také řešením rovnice (2.18), zejména tedy posloupnosti

$$y_1(t) = \frac{1}{2}x_1(t) + \frac{1}{2}x_2(t) = r^t \cos \omega t, \quad y_2(t) = \frac{1}{2i}x_1(t) - \frac{1}{2i}x_2(t) = r^t \sin \omega t$$

jsou řešením. Jejich Casoratián

$$\begin{aligned} C(t; y_1, y_2) &= \begin{vmatrix} r^t \cos \omega t & r^t \sin \omega t \\ r^{t+1} \cos \omega(t+1) & r^{t+1} \sin \omega(t+1) \end{vmatrix} = \\ &= r^{t+2} (\cos \omega t \sin \omega(t+1) - \sin \omega t \cos \omega(t+1)) = \\ &= r^{t+2} (\cos \omega t (\sin \omega t \cos \omega + \sin \omega \cos \omega t) - \sin \omega t (\cos \omega t \cos \omega - \sin \omega \sin \omega t)) = \\ &= r^{t+2} ((\cos \omega t)^2 + (\sin \omega t)^2) \sin \omega = r^{t+2} \sin \omega \neq 0, \end{aligned}$$

poněvadž  $r > 0$  a  $0 < \omega < \pi$ . Posloupnosti  $y_1, y_2$  jsou tedy lineárně nezávislé, tvoří fundamentální systém řešení. Obecné řešení rovnice (2.18) proto můžeme psát ve tvaru

$$x(t) = r^t (A \cos \omega t + B \sin \omega t), \quad (2.22)$$

kde  $r$  a  $\omega$  jsou dány rovnostmi (2.21).

**Příklad:** Najdeme řešení počáteční úlohy

$$x(t+2) - 4x(t+1) + 8x(t) = 0, \quad x(0) = 1, \quad x(1) = -\sqrt{2}.$$

Charakteristická rovnice

$$\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$$

má komplexně sdružené kořeny

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm 2i = 2 \left( \cos \frac{\pi}{4} \pm i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Fundamentální systém řešení dané rovnice je

$$y_1(t) = 2^t \cos \frac{\pi}{4} t, \quad y_2(t) = 2^t \sin \frac{\pi}{4} t$$

a její obecné řešení je tvaru

$$x(t) = 2^t (A \cos \frac{\pi}{4} t + B \sin \frac{\pi}{4} t).$$

Z počáteční podmínky dostaneme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} A &= 1, \\ \sqrt{2}A + \sqrt{2}B &= -\sqrt{2} \end{aligned}$$

a z nich hodnoty konstant  $A = 1$ ,  $B = -2$ . Řešení dané úlohy je tedy

$$x(t) = 2^t (\cos \frac{\pi}{4} t - 2 \sin \frac{\pi}{4} t) = 2^t \cos \frac{\pi}{4} t - 2^{t+1} \sin \frac{\pi}{4} t. \quad \blacksquare$$

Tvar obecného nenulového řešení rovnice (2.18) s  $\alpha_1^2 < 4\alpha_0$  můžeme také upravit na tvar

$$x(t) = r^t \sqrt{A^2 + B^2} \left( \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \omega t + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \omega t \right).$$

Označíme  $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ ,  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{A}{B}$  a obecné řešení rovnice (2.18) zapíšeme ve tvaru

$$x(t) = Cr^t (\sin \varphi \cos \omega t + \cos \varphi \sin \omega t) = Cr^t \sin(\omega t + \varphi).$$

**Dvojnásobný reálný charakteristický kořen**

Tento případ nastává, pokud  $\alpha_1^2 = 4\alpha_0$ . Dvojnásobný kořen charakteristické rovnice (2.20) je  $\lambda = -\frac{1}{2}\alpha_1$ . Jedna složka fundamentálního systému řešení rovnice (2.18) je tedy dána výrazem

$$y_1(t) = \left(-\frac{\alpha_1}{2}\right)^t.$$

Druhá složka je podle Tvzení 3 tvaru

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \left(-\frac{\alpha_1}{2}\right)^t \sum_{i=t_0}^{t-1} \prod_{j=t_0}^{i-1} \alpha_0 \frac{\left(-\frac{1}{2}\alpha_1\right)^j}{\left(-\frac{1}{2}\alpha_1\right)^{j+2}} = \left(-\frac{\alpha_1}{2}\right)^t \sum_{i=t_0}^{t-1} \prod_{j=t_0}^{i-1} \alpha_0 \left(-\frac{\alpha_1}{2}\right)^{-2} = \\ &= \left(-\frac{\alpha_1}{2}\right)^t \sum_{i=t_0}^{t-1} \prod_{j=t_0}^{i-1} 4\frac{\alpha_0}{\alpha_1^2} = \left(-\frac{\alpha_1}{2}\right)^t \sum_{i=t_0}^{t-1} 1^{i-t_0} = (t-t_0) \left(-\frac{\alpha_1}{2}\right)^t. \end{aligned}$$

Obecné řešení rovnice (2.18) je tedy v případě  $\alpha_1^2 = 4\alpha_0$  rovno

$$x(t) = A \left(-\frac{\alpha_1}{2}\right)^t + Bt \left(-\frac{\alpha_1}{2}\right)^t = (A + Bt) \left(-\frac{\alpha_1}{2}\right)^t.$$

**Příklad:** Najdeme řešení počáteční úlohy

$$x(t+2) - 4x(t+1) + 4x(t) = 0, \quad x(0) = 1, \quad x(1) = 0.$$

Charakteristická rovnice

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

má dvojnásobný kořen  $\lambda = 2$ . Obecné řešení dané rovnice tedy je

$$x(t) = 2^t A + 2^t t B.$$

Z počáteční podmínky dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} A &= 1, \\ 2A + 2B &= 0, \end{aligned}$$

která má řešení  $A = 1$ ,  $B = -1$ . Řešení dané úlohy tedy je

$$x(t) = 2^t(1-t).$$

■

**2.2.4 Nehomogenní rovnice, jejíž levá strana má konstantní koeficienty**

Přidružená homogenní rovnice k nehomogenní lineární rovnici druhého řádu

$$x(t+2) + \alpha_1 x(t) + \alpha_0 x(t) = b(t) \tag{2.23}$$

je rovnice (2.18), kterou jsme se zabývali v předchozí části. Můžeme tedy napsat její fundamentální systém řešení a pak řešení nehomogenní rovnice (2.23) najít pomocí formule variace konstant (2.17).

**Příklad:** Najdeme řešení počáteční úlohy

$$x(t+2) - 2x(t+1) + x(t) = t, \quad x(0) = 1, \quad x(1) = -1.$$

Přidružená homogenní rovnice

$$x(t+2) - 2x(t+1) + x(t) = 0$$

má charakteristickou rovnici  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ , která má dvojnásobný kořen 1. Obecné řešení přidružené homogenní rovnice je tedy tvaru  $x_H(t) = A + Bt$ , řešení splňující počáteční podmínku je

$$x_H(t) = 1 - 2t.$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice splňující nulové počáteční podmínky je podle formule variace konstant (2.17)

$$\begin{aligned} x_N(t) &= \sum_{j=0}^{t-1} j \frac{(j+1) - t}{(j+1) - (j+2)} = - \sum_{j=1}^{t-1} (j(j+1) - jt) = t \sum_{j=1}^{t-1} j - \sum_{j=1}^{t-1} j(j+1) = \\ &= \frac{1}{2}t^2(t-1) - \frac{1}{3}(t+1)t(t-1) = \frac{1}{6}t(t-1)(t-2). \end{aligned}$$

Celkem tak dostáváme řešení dané úlohy ve tvaru

$$x(t) = 1 - 2t + \frac{1}{6}t(t-1)(t-2).$$

■

**Příklad:** Najdeme obecné řešení nehomogenní rovnice

$$x(t+2) + x(t) = f(t)$$

s obecnou pravou stranou. K přidružené homogenní rovnici

$$x(t+2) + x(t) = 0$$

Přísluší charakteristická rovnice  $\lambda^2 + 1 = 0$ , která má ryze imaginární kořeny  $\lambda_{1,2} = \pm i = e^{\pm i \frac{\pi}{2}}$ . Fundamentální systém řešení přidružené homogenní rovnice je tedy

$$y_1(t) = \cos \frac{\pi}{2}t, \quad y_2(t) = \sin \frac{\pi}{2}t,$$

obecné řešení této rovnice je

$$x_H(t) = A \cos \frac{\pi}{2}t + B \sin \frac{\pi}{2}t.$$

Řešení nehomogenní rovnice je dáno formulí variace konstant (2.17),

$$x_N(t) = \sum_{j=t_0}^{t-1} f(j) \frac{\sin \frac{\pi}{2}(j+1) \cos \frac{\pi}{2}t - \cos \frac{\pi}{2}(j+1) \sin \frac{\pi}{2}t}{\cos \frac{\pi}{2}(j+2) \sin \frac{\pi}{2}(j+1) - \cos \frac{\pi}{2}(j+1) \sin \frac{\pi}{2}(j+2)}.$$

Platí

$$\sin \frac{\pi}{2}(j+1) = \sin \frac{\pi}{2}j \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}j = \cos \frac{\pi}{2}j,$$

$$\cos \frac{\pi}{2}(j+1) = \cos \frac{\pi}{2}j \cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}j = -\sin \frac{\pi}{2}j,$$

takže

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{2}(j+2) &= \cos \frac{\pi}{2}(j+1) = -\sin \frac{\pi}{2}j, & \cos \frac{\pi}{2}(j+2) &= -\sin \frac{\pi}{2}(j+1) = -\cos \frac{\pi}{2}j, \\ \sin \frac{\pi}{2}(j+1) \cos \frac{\pi}{2}t - \cos \frac{\pi}{2}(j+1) \sin \frac{\pi}{2}t &= \cos \frac{\pi}{2}j \cos \frac{\pi}{2}t + \sin \frac{\pi}{2}j \sin \frac{\pi}{2}t = \cos \frac{\pi}{2}(t-j), \\ \cos \frac{\pi}{2}(j+2) \sin \frac{\pi}{2}(j+1) - \cos \frac{\pi}{2}(j+1) \sin \frac{\pi}{2}(j+2) &= -(\cos \frac{\pi}{2}j)^2 - (\sin \frac{\pi}{2}j)^2 = -1. \end{aligned}$$

Odtud dostáváme řešení nehomogenní rovnice ve tvaru

$$x_N = -\sum_{j=t_0}^{t-1} f(j) \cos \frac{\pi}{2}(t-j).$$

Řešení dané rovnice tedy je

$$x(t) = A \cos \frac{\pi}{2}t + B \sin \frac{\pi}{2}t - \sum_{j=t_0}^{t-1} f(j) \cos \frac{\pi}{2}(t-j).$$

■

Fundamentální systém řešení přidružené homogenní rovnice (2.18) k nehomogenní rovnici (2.23) můžeme pomocí charakteristických kořenů napsat explicitně. Proto také můžeme napsat pomocí sumace tvar partikulárního řešení nehomogenní rovnice, které splňuje nulové počáteční podmínky:

**Tvrzení 5.** Partikulární řešení  $x_N$  nehomogenní rovnice (2.23) splňující počáteční podmínky

$$x(t_0) = 0, \quad x(t_0 + 1) = 0$$

je jednoho z následujících tvarů:

1. Má-li charakteristická rovnice (2.20) dva reálné různé kořeny  $\lambda_1, \lambda_2$ , pak

$$\begin{aligned} x_N(t) &= \frac{\lambda_1^{t-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{j=t_0}^{t-1} b(j) \lambda_1^{-j} - \frac{\lambda_2^{t-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{j=t_0}^{t-1} b(j) \lambda_2^{-j} = \\ &= \frac{\lambda_1^{t-2}}{1 - (\lambda_2/\lambda_1)} \sum_{j=t_0}^{t-1} b(j) \lambda_1^{-j} \left( 1 - \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{t-j-1} \right). \end{aligned}$$

2. Má-li charakteristická rovnice (2.20) komplexně sdružené kořeny  $r(\cos \omega \pm i \sin \omega)$ , pak

$$\begin{aligned} x_N(t) &= \frac{r^{t-2}}{\sin \omega} \left( \sin \omega(t-1) \sum_{j=t_0}^{t-1} b(j) \cos \omega j - \cos \omega(t-1) \sum_{j=t_0}^{t-1} b(j) \sin \omega j \right) = \\ &= \frac{r^{t-2}}{\sin \omega} \sum_{j=t_0}^{t-1} b(j) \sin \omega(t-j-1). \end{aligned}$$

3. Má-li charakteristická rovnice (2.20) dvojnásobný reálný kořen  $\lambda = -\frac{1}{2}\alpha_1 = -\sqrt{\alpha_0}$ , pak

$$x_N(t) = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{j=t_0}^{t-1} b(j) \lambda^{t-j}(t-j-1) = \frac{1}{\alpha_0} \sum_{j=t_0}^{t-1} b(j) \left( -\frac{\alpha_1}{2} \right)^{t-j} (t-j-1).$$

*Důkaz:* Přímým výpočtem na základě výsledků z 2.2.3 a formule variace konstant (2.17). □

### 2.3 Lineární rovnice $k$ -tého řádu

Jedná se o rovnici

$$\Delta^k x + a_{k-1}(t)\Delta^{k-1}x + a_{k-2}(t)\Delta^{k-2}(t)x + \cdots + a_1(t)\Delta x + a_0(t) = b(t). \quad (2.24)$$

O posloupnostech  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, b$  předpokládáme, že mají stejný definiční obor, označíme ho  $D$ , a pro každé  $t$  z tohoto definičního oboru platí

$$a_{k-1}(t) - a_{k-2}(t) + a_{k-3}(t) - \cdots + (-1)^{k-1}a_0(t) \neq 1. \quad (2.25)$$

V případě  $b \equiv 0$  se rovnice (2.24) nazývá *homogenní*, v opačném případě *nehomogenní*.

Je-li  $t_0 \in D$ , jsou počáteční podmínky pro rovnici (2.24) tvaru

$$x(t_0) = \xi_0, \quad x(t_0 + 1) = \xi_1, \quad \dots, \quad x(t_0 + k - 1) = \xi_{k-1}. \quad (2.26)$$

Rovnici (2.24) přepíšeme na rovnici druhého typu:

$$\Delta^k x(t) = x(t+k) + \sum_{j=1}^k (-1)^j \binom{k}{j} x(t+k-j) = x(t+k) + \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} x(t+j),$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k-1} a_j(t)\Delta^j x(t) &= \sum_{j=0}^{k-1} a_j(t) \sum_{i=0}^j (-1)^i \binom{j}{i} x(t+j-i) = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=i}^{k-1} a_j(t)(-1)^i \binom{j}{i} x(t+j-i) = \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1-i} a_{j+i}(t)(-1)^i \binom{j+i}{i} x(t+j) = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1-i} a_{i+j}(t)(-1)^i \binom{j+i}{i} x(t+j), \end{aligned}$$

takže levá strana rovnice (2.24) je tvaru

$$x(t+k) + \sum_{j=0}^{k-1} \left[ (-1)^{k-j} \binom{k}{j} + \sum_{i=0}^{k-1-j} a_{i+j}(t)(-1)^i \binom{j+i}{i} \right] x(t+j).$$

Označíme

$$c_j(t) = (-1)^{k-j} \binom{k}{j} + \sum_{i=0}^{k-1-j} a_{i+j}(t)(-1)^i \binom{j+i}{i} \quad \text{pro } j = 0, 1, 2, \dots, k-1$$

a dostaneme rovnici druhého typu ekvivalentní s rovnicí (2.24) ve tvaru

$$x(t+k) + c_{k-1}(t)x(t+k-1) + c_{k-2}(t)x(t+k-2) + \cdots + c_1(t)x(t+1) + c_0(t)x(t) = b(t); \quad (2.27)$$

podmínka (2.25) zaručí, že  $c_0(t) \neq 0$  pro všechna  $t \in D$ , takže se skutečně jedná o rovnici  $k$ -tého řádu. Z tvaru rovnice (2.27) vidíme, že počáteční úloha (2.27), (2.26), nebo ekvivalentně úloha (2.24), (2.26), má jediné řešení, které je definováno na množině  $D$ .

### 2.3.1 Fundamentální systém řešení homogenní rovnice

Lineární homogenní diferenční rovnice  $k$ -tého řádu

$$x(t+k) + c_{k-1}(t)x(t+k-1) + c_{k-2}(t)x(t+k-2) + \cdots + c_1(t)x(t+1) + c_0(t)x(t) = 0 \quad (2.28)$$

splňuje *princip superpozice*: jsou-li posloupnosti  $x_1$  a  $x_2$  řešení rovnice (2.28) a  $p$  a  $q$  jsou libovolné reálné konstanty, pak také posloupnost  $x = px_1 + qx_2$  je řešením rovnice (2.41), tj. libovolná lineární kombinace řešení této rovnice je jejím řešením. Navíc nulová posloupnost  $x \equiv 0$  je řešením rovnice (2.41). To znamená, že množina všech řešení lineární homogenní diferenční rovnice tvoří vektorový prostor.

Pro  $i \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$  označme  $y_i$  posloupnost, která je řešením homogenní rovnice (2.28) s počátečními podmínkami

$$x(t_0 + j) = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i, \end{cases} \quad j = 0, 1, 2, \dots, k-1.$$

Pak je zřejmé, že posloupnosti  $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$  jsou lineárně nezávislé. To znamená, že dimenze vektorového prostoru řešení je alespoň  $k$ .

Nechť  $y$  je libovolné řešení homogenní rovnice (2.28). Označme

$$\eta_0 = y(t_0), \eta_1 = y(t_0 + 1), \dots, \eta_{k-1} = y(t_0 + k - 1).$$

Lineární kombinace posloupností  $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$  s koeficienty  $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{k-1}$ , tj. posloupnost

$$\eta_0 y_0 + \eta_1 y_1 + \cdots + \eta_{k-1} y_{k-1} \quad (2.29)$$

je podle principu superpozice řešením rovnice (2.28) a splňuje stejné počáteční podmínky, jako posloupnost  $y$ . Z jednoznačnosti řešení počáteční úlohy plyne, že posloupnost  $y$  a lineární kombinace (2.29) jsou shodné. Odtud dále plyne, že prostor řešení lineární homogenní rovnice (2.28) má dimenzi  $k$  a posloupnosti  $y_i, i = 0, 1, 2, \dots, k-1$  tvoří bázi tohoto prostoru.

Z provedených úvah plyne, že platí

**Věta 1.** Množina všech řešení lineární homogenní diferenční rovnice  $k$ -tého řádu (2.28) tvoří vektorový prostor dimenze  $k$ .

**Definice 1.** Báze vektorového prostoru všech řešení lineární homogenní rovnice (2.28) se nazývá *fundamentální systém řešení*.

Posloupnosti  $z_1, z_2, \dots, z_k$  tvoří fundamentální systém řešení lineární homogenní diferenční rovnice (2.28) právě tehdy, když libovolné řešení  $x$  této rovnice lze vyjádřit jako jejich lineární kombinaci, tj. právě tehdy, když existují jednoznačně určené konstanty  $A_1, A_2, \dots, A_k$  takové, že

$$x(t) = A_1 z_1(t) + A_2 z_2(t) + \cdots + A_k z_k(t) \quad (2.30)$$

pro libovolné  $t$  z definičního oboru  $D$ . Předchozí rovnost je ekvivalentní s rovnostmi

$$\begin{aligned} A_1 z_1(t) &+ A_2 z_2(t) &+ \cdots &+ A_k z_k(t) &= \xi_0 \\ A_1 z_1(t+1) &+ A_2 z_2(t+1) &+ \cdots &+ A_k z_k(t+1) &= \xi_1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ A_1 z_1(t+k-1) &+ A_2 z_2(t+k-1) &+ \cdots &+ A_k z_k(t+k-1) &= \xi_{k-1} \end{aligned} \quad (2.31)$$

a jednoznačná existence konstant  $A_1, A_2, \dots, A_k$  je ekvivalentní s jednoznačnou řešitelností (2.31) chápané jako systém (algebraických) rovnic pro neznámé  $A_1, A_2, \dots, A_k$ . Determinant této soustavy je Casoratián posloupností  $z_1, z_2, \dots, z_k$  v indexu  $t$ ,

$$C(t; z_1, z_2, \dots, z_k) = \begin{vmatrix} z_1(t) & z_2(t) & \dots & z_k(t) \\ z_1(t+1) & z_2(t+1) & \dots & z_k(t+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1(t+k-1) & z_2(t+k-1) & \dots & z_k(t+k-1) \end{vmatrix}.$$

Dostáváme tak závěr:

**Věta 2.** *Posloupnosti  $z_1, z_2, \dots, z_k$  tvoří fundamentální systém řešení lineární homogenní diferencní rovnice (2.28) právě tehdy, když každá z nich je řešením rovnice (2.28) a pro každé  $t$  z definičního oboru  $D$  platí*

$$C(t; z_1, z_2, \dots, z_k) \neq 0,$$

kde  $C(t; z_1, z_2, \dots, z_k)$  je Casoratián posloupností  $z_1, z_2, \dots, z_k$ .

### 2.3.2 Nehomogenní rovnice a metoda variace konstant

Pokud jsou posloupnosti  $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$  v rovnicích (2.27) a (2.28) stejné, řekneme, že homogenní lineární diferencní rovnice (2.28) je *přidružená k nehomogenní rovnici (2.27)*.

Je-li posloupnost  $y$  řešením nehomogenní rovnice (2.27) a posloupnost  $z$  je řešením přidružené homogenní rovnice (2.28), pak jejich součet  $x = z + y$  je opět řešením nehomogenní rovnice (2.27), neboť

$$\begin{aligned} x(t+k) + \sum_{i=1}^k c_i(t)x(t+i) &= z(t+k) + y(t+k) + \sum_{i=1}^k c_i(t)(z(t+i) + y(t+i)) = \\ &= \left( z(t+k) + \sum_{i=1}^k c_i(t)z(t+i) \right) + \left( y(t+k) + \sum_{i=1}^k c_i(t)y(t+i) \right) = 0 + b(t) = b(t). \end{aligned}$$

Platí tedy

**Věta 3.** *Nechť  $z_1, z_2, \dots, z_k$  tvoří fundamentální systém řešení lineární homogenní diferencní rovnice (2.28) přidružené k nehomogenní rovnici (2.27). Pak každé řešení nehomogenní rovnice (2.27) je tvaru*

$$x(t) = B_1 z_1(t) + B_2 z_2(t) + \dots + B_k z_k(t) + y(t),$$

kde  $y$  je nějaké řešení nehomogenní rovnice a  $B_1, B_2, \dots, B_k$  jsou konstanty.

Nechť posloupnosti  $z_1, z_2, \dots, z_k$  tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice (2.28) přidružené k nehomogenní rovnici (2.28). Pak je

$$z_i(t+k) = - \sum_{j=0}^{k-1} c_j(t) z_i(t+j) \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, k. \quad (2.32)$$

Řešení nehomogenní rovnice (2.28) budeme hledat ve tvaru

$$x(t) = \sum_{i=1}^k u_i(t) z_i(t), \quad (2.33)$$

kde  $u_1, u_2, \dots, u_k$  jsou zatím neurčené posloupnosti. Hledáme ho tedy jako analogii řešení homogenní rovnice (2.30); místo konstant  $A_1, A_2, \dots, A_k$  však píšeme posloupnosti — varírujeme konstanty. Z tohoto důvodu se tato metoda řešení nehomogenní rovnice nazývá *metoda variace konstant*.

Nyní můžeme vyjádřit

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^k u_i(t+1) z_i(t+1) = \sum_{i=1}^k [(\Delta u_i(t)) z_i(t+1) + u_i(t) z_i(t+1)].$$

Budeme požadovat, aby posloupnosti  $u_1, u_2, \dots, u_k$  splňovaly rovnici

$$\sum_{i=1}^k (\Delta u_i(t)) z_i(t+1) = 0.$$

Pak  $x(t+1) = \sum_{i=1}^k u_i(t) z_i(t+1)$ , takže

$$x(t+2) = \sum_{i=1}^k u_i(t+1) z_i(t+2) = \sum_{i=1}^k [(\Delta u_i(t)) z_i(t+2) + u_i(t) z_i(t+2)].$$

Dále budeme požadovat, aby posloupnosti  $u_1, u_2, \dots, u_k$  splňovaly rovnice

$$\sum_{i=1}^k (\Delta u_i(t)) z_i(t+2) = 0,$$

takže  $x(t+2) = \sum_{i=1}^k u_i(t) z_i(t+2)$ . Takto budeme pokračovat až k požadavku

$$\sum_{i=1}^k (\Delta u_i(t)) z_i(t+k-1) = 0$$

a vyjádření  $x(t+k-1) = \sum_{i=1}^k u_i(t) z_i(t+k-1)$ .

Celkem tedy požadujeme

$$\sum_{i=1}^k (\Delta u_i(t)) z_i(t+j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k-1 \quad (2.34)$$

a dostáváme

$$x(t+j) = \sum_{i=1}^k u_i(t) z_i(t+j), \quad j = 1, 2, \dots, k-1. \quad (2.35)$$



V poslední z rovností (2.35), tj. v té, v níž  $j = k - 1$ , budeme psát  $t + 1$  místo  $t$  a upravíme ji s použitím (2.32). Dostaneme

$$\begin{aligned} x(t+k) &= \sum_{i=1}^k u_i(t+1)z_i(t+k) = \sum_{i=1}^k (\Delta u_i(t))z_i(t+k) + \sum_{i=1}^k u_i(t)z_i(t+k) = \\ &= \sum_{i=1}^k (\Delta u_i(t))z_i(t+k) - \sum_{i=1}^k u_i(t) \sum_{j=0}^{k-1} c_j(t)z_i(t+j). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Současně posloupnost  $x$  má být řešením rovnice (2.27), takže s využitím vztahů (2.35) dostaneme

$$\begin{aligned} x(t+k) &= b(t) - \sum_{j=0}^{k-1} c_j(t)x(t+j) = b(t) - \sum_{j=0}^{k-1} c_j(t) \sum_{i=1}^k u_i(t)z_i(t+j) = \\ &= b(t) - \sum_{i=1}^k u_i(t) \sum_{j=0}^{k-1} c_j(t)z_i(t+j). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Porovnáním (2.36) a (2.37) vidíme, že

$$\sum_{i=1}^k (\Delta u_i(t))z_i(t+k) = b(t). \quad (2.38)$$

Diference posloupností  $u_1, u_2, \dots, u_k$  tedy splňují systém rovnic (2.34), (2.38). Přepíšeme ho do tvaru

$$\begin{array}{cccc} z_1(t+1) \Delta u_1(t) + & z_2(t+1) \Delta u_2(t) + \dots + & z_k(t+1) \Delta u_k(t) = 0 \\ z_1(t+2) \Delta u_1(t) + & z_2(t+2) \Delta u_2(t) + \dots + & z_k(t+2) \Delta u_k(t) = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_1(t+k-1) \Delta u_1(t) + & z_2(t+k-1) \Delta u_2(t) + \dots + & z_k(t+k-1) \Delta u_k(t) = 0 \\ z_1(t+k) \Delta u_1(t) + & z_2(t+k) \Delta u_2(t) + \dots + & z_k(t+k) \Delta u_k(t) = b(t). \end{array}$$

Determinant této soustavy je Casoratiánem fundamentálního systému řešení homogenní rovnice (2.28) v indexu  $t + 1$ . Je tedy nenulový a soustava je jednoznačně řešitelná. Označíme

$$w(t) = \begin{vmatrix} z_1(t) & z_2(t) & \dots & z_k(t) \\ z_1(t+1) & z_2(t+1) & \dots & z_k(t+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1(t+k-1) & z_2(t+k-1) & \dots & z_k(t+k-1) \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned} m_i(t) &= \\ &= \begin{vmatrix} z_1(t) & z_2(t) & \dots & z_{i-1}(t) & z_{i+1}(t) & \dots & z_k(t) \\ z_1(t+1) & z_2(t+1) & \dots & z_{i-1}(t+1) & z_{i+1}(t+1) & \dots & z_k(t+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1(t+k-2) & z_2(t+k-2) & \dots & z_{i-1}(t+k-2) & z_{i+1}(t+k-2) & \dots & z_k(t+k-2) \end{vmatrix}; \end{aligned}$$

$w(t)$  je Casoratián fundamentálního řešení homogenní rovnice (2.28). Diference posloupností  $u_1, u_2, \dots, u_k$  nyní můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\Delta u_i(t) = \frac{(-1)^{k+i} b(t) m_i(t+1)}{w(t+1)}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Odtud a z rovnosti (1.3) dostaneme

$$u_i(t) = u_i(t_0) + (-1)^{k+i} \sum_{j=t_0}^{t-1} \frac{b(j) m_i(j+1)}{w(j+1)}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Při označení  $B_i = u_i(t_0)$  můžeme řešení rovnice (2.27) podle vztahu (2.33) psát ve tvaru

$$x(t) = \sum_{i=1}^k B_i z_i(t) + (-1)^k \sum_{j=t_0}^{t-1} \frac{b(j)}{w(j+1)} \sum_{i=1}^k (-1)^i m_i(j+1) z_i(t).$$

### 2.3.3 Homogenní rovnice s konstantními koeficienty

Jedná se o rovnici

$$\Delta^k x + \alpha_{k-1} \Delta^{k-1} x + \alpha_{k-2} \Delta^{k-2} x + \dots + \alpha_1 \Delta x + \alpha_0 = 0, \quad (2.39)$$

kde reálné koeficienty  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$  splňují rovnost

$$\alpha_{k-1} - \alpha_{k-2} + \alpha_{k-3} - \dots + (-1)^{k-1} \alpha_0 \neq 1 \quad (2.40)$$

analogickou k rovnosti (2.25). Rovnice (2.39) má pro libovolné počáteční podmínky tvaru (2.26) jediné řešení, které je definováno pro každé  $t \in \mathbb{Z}$ .

Stejně jako v případě obecné lineární rovnice  $k$ -tého řádu můžeme rovnici (2.39) přepsat na rovnici druhého typu

$$x(t+k) + \gamma_{k-1} x(t+k-1) + \gamma_{k-2} x(t+k-2) + \dots + \gamma_1 x(t+1) + \gamma_0 x(t) = 0, \quad (2.41)$$

kde jsme označili

$$\gamma_j = (-1)^{k-j} \binom{k}{j} + \sum_{i=0}^{k-1-j} \alpha_{i+j} (-1)^i \binom{j+i}{i} \quad \text{pro } j = 0, 1, 2, \dots, k-1.$$

S pomocí operátoru posunu  $\sigma$  můžeme tuto rovnici přepsat do tvaru

$$x^{\sigma^k}(t) + \gamma_{k-1} x^{\sigma^{k-1}}(t) + \gamma_{k-2} x^{\sigma^{k-2}}(t) + \dots + \gamma_1 x^{\sigma}(t) + \gamma_0 x(t) = 0.$$

Položíme-li  $\gamma_k = 1$ , můžeme operátorovou rovnici zapsat ještě stručněji

$$\left( \sum_{i=0}^k \gamma_i \cdot \sigma^i \right) x \equiv 0. \quad (2.42)$$

Ze stejných důvodů jako v odstavci 2.2.3 budeme řešení rovnice (2.41) hledat ve tvaru  $x(t) = \lambda^t$ , kde  $\lambda$  je zatím neurčená nenulová konstanta. Dosadíme tuto posloupnost do rovnice (2.41)

$$\lambda^{t+k} + \gamma_{k-1} \lambda^{t+k-1} + \gamma_{k-2} \lambda^{t+k-2} + \dots + \gamma_1 \lambda^{t+1} + \gamma_0 \lambda^t = 0$$

a po vynásobení výrazem  $\lambda^{-t}$  dostaneme *charakteristickou rovnici*

$$\lambda^k + \gamma_{k-1}\lambda^{k-1} + \gamma_{k-2}\lambda^{k-2} + \cdots + \gamma_1\lambda + \gamma_0 = 0. \quad (2.43)$$

Řešení této algebraické rovnice se nazývají *charakteristické kořeny*. Pověšimněme si, že žádný kořen rovnice (2.43) není nulový, neboť  $\gamma_0 \neq 0$ .

**Věta 4.** *Nechť  $\lambda_p$  je  $r$ -násobný kořen charakteristické rovnice (2.43). Pak každá z posloupností definovaných vztahem*

$$x(t) = t^q \lambda_p^t, \quad q = 0, 1, 2, \dots, r-1$$

*je řešením lineární homogenní diferencní rovnice (2.41).*

*Důkaz:* Položíme  $\gamma_k = 1$  a polynom na levé straně rovnice (2.43) označíme  $P(\lambda)$ , tj.

$$P(\lambda) = \sum_{i=1}^k \gamma_i \lambda^i.$$

Nejprve dokážeme pomocné tvrzení: Ke každému přirozenému číslu  $s$  a každému přirozenému číslu  $j \in \{0, 1, 2, \dots, s\}$  existuje polynom  $p_{s,j}$  stupně nejvýše  $s$  ve dvou proměnných  $t, \lambda$  takový, že

$$\sum_{i=0}^k \gamma_i (t+i)^s \lambda^i = \sum_{j=0}^s p_{s,j}(t, \lambda) P^{(j)}(\lambda).$$

Tvrzení dokážeme úplnou indukcí vzhledem k proměnné  $s$ . Pro  $s = 0$  je

$$\sum_{i=0}^k \gamma_i (t+i)^0 \lambda^i = \sum_{i=0}^k \gamma_i \lambda^i = P(\lambda) = 1P^{(0)}(\lambda),$$

tedy  $p_{0,0} \equiv 1$ .

Indukční krok je obsažen ve výpočtu:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k \gamma_i (t+i)^{s+1} \lambda^i &= \sum_{i=0}^k \gamma_i (t+i)^s (t+i) \lambda^i = t \sum_{i=0}^k \gamma_i (t+i)^s \lambda^i + \lambda \sum_{i=1}^k \gamma_i (t+i)^s i \lambda^{i-1} = \\ &= t \sum_{j=0}^s p_{s,j}(t, \lambda) P^{(j)}(\lambda) + \lambda \sum_{i=1}^k \gamma_i (t+i)^s \frac{d}{d\lambda} \lambda^i = \\ &= t \sum_{j=0}^s p_{s,j}(t, \lambda) P^{(j)}(\lambda) + \lambda \frac{d}{d\lambda} \sum_{i=1}^k \gamma_i (t+i)^s \lambda^i = \\ &= t \sum_{j=0}^s p_{s,j}(t, \lambda) P^{(j)}(\lambda) + \lambda \frac{d}{d\lambda} \left( \sum_{i=0}^k \gamma_i (t+i)^s \lambda^i - \gamma_0 t^s \right) = \\ &= t \sum_{j=0}^s p_{s,j}(t, \lambda) P^{(j)}(\lambda) + \lambda \frac{d}{d\lambda} \left( \sum_{j=0}^s p_{s,j}(t, \lambda) P^{(j)}(\lambda) - \gamma_0 t^s \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= t \sum_{j=0}^s p_{s,j}(t, \lambda) P^{(j)}(\lambda) + \lambda \sum_{j=0}^s \left( \frac{\partial p_{s,j}(t, \lambda)}{\partial \lambda} P^{(j)}(\lambda) + p_{s,j}(t, \lambda) P^{(j+1)}(\lambda) \right) = \\
&= \sum_{j=0}^s \left( t p_{s,j}(t, \lambda) + \lambda \frac{\partial p_{s,j}(t, \lambda)}{\partial \lambda} \right) P^{(j)}(\lambda) + \lambda \sum_{j=1}^{s+1} p_{s,j-1}(t, \lambda) P^{(j)}(\lambda) = \\
&= \left( t p_{s,0}(t, \lambda) + \lambda \frac{\partial p_{s,0}(t, \lambda)}{\partial \lambda} \right) P(\lambda) + \\
&\quad + \sum_{j=1}^s \left( t p_{s,j}(t, \lambda) + \lambda \frac{\partial p_{s,j}(t, \lambda)}{\partial \lambda} + \lambda p_{s,j-1}(t, \lambda) \right) P^{(j)}(\lambda) + \\
&\quad + \lambda p_{s,s}(t, \lambda) P^{(s+1)}(\lambda).
\end{aligned}$$

Stačí tedy položit

$$\begin{aligned}
p_{s+1,0}(t, \lambda) &= t p_{s,0}(t, \lambda) + \lambda \frac{\partial p_{s,0}(t, \lambda)}{\partial \lambda}, \\
p_{s+1,j}(t, \lambda) &= t p_{s,j}(t, \lambda) + \lambda \frac{\partial p_{s,j}(t, \lambda)}{\partial \lambda} + \lambda p_{s,j-1}(t, \lambda) \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots, s, \\
p_{s+1,s+1}(t, \lambda) &= \lambda p_{s,s}(t, \lambda)
\end{aligned}$$

a pomocné tvrzení je dokázáno.

Nechť nyní  $\lambda_p$  je  $r$ -násobný kořen charakteristické rovnice. Pak je také kořenem derivací polynomu  $P$  až do řádu  $r - 1$ , tj.

$$P^{(j)}(\lambda_p) = 0 \quad \text{pro } j = 0, 1, 2, \dots, r - 1.$$

Nyní pro  $x(t) = t^q \lambda_p^t$ ,  $q \in \{0, 1, 2, \dots, r - 1\}$ , podle pomocného tvrzení platí

$$\sum_{i=0}^k \gamma_i x(t+i) = \sum_{i=0}^k \gamma_i (t+i)^q \lambda_p^{t+i} = \lambda^t \sum_{i=0}^k \gamma_i (t+i)^q \lambda_p^i = \lambda^t \sum_{j=0}^q p_{q,j}(t, \lambda) P^{(j)}(\lambda) = 0. \quad \square$$

**Důsledek 1.** Nechť  $\lambda_c = a(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  je  $r$ -násobný komplexní kořen charakteristické rovnice (2.43). Pak každá z posloupností definovaných některým ze vztahů

$$x_1(t) = t^q a^t \cos t\varphi, \quad x_2(t) = t^q a^t \sin t\varphi, \quad q = 0, 1, 2, \dots, r - 1$$

je řešením lineární homogenní diferenční rovnice (2.41).

*Důkaz:* Poněvadž polynom na levé straně rovnice (2.43) má reálné koeficienty, je také komplexně sdružené číslo  $\bar{\lambda}_c = a(\cos \varphi - i \sin \varphi)$  kořenem charakteristické rovnice (2.43) a má stejnou násobnost  $r$ . Podle Věty 4 (v níž jsme nepředpokládali, že by kořen charakteristické rovnice byl reálný), je každá z posloupností definovaných vztahem

$$\tilde{x}_1(t) = t^q a^t (\cos t\varphi + i \sin t\varphi), \quad \tilde{x}_2(t) = t^q a^t (\cos t\varphi - i \sin t\varphi), \quad q = 0, 1, 2, \dots, r - 1$$

řešením rovnice (2.41). Podle principu superpozice jsou také posloupnosti

$$x_1(t) = \frac{1}{2}(\tilde{x}_1(t) + \tilde{x}_2(t)), \quad x_2(t) = \frac{1}{2i}(\tilde{x}_1(t) - \tilde{x}_2(t))$$

řešením této rovnice.  $\square$

**Důsledek 2.** Každému reálnému  $r$ -násobnému charakteristickému kořenu  $\lambda$  odpovídá  $r$  řešení lineární homogenní rovnice (2.41)

$$\lambda^t, t\lambda^t, t^2\lambda^t, \dots, t^{r-1}\lambda^t$$

a každému komplexnímu  $r$ -násobnému charakteristickému kořenu  $a(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  odpovídá  $2r$  řešení lineární homogenní rovnice (2.41)

$$\begin{aligned} & a^t \cos t\varphi, ta^t \cos t\varphi, t^2a^t \cos t\varphi, \dots, t^{r-1}a^t \cos t\varphi, \\ & a^t \sin t\varphi, ta^t \sin t\varphi, t^2a^t \sin t\varphi, \dots, t^{r-1}a^t \sin t\varphi. \end{aligned}$$

**Důsledek 3.** Nechť

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k_1}$$

jsou všechny jednoduché reálné různé charakteristické kořeny,

$$\lambda_{k_1+1}, \lambda_{k_1+2}, \dots, \lambda_{k_2}$$

jsou všechny reálné různé charakteristické kořeny, které mají násobnosti  $r_{k_1+1}, r_{k_1+2}, \dots, r_{k_2}$  (v tomto pořadí) a

$$a_{k_2+1}(\cos \varphi_{k_2+1} + i \sin \varphi_{k_2+1}), a_{k_2+2}(\cos \varphi_{k_2+2} + i \sin \varphi_{k_2+2}), \dots, a_{k_3}(\cos \varphi_{k_3} + i \sin \varphi_{k_3})$$

jsou všechny komplexní charakteristické kořeny takové, že žádné dva z nich nejsou komplexně sdružené a mají násobnosti  $r_{k_2+1}, r_{k_2+2}, \dots, r_{k_3}$  (v tomto pořadí). Přitom samozřejmě platí

$$k_1 + \sum_{i=k_1+1}^{k_2} r_i + 2 \sum_{i=k_2+1}^{k_3} r_i = k.$$

Pak posloupnost definovaná vztahem

$$x(t) = \sum_{i=1}^{k_1} A_i \lambda_i^t + \sum_{i=k_1+1}^{k_2} \sum_{j=0}^{r_i-1} B_{ij} t^j \lambda_i^t + \sum_{i=k_2+1}^{k_3} \sum_{j=0}^{r_i-1} C_{ij} t^j a_i^t \cos t\varphi_i + \sum_{i=k_2+1}^{k_3} \sum_{j=0}^{r_i-1} D_{ij} t^j a_i^t \sin t\varphi_i, \quad (2.44)$$

kde  $A_i, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}$  jsou konstanty, je řešením lineární homogenní rovnice (2.41).

Nechť existuje charakteristický kořen, jehož modul (absolutní hodnota) je větší, než moduly všech ostatních charakteristických kořenů. Takový charakteristický kořen musí být reálný a jednoduchý, můžeme ho tedy označit  $\lambda_1$ . Platí

$$|\lambda_1| > |\lambda_i| \text{ pro } i = 2, 3, \dots, k_2, \quad |\lambda_1| > a_i \text{ pro } i = k_2 + 1, k_2 + 2, \dots, k_3.$$

Charakteristický kořen  $\lambda_1$  s těmito vlastnostmi nazveme *ryze dominantní*. Nyní pro řešení  $x(t)$  rovnice (2.41) definované vztahem (2.44) za předpokladu  $A_1 \neq 0$  platí

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t)}{A_1 \lambda_1^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} & \left( 1 + \sum_{i=2}^{k_1} \frac{A_i}{A_1} \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^t + \sum_{i=k_1+1}^{k_2} \sum_{j=0}^{r_i-1} \frac{B_{ij}}{A_1} t^j \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^t + \right. \\ & \left. + \sum_{i=k_2+1}^{k_3} \sum_{j=0}^{r_i-1} \frac{C_{ij}}{A_1} t^j \left( \frac{a_i}{\lambda_1} \right)^t \cos t\varphi_i + \sum_{i=k_2+1}^{k_3} \sum_{j=0}^{r_i-1} \frac{D_{ij}}{A_1} t^j \left( \frac{a_i}{\lambda_1} \right)^t \sin t\varphi_i \right) = 1. \end{aligned}$$

Dostáváme tak

**Důsledek 4.** Pokud existuje ryze dominantní charakteristický kořen  $\lambda_1$  a konstanta  $A_1$  v řešení (2.44) rovnice (2.41) je nenulová, pak toto řešení je asymptoticky ekvivalentní s geometrickou posloupností s kvocientem  $\lambda_1$ .

Řekneme, že charakteristický kořen je *dominantní*, pokud jeho modul není menší než modul jakéhokoliv charakteristického kořene, tj. dominantní charakteristický kořen má maximální modul. Označme tento maximální modul symbolem  $\Lambda$ .

Nechť jsou charakteristické kořeny označeny jako v Důsledku 3 a navíc platí

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq |\lambda_4| \geq \dots \geq |\lambda_{k_1}|,$$

$$|\lambda_{k_1+1}| \geq |\lambda_{k_1+2}| \geq \dots \geq |\lambda_{k_2}|, \quad a_{k_2+1} \geq a_{k_2+2} \geq \dots \geq a_{k_3}.$$

Položme

$$l_1 = \begin{cases} 2, & \Lambda = |\lambda_2|, \\ 1, & \Lambda = |\lambda_1| > |\lambda_2|, \\ 0, & \Lambda > |\lambda_1|, \end{cases} \quad l_2 = \begin{cases} \max \{i \in \{k_2 + 1, k_2 + 2, \dots, k_3\} : a_i = \Lambda\}, & \Lambda = a_{k_2+1}, \\ k_2, & \Lambda > a_{k_2+1}. \end{cases}$$

Nechť dominantní charakteristické kořeny jsou jednoduché, tj.  $|\lambda_{k_1+1}| < \Lambda$  a pokud  $l_2 > k_2$  tak  $\max \{r_i : i \in \{k_2 + 1, k_2 + 2, \dots, l_2\}\} = 1$ . Označme

$$y(t) = \sum_{i=1}^{l_1} A_i (\operatorname{sgn} \lambda_i)^t + \sum_{i=k_2+1}^{l_2} (C_{i0} \cos t\varphi_i + D_{i0} \sin t\varphi_i).$$

Pak

$$\begin{aligned} \frac{x(t)}{\Lambda^t} - y(t) = & \sum_{i=l_1+1}^{k_1} A_i \left( \frac{\lambda_i}{\Lambda} \right)^t + \sum_{i=k_1+1}^{k_2} \sum_{j=0}^{r_i-1} B_{ij} t^j \left( \frac{\lambda_i}{\Lambda} \right)^t + \\ & + \sum_{i=l_2+1}^{k_3} \sum_{j=0}^{r_i-1} C_{ij} t^j \left( \frac{a_i}{\Lambda} \right)^t \cos t\varphi_i + \sum_{i=l_2+1}^{k_3} \sum_{j=0}^{r_i-1} D_{ij} t^j \left( \frac{a_i}{\Lambda} \right)^t \sin t\varphi_i. \end{aligned}$$

Limita pro  $t \rightarrow \infty$  posloupnosti na pravé straně této rovnosti je rovna 0. To — zhruba řečeno — znamená, že „pro dostatečně velké  $t$  se řešení rovnice (2.41) chová jako posloupnost  $y$ “.

Poněvadž pro libovolné  $t$  platí nerovnosti

$$-\infty < -\sum_{i=1}^{l_1} |A_i| - \sum_{i=k_2+1}^{l_2} (|C_{i0}| + |D_{i0}|) \leq y(t) \leq \infty < -\sum_{i=1}^{l_1} |A_i| + \sum_{i=k_2+1}^{l_2} (|C_{i0}| + |D_{i0}|) < \infty,$$

je

$$-\infty < m = \liminf_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) = M < \infty,$$

pro řešení  $x(t)$  rovnice (2.41) definované rovností (2.44) platí

$$m\Lambda^t \leq x(t) \leq M\Lambda^t.$$

### 2.3.4 Rovnice s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou

Uvažujme nehomogenní lineární diferenční rovnici  $k$ -tého řádu druhého typu

$$x(t+k) + \gamma_{k-1}x(t+k-1) + \cdots + \gamma_1x(t+1) + \gamma_0x(t) = b(t) \quad (2.45)$$

a k ní přidruženou lineární homogenní rovnici (2.41). Označme polynomiální operátor posunu z levé strany operátorové rovnice (2.42) symbolem  $P^\Sigma$ ; homogenní rovnici (2.41) tedy můžeme zapsat ve tvaru

$$P^\Sigma x(t) \equiv 0 \quad \text{nebo} \quad P^\Sigma x = 0,$$

a nehomogenní rovnici ve tvaru

$$P^\Sigma x(t) = b(t) \quad \text{nebo} \quad P^\Sigma x = b.$$

**Definice 2.** Nechť  $p \in \mathcal{P}$  je posloupnost,  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbb{R}$  jsou konstanty takové, že  $\beta_0 \neq 0 \neq \beta_l$ , a nechť  $R^\Sigma$  je polynomiální operátor posunu,  $R^\Sigma = \sum_{i=0}^l \beta_i \cdot \sigma^i$ . Řekneme, že operátor  $R^\Sigma$  je *anihilátor* posloupnosti  $p$ , pokud

$$R^\Sigma p \equiv 0.$$

Podle této terminologie je  $P^\Sigma$  anihilátorem každého řešení homogenní rovnice (2.41).

Nechť existuje anihilátor  $Q^\Sigma = \sum_{i=0}^l \beta_i \cdot \sigma^i$  posloupnosti  $b$ , která je na pravé straně nehomogenní rovnice (2.45). To znamená, že  $b$  je řešením nějaké lineární homogenní rovnice s konstantními koeficienty, takže podle Důsledku 2 je posloupnost  $b$  lineární kombinací výrazů  $\kappa^t$ ,  $t^m \kappa^t$ ,  $\cos t\psi$ ,  $\sin t\psi$ ,  $t^n \cos t\psi$ ,  $t^n \sin t\psi$ ,  $t^m \kappa^t \cos t\psi$ ,  $t^m \kappa^t \sin t\psi$ . Nechť dále  $y$  je řešením nehomogenní rovnice (2.45). Pak platí

$$Q^\Sigma P^\Sigma y \equiv 0. \quad (2.46)$$

To znamená, že řešení nehomogenní lineární rovnice  $k$ -tého řádu je současně řešením lineární rovnice  $(k+l)$ -tého řádu.

Nechť  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ ,  $p \leq k$ , jsou charakteristické kořeny homogenní rovnice

$$P^\Sigma x \equiv 0$$

$b(t)$	tvar řešení
$a^t$	$C_1 a^t$
$t^m$	$C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \dots + C_m t^m$
$t^m a^t$	$a^t (C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \dots + C_m t^m)$
$\sin \psi t, \cos \psi t$	$C_1 \sin \psi t + C_2 \cos \psi t$
$a^t \sin \psi t, a^t \cos \psi t$	$a^t (C_1 \sin \psi t + C_2 \cos \psi t)$
$a^t t^m \sin \psi t, a^t t^m \cos \psi t$	$a^t [(C_0 + C_1 t + \dots + C_m t^m) \sin \psi t + (D_0 + D_1 t + \dots + D_m t^m) \cos \psi t]$

Tabulka 2.1: Tvary řešení nehomogenní rovnice (2.45) pro různé pravé strany  $b$ .

a  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q$ ,  $q \leq l$ , jsou charakteristické kořeny homogenní rovnice

$$Q^\Sigma x \equiv 0.$$

Nyní rozlišíme dva případy.

Případ 1:  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\} \cap \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q\} = \emptyset$ . V tomto případě můžeme psát řešení nehomogenní rovnice podle tabulky 2.1. Takové obecně zapsané řešení dosadíme do rovnice (2.45) a vypočítáme konstanty  $C_j, D_j$ .

Případ 2:  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\} \cap \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q\} \neq \emptyset$ . V tomto případě nejprve najdeme obecné řešení homogenní rovnice (2.46) a vynecháme v něm všechny členy, které se vyskytují v obecném řešení přidružené homogenní rovnice (2.41). Tím dostaneme řešení nehomogenní rovnice (2.45) s neurčitými koeficienty, které určíme dosazením do původní rovnice (2.45).

### Příklad:

Najdeme obecné řešení nehomogenní rovnice druhého řádu

$$x(t+2) - 4x(t+1) + 3x(t) = t^2. \quad (2.47)$$

Charakteristická rovnice přidružené homogenní rovnice

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0,$$

má množina charakteristických kořenů  $\Lambda = \{1, 3\}$ , její obecné řešení je proto posloupnost daná předpisem

$$x(t) = A \cdot 3^t + B.$$

Anihilátor řešení přidružené homogenní rovnice je polynomiální operátor posunu

$$P^\Sigma = \cdot^\sigma - 4 \cdot^\sigma + 3 \text{id}_\mathcal{P}$$

(koeficienty v operátoru  $P^\Sigma$  jsou stejné, jako koeficienty v charakteristickém polynomu).

Pravá strana dané rovnice je řešením lineární homogenní rovnice, která má trojnásobný charakteristický kořen  $\mu = 1$ . Nejjednodušší taková algebraická rovnice je  $(\mu - 1)^3 = 0$ . Posloupnost na pravé straně rovnice (2.47) je tedy řešením lineární homogenní diferenční rovnice

$$x(t+3) - 3x(t+2) + 3x(t+1) - x(t) = 0, \quad (2.48)$$

její anihilátor je

$$Q^\Sigma = (\cdot^\sigma - \text{id}_\mathcal{P})^3 = \cdot^{\sigma^3} - 3 \cdot^{\sigma^2} + 3 \cdot^\sigma - \text{id}_\mathcal{P}.$$



Množina charakteristických kořenů rovnice (2.48) je jednoprvková  $M = \{1\}$ . To znamená, že  $\Lambda \cap M = \{1\} \neq \emptyset$ , tj. nastává Příklad 2.

Posloupnost na levé straně relace (2.46) je v tomto konkrétním případě dána výrazem

$$\begin{aligned} (Q^\Sigma P^\Sigma y)(t) &= Q^\Sigma(y(t+2) - 4y(t+1) + 3y(t)) = \\ &= (y(t+5) - 4y(t+4) + 3y(t+3)) - 3(y(t+4) - 4y(t+3) + 3y(t+2)) + \\ &\quad + 3(y(t+3) - 4y(t+2) + 3y(t+1)) - (y(t+2) - 4y(t+1) + 3y(t)) = \\ &= y(t+5) - 7y(t+4) + 18y(t+3) - 22y(t+2) + 13y(t+1) - 3y(t). \end{aligned}$$

Homogenní rovnice

$$y(t+5) - 7y(t+4) + 18y(t+3) - 22y(t+2) + 13y(t+1) - 3y(t) = 0 \quad (2.49)$$

má charakteristickou rovnici

$$\lambda^5 - 7\lambda^4 + 18\lambda^3 - 22\lambda^2 + 13\lambda - 3 = 0,$$

po úpravě

$$(\lambda - 3)(\lambda - 1)^4 = 0.$$

Tato rovnice má jednoduchý kořen  $\lambda = 3$  a čtyřnásobný kořen  $\lambda = 1$ , obecné řešení homogenní rovnice (2.49) tedy je posloupnost daná předpisem

$$y(t) = A \cdot 3^t + B + Ct + Dt^2 + Et^3. \quad (2.50)$$

Vynecháním členů, které se vyskytují v obecném řešení přidružené homogenní rovnice k rovnici zadané dostaneme řešení nehomogenní rovnice (2.47) ve tvaru s neurčitými koeficienty

$$Ct + Dt^2 + Et^3,$$

které určíme dosazením do dané rovnice:

$$\begin{aligned} C(t+2) + D(t+2)^2 + E(t+2)^3 - 4(C(t+1) + D(t+1)^2 + E(t+1)^3) + 3(Ct + Dt^2 + Et^3) = \\ = -6Et^2 - 4Dt - 2C + 4E = 2t^2. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů dostaneme soustavu lineárních algebraických rovnic

$$\begin{aligned} -6E &= 2 \\ D &= 0 \\ -C + 2E &= 0, \end{aligned}$$

která má řešení  $E = -\frac{1}{3}$ ,  $D = 0$ ,  $C = -\frac{2}{3}$ . Celkem dostáváme obecné řešení rovnice (2.47) ve tvaru

$$x(t) = A \cdot 3^t + B - \frac{2}{3}t - \frac{1}{3}t^3.$$

Ještě poznamenejme, že uvedený postup měl především ilustrovat obecnou teorii. Pro praktické počítání je příliš zdlouhavý; zejména vyjadřování příslušných anihilátorů není pro nalezení výsledků nutné. Bezprostředně lze totiž psát, že řešení nehomogenní rovnice (2.47) je řešením lineární homogenní rovnice pátého řádu, jejíž charakteristická rovnice je tvaru

$$(\lambda - 1)^3 (\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0.$$

Poté napíšeme obecné řešení takové rovnice – což je posloupnost (2.50), dosadíme do rovnice zadané a tak určíme tři z pěti konstant obecného řešení. ■

Stručně lze říci, že „speciální pravá strana rovnice (2.45)“ je taková posloupnost  $b$ , která je řešením nějaké lineární homogenní rovnice. V takovém případě vezmeme všechny charakteristické kořeny rovnice, jejímž řešením posloupnost  $b$  je (ty jsou vidět již z tvaru posloupnosti  $b$  podle Důsledků 1–3 Věty 4), a všechny charakteristické kořeny lineární homogenní rovnice přidružené k rovnici (2.45); kořeny bereme včetně násobností. Napíšeme obecné řešení homogenní rovnice odpovídající všem těmto charakteristickým kořenům, dosadíme ho do dané rovnice a určíme všechny konstanty, které určit lze.

### Příklad:

Najdeme obecné řešení rovnice

$$x(t+2) + x(t) = t \cos \frac{1}{2}\pi t.$$

Charakteristická rovnice přidružené homogenní rovnice  $\lambda^2 + 1 = 0$  má komplexně sdružené kořeny  $\lambda_{1,2} = \pm i = \cos \frac{1}{2}\pi \pm i \sin \frac{1}{2}\pi$ . Posloupnost na pravé straně dané rovnice je řešením lineární homogenní rovnice, která má dvojnásobný kořen  $\lambda = i$ ; abychom zůstali v reálném oboru, vezmeme dvojici komplexně sdružených dvojnásobných kořenů  $\lambda = \pm i$ . Máme tedy celkem trojnásobné komplexně sdružené kořeny  $\lambda = \pm i = \cos \frac{1}{2}\pi \pm i \sin \frac{1}{2}\pi$  a obecný tvar řešení

$$x(t) = A \cos \frac{1}{2}\pi t + B \sin \frac{1}{2}\pi t + Ct \cos \frac{1}{2}\pi t + Dt \sin \frac{1}{2}\pi t + Et^2 \cos \frac{1}{2}\pi t + Ft^2 \sin \frac{1}{2}\pi t.$$

Tuto posloupnost dosadíme do dané rovnice. Poněvadž

$$\cos \frac{1}{2}\pi(t+2) = \cos \frac{1}{2}\pi t \cos \pi - \sin \frac{1}{2}\pi t \sin \pi = -\cos \frac{1}{2}\pi t,$$

$$\sin \frac{1}{2}\pi(t+2) = \sin \frac{1}{2}\pi t \cos \pi + \cos \frac{1}{2}\pi t \sin \pi = -\sin \frac{1}{2}\pi t,$$

dostaneme

$$\begin{aligned} x(t+2) + x(t) &= -A \cos \frac{1}{2}\pi t - B \sin \frac{1}{2}\pi t - C(t+2) \cos \frac{1}{2}\pi t - D(t+2) \sin \frac{1}{2}\pi t - \\ &\quad - E(t^2 + 4t + 4) \cos \frac{1}{2}\pi t - F(t^2 + 4t + 4) \sin \frac{1}{2}\pi t + \\ &\quad + A \cos \frac{1}{2}\pi t + B \sin \frac{1}{2}\pi t + Ct \cos \frac{1}{2}\pi t + Dt \sin \frac{1}{2}\pi t + Et^2 \cos \frac{1}{2}\pi t + Ft^2 \sin \frac{1}{2}\pi t = \\ &= -(4Et + 2C + 4E) \cos \frac{1}{2}\pi t - (4Ft + 2D + 4F) \sin \frac{1}{2}\pi t. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů dostáváme  $-4E = 1$ ,  $2C + 4E = 0$ ,  $4F = 0$ ,  $2D + 4F = 0$ , tedy  $C = \frac{1}{2}$ ,  $E = -\frac{1}{4}$ ,  $D = F = 0$  a koeficienty  $A$ ,  $B$  zůstávají neurčené. Obecné řešení dané rovnice je dáno výrazem

$$x(t) = A \cos \frac{1}{2}\pi t + B \sin \frac{1}{2}\pi t + \frac{1}{2}t \cos \frac{1}{2}\pi t - \frac{1}{4}t^2 \cos \frac{1}{2}\pi t = (A + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}t^2) \cos \frac{1}{2}\pi t + B \sin \frac{1}{2}\pi t,$$

kde  $A$ ,  $B$  jsou konstanty. ■

Pro nehomogenní lineární diferenční rovnice tvaru (2.45) s pravou stranou ve tvaru polynomu můžeme zformulovat ještě jednodušší pravidlo pro hledání řešení: Nechť  $m$  je stupeň polynomu na pravé straně rovnice (2.45) a  $n$  je násobnost charakteristického kořene  $\lambda = 1$  přidružené homogenní rovnice (samozřejmě, že může být  $n = 0$ , pokud charakteristická rovnice nemá kořen 1). Pak řešení nehomogenní rovnice je tvaru polynomu stupně  $n + m$ .

### 2.3.5 Cauchyho-Eulerova rovnice

Cauchyho-Eulerova rovnice druhého řádu je tvaru

$$t(t+1)x(t+2) + \alpha_1 tx(t+1) + \alpha_0 x(t) = b(t), \quad (2.51)$$

kde  $\alpha_0 \neq 0$ . Aby se skutečně jednalo o lineární rovnici druhého řádu, uvažujeme ji na oboru  $t > 0$ . Řešení rovnice (2.51) budeme hledat ve tvaru

$$x(t) = \frac{y(t)}{(t-1)!} \quad (2.52)$$

kde  $y$  je zatím neurčená posloupnost. Při této substituci je

$$x(t+1) = \frac{y(t+1)}{t!} = \frac{1}{t} \frac{y(t+1)}{(t-1)!}, \quad x(t+2) = \frac{y(t+2)}{(t+1)!} = \frac{1}{(t+1)t} \frac{y(t+2)}{(t-1)!}.$$

Po dosazení tohoto vyjádření do rovnice (2.51) dostaneme lineární diferenční rovnici

$$y(t+2) + \alpha_1 y(t+1) + \alpha_0 y(t) = (t-1)! b(t)$$

pro neznámou posloupnost  $y$ , což je lineární rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty na levé straně.

**Příklad:** Najdeme obecné řešení rovnice

$$t(t+1)x(t+2) - x(t) = 1.$$

Substituce

$$x(t) = \frac{y(t)}{(t-1)!}$$

ji převádí na rovnici

$$y(t+2) - y(t) = (t-1)!.$$

Charakteristická rovnice  $\lambda^2 - 1 = 0$  má dva reálné různé kořeny  $\lambda_{1,j} = \pm 1$ . Podle Tvzení 5 je partikulární řešení nehomogenní rovnice tvaru

$$y_N(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{t-1} (j-1)! (1 - (-1)^{t-j-1}) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{t-2} j! (1 - (-1)^{t-j}),$$

takže obecné řešení transformované rovnice je

$$y(t) = A + (-1)^t B + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{t-2} j! (1 - (-1)^{t-j}).$$

Zpětnou substitucí dostaneme řešení dané rovnice ve tvaru

$$x(t) = \frac{A + (-1)^t B}{(t-1)!} + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{t-2} \frac{1 - (-1)^{t-j}}{(t-1)(t-2) \cdots (j+1)}.$$

■

S pomocí faktoriálové posloupnosti (viz str. 7) zapíšeme Cauchyho-Eulerovu rovnici druhého řádu v kratším tvaru

$$(t+1)^{(2)}x(t+2) + \alpha_1 t^{(1)}x(t+1) + \alpha_0 x(t) = b(t).$$

Cauchyho-Eulerova rovnice  $k$ -tého řádu je rovnice tvaru

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j (t+j-1)^{(j)} x(t+j) = b(t); \quad (2.53)$$

přítom  $\alpha_k \alpha_0 \neq 0$  a  $t > 0$ . Opět použijeme substituci (2.52). V tomto případě je

$$x(t+j) = \frac{y(t+j)}{(t+j-1)!}$$

a tedy

$$(t+j-1)^{(j)} x(t+j) = \frac{(t+j-1)!}{(t+j-1-j)!} \frac{y(t+j)}{(t+j-1)!} = \frac{y(t+j)}{(t-1)!}.$$

Substituce (2.52) převádí rovnici (2.53) na lineární rovnici  $k$ -tého řádu s konstantními koeficienty na levé straně

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y(t+j) = (t-1)! b(t).$$

## 2.4 Cvičení

V úlohách 1–6 najděte řešení dané rovnice s počáteční podmínkou  $x(0) = 1$ .

- |                         |                                   |                                     |
|-------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $x(t+1) = (t+1)x(t)$ | 3. $x(t+1) = e^{2t}x(t)$          | 5. $x(t+1) = x(t) + e^t$            |
| 2. $x(t+1) = 3^t x(t)$  | 4. $x(t+1) = \frac{1}{2}x(t) + 2$ | 6. $x(t+1) = \frac{t}{t+1}x(t) + 4$ |

- Nechť je na konci každého období do banky ukládána částka \$ 200 a banka platí každé období úrok 0,8%. Jaká je uložená částka po  $n$  obdobích.
- Dluh \$ 12 000 má být amortizována splátkami \$ 380 na konci každého měsíce, plus jedna závěrečná splátka menší. Úrok 12% p.a. je připisován každý měsíc. Určete čas splácení (v měsících) a závěrečnou splátku.
- Úvěr \$ 80 000 má být splacen pravidelnými měsíčními splátkami. Úroková sazba je 10% p.a. Jaká je měsíční splátka, aby byl dluh splacen do 30 měsíců.
- Hypotéka na 30let má úrokovou sazbu 8% p.a. Jste schopni splácet \$ 1 000 měsíčně. Kolik si můžete půjčit?
- Pokud organismus žije, je v jeho tkáních zastoupení radioaktivního uhlíku  $^{14}\text{C}$  stejné jako v atmosféře. Po uhynutí organismu se radioaktivní uhlík rozkládá s poločasem rozpadu 5 700 let. Ve vzorku je  $^{14}\text{C}$  zastoupen ze 70% ve srovnání s atmosférou. Jak je vzorek starý?

12. Slon se dožije průměrně 65 let. Jedna samice má mládě jednou za 4 roky, poměr samců a samic mezi novorozenými slůňaty je 1 : 1. Kolik zvířat je nutné každý rok odstřelit, aby na území, jehož úživnost je několik tisíc slonů žilo trvale 250 slonic a 50 slonů?

V úlohách 13–24 najděte obecné řešení dané rovnice.

13.  $x(t+2) - 16x(t) = 0$

19.  $x(t+2) - x(t+1) - 6x(t) = 5 \cdot 3^t$

14.  $x(t+2) + 16x(t) = 0$

20.  $x(t+2) + x(t+1) - 6x(t) = 5 \cdot 3^t$

15.  $\Delta^3 x(t) = 0$

21.  $x(t+2) + x(t+1) - 12x(t) = t \cdot 2^t$

16.  $(\sigma^2 + 2)^2 x(t) = 0$

22.  $x(t+2) + 4x(t) = 8 \cdot 2^t \cos \frac{1}{2}\pi t$

17.  $(\sigma - 3)^2 (\sigma^2 + 4) x(t) = 0$

23.  $x(t+2) - 5x(t+1) + 6x(t) = t + 1$

18.  $x(t+2) + 8x(t+1) + 12x(t) = e^t$

24.  $x(t+2) - 5x(t+1) + 4x(t) = 4^t - t^2$

25. Najděte řešení počáteční úlohy  $x(t+3) - 7x(t+2) + 16x(t+1) - 12x(t) = 0$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x(1) = 1$ ,  $x(2) = 1$ .

26. Napište lineární diferenční rovnici druhého řádu, jejímž řešením je posloupnost  $\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, 1, 3, 7, 19, 47, \dots$ .

V úlohách 27–30 najděte řešení daného počátečního problému.

27. 
$$\begin{aligned} x(t+1) &= -x(t) + y(t), & x(0) &= 1, & y(0) &= 2. \\ y(t+1) &= 2y(t), \end{aligned}$$

28. 
$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

29. 
$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

30. 
$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \\ \zeta_0 \end{pmatrix}.$$

**Výsledky:**

1.  $t!$

3.  $e^{t(t-1)}$

5.  $1 + \frac{e^t - 1}{e - 1}$

2.  $3^{\frac{t(t-1)}{2}}$

4.  $4 - \frac{3}{2^t}$

6. 
$$x(t) = \begin{cases} c, & t = 0 \\ 2(t+1), & t \geq 1 \end{cases}$$

7. Uložená částka  $x(t)$  v  $t$ -tém období je řešením počáteční úlohy  $x(t+1) = 1,008x(t) + 200$ ,  $x(0) = 0$ , tedy  $x(n) = 25\,000(1,008^n - 1)$ .

8. Dluh  $x(t)$  v  $t$ -ém měsíci je řešením počáteční úlohy  $x(t+1) = \sqrt[12]{1,12}x(t) - 380$ ,  $x(0) = 12\,000$ . Závěrečná splátka  $x(37) = 268,99$ .
9. Nesplacený úvěr  $x(t)$  v  $t$ -ém měsíci je řešením počáteční úlohy  $x(t+1) = \sqrt[12]{1,1}x(t) - b$ ,  $x(0) = 80\,000$ . Měsíční splátka  $b = 3\,008,9 \doteq 3\,010$ .
10. Nesplacená hypotéka  $x(t)$  v  $t$ -ém měsíci je řešením počáteční úlohy  $x(t+1) = \sqrt[12]{1,08}x(t) - 1\,000$ ,  $x(360) = 0$ . Hypotéka  $x(0) = 136\,283,5$ .
11.  $\frac{5\,700}{\ln 2} \ln \frac{100}{70} \doteq 2933$
12.  $\frac{1425}{52} \doteq 27,4$  samice a  $\frac{1585}{52} \doteq 30,5$  samců, tj. něco mezi 27 a 28 slonicemi a 30 a 31 slony každý rok.
13.  $4^t(A + (-1)^t B)$
14.  $4^t(A \cos \frac{1}{2}\pi t + B \sin \frac{1}{2}\pi t)$
15.  $A + Bt + Ct^2$
16.  $\sqrt{2}^t((A + Bt) \cos \frac{1}{2}\pi t + (C + Dt) \sin \frac{1}{2}\pi t)$
17.  $3^t(A + Bt) + 2^t(C \cos \frac{1}{2}\pi t + D \sin \frac{1}{2}\pi t)$
18.  $(-2)^t(A + 3^t B) + \frac{e^t}{(e+2)(e+6)}$
19.  $3^{t-1}(A + t) + (-2)^t B$
20.  $2^t A + (-3)^t B + \frac{5}{2}3^{t-1}$
21.  $3^t A + (-4)^t B - \frac{1}{6}(t + \frac{5}{3})2^t$
22.  $2^t(A \sin \frac{1}{2}\pi t + (B - t) \cos \frac{1}{2}\pi t)$
23.  $3^t A + 2^t B + \frac{1}{2}t + \frac{5}{4}$
24.  $A + (B + \frac{1}{12}t)4^t + \frac{1}{9}t^3 - \frac{1}{18}t^2 + \frac{7}{54}t$
25.  $(3 + 2t)2^t - 3^{t+1}$
26.  $x(t+2) - x(t+1) - 4x(t) = 0$
27.  $x(t) = \frac{1}{3}(2^{t+1} - (-1)^t)$ ,  $y(t) = 2^{t+1}$
28.  $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 3 - 2^{t+1} \\ 2 - 2^t \\ -2 + 2^{t+1} \end{pmatrix}$
29.  $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} (t+2)2^{t-1} - t \\ 2^t - 1 \end{pmatrix}$
30.  $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \\ \zeta_0 \end{pmatrix} = 4^t \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \\ \zeta_0 \end{pmatrix} + (\eta_0 + 2\zeta_0)t4^{t-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$



## Kapitola 3

# Další explicitně řešitelné rovnice

V prvních třech částech této kapitoly uvedeme některé typy nelineárních diferenčních rovnic, u nichž je známa substituce převádějící je na rovnice lineární. V poslední části ukážeme speciální rovnice, které byly získány volbou goniometrických nebo hyperbolických funkcí na místě transformující funkce. Řešení těchto rovnic bude užitečné pro nalezení explicitního řešení logistické rovnice

$$x(t+1) = rx(t)(1-x(t)). \quad (3.1)$$

pro několik speciálních hodnot parametru  $r$ .

### 3.1 Riccatiho a Bernoulliho rovnice

*Riccatiho diferenční rovnice* je tvaru

$$p(t)x(t+1)x(t) + x(t+1) - (1+q(t))x(t) = r(t), \quad (3.2)$$

kde  $p$  je nenulová regresivní posloupnost. Rovnici můžeme přepsat ve tvaru rekurentní formule

$$x(t+1) = \frac{(1+q(t))x(t) + r(t)}{1+p(t)x(t)} \quad (3.3)$$

nebo explicitní diferenční rovnice prvního typu

$$\Delta x = \frac{-p(t)x^2 + q(t)x + r(t)}{1+p(t)x}.$$

S využitím operátorů posunu a difference můžeme rovnici (3.2) přepsat do tvaru

$$pxx^\sigma + x + \Delta x - (1+q)x = r$$

a z něho vyjádřit diferenci hledané posloupnosti

$$\Delta x = -pxx^\sigma + qx + r.$$

Tato rovnice je diskrétní analogií Riccatiho diferenciální rovnice  $x' = -px^2 + qx + r$ .

Riccatiho diferenční rovnici řešíme pomocí substituce

$$x(t) = \frac{1}{p(t)} \frac{\Delta y(t)}{y(t)} = \frac{y(t+1) - y(t)}{p(t)y(t)}. \quad (3.4)$$



Dosadíme do rekurentní formule (3.3) a postupně upravujeme:

$$\begin{aligned}\frac{y(t+2) - y(t+1)}{p(t+1)y(t+1)} &= \frac{(1+q(t))\frac{y(t+1) - y(t)}{p(t)y(t)} + r(t)}{1 + \frac{y(t+1) - y(t)}{y(t)}} \\ \frac{y(t+2) - y(t+1)}{p(t+1)y(t+1)} &= \frac{(1+q(t))(y(t+1) - y(t)) + r(t)p(t)y(t)}{p(t)y(t+1)} \\ y(t+2) - y(t+1) &= \frac{p(t+1)}{p(t)}(1+q(t))y(t+1) - \frac{p(t+1)}{p(t)}(1+q(t) - r(t)p(t))y(t).\end{aligned}$$

Odtud vidíme, že posloupnost  $y$  je řešením lineární homogenní diferenční rovnice druhého řádu

$$y(t+2) - \left(1 + \frac{p(t+1)}{p(t)}(1+q(t))\right)y(t+1) + \left(\frac{p(t+1)}{p(t)}(1+q(t)) - r(t)p(t+1)\right)y(t) = 0,$$

kterou můžeme také zapsat stručněji pomocí operátorů posunu a diference

$$\Delta^2 y + \left(1 - \frac{p^\sigma}{p}(1+q)\right)\Delta y - p^\sigma r y = 0.$$

**Tvrzení 6.** Riccatiho diferenční rovnice (3.2) pro neznámou posloupnost  $x$  se substitucí (3.4) transformuje na lineární homogenní rovnici druhého řádu pro neznámou posloupnost  $y$ .

**Příklad:**

$$x(t+1) = \frac{2x(t) + 3}{3x(t) + 2}, \quad x(0) = x_0$$

Zavedeme substituci

$$x(t) = \frac{\Delta y(t)}{\frac{3}{2}y(t)} = \frac{2}{3} \frac{y(t+1)}{y(t)} - \frac{2}{3},$$

dosadíme do dané rovnice a postupně ji upravíme

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} \frac{y(t+2)}{y(t+1)} - \frac{2}{3} &= \frac{\frac{4}{3} \frac{y(t+1)}{y(t)} - \frac{4}{3} + 3}{2 \frac{y(t+1)}{y(t)} - 2 + 2}, \\ 4 \frac{y(t+2) - y(t+1)}{y(t+1)} &= \frac{4y(t+1) + 5y(t)}{y(t+1)}.\end{aligned}$$

Daná rovnice se tedy transformuje na lineární homogenní rovnici druhého řádu

$$4y(t+2) - 8y(t+1) - 5y(t) = 0.$$

Její charakteristická rovnice  $4\lambda^2 - 8\lambda - 5 = 0$  má dva reálné různé kořeny

$$\lambda_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 80}}{8} = \begin{cases} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Obecné řešení lineární diferenční rovnice tedy je  $y(t) = A \left(\frac{5}{2}\right)^t + B \left(-\frac{1}{2}\right)^t$ .

Označme  $y_0 = y(0)$ . Pro počáteční hodnoty dále platí  $x_0 = \frac{2}{3} \frac{y(1)}{y(0)} - \frac{2}{3}$ , a z toho vypočítáme  $y(1) = \frac{1}{2}(3x_0 + 2)y_0$ .

Z těchto podmínek dostaneme systém (algebraických) rovnic pro konstanty  $A, B$ ,

$$y_0 = y(0) = A + B, \quad \frac{3x_0 + 2}{2}y_0 = y(1) = \frac{5}{2}A - \frac{1}{2}B,$$

tj.

$$\begin{aligned} A + B &= y_0 \\ 5A - B &= (3x_0 + 2)y_0. \end{aligned}$$

Z něho vypočítáme  $A = \frac{1}{2}y_0(1 + x_0)$ ,  $B = \frac{1}{2}y_0(1 - x_0)$ . Řešení úlohy pro lineární rovnici je

$$y(t) = \frac{y_0}{2^{t+1}} \left( (1 + x_0)5^t + (1 - x_0)(-1)^t \right).$$

Zpětnou substitucí tedy dostaneme řešení zadané úlohy ve tvaru

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{2}{3} \left( \frac{y(t+1)}{y(t)} - 1 \right) = \frac{2}{3} \left( \frac{\frac{1}{2} \frac{(1+x_0)5^{t+1} + (1-x_0)(-1)^{t+1}}{(1+x_0)5^t + (1-x_0)(-1)^t} - 1}{1} \right) = \\ &= \frac{(1+x_0)5^t - (1-x_0)(-1)^t}{(1+x_0)5^t + (1-x_0)(-1)^t} = \frac{1+x_0}{1+x_0 + (1-x_0)\left(-\frac{1}{5}\right)^t} - \frac{1-x_0}{1-x_0 + (1+x_0)(-5)^t}. \end{aligned}$$

■

Pokud  $r \equiv 0$ , tj. na pravé straně rovnice (3.2) je nula, můžeme použít jednodušší substituci. V tomto případě položíme

$$x(t) = \frac{1}{z(t)}, \quad (3.5)$$

dosadíme do rovnice (3.2) a vynásobíme výrazem  $z(t)z(t+1)$ . Dostaneme

$$p(t) + z(t) - (1 + q(t))z(t+1) = 0.$$

Je-li přitom posloupnost  $q$  regresivní, upravíme tuto rovnici na tvar lineární diferenční rovnice prvního řádu

$$z(t+1) = \frac{1}{1+q(t)}z(t) + \frac{p(t)}{1+q(t)} \quad \text{nebo} \quad \Delta z = -\frac{q(t)}{1+q(t)}z + \frac{p(t)}{1+q(t)}.$$

Tato rovnice má podle Tvzení 1 řešení

$$\begin{aligned} z(t) &= z_0 \prod_{i=t_0}^{t-1} \frac{1}{1+q(i)} + \sum_{i=t_0}^{t-1} \frac{p(i)}{1+q(i)} \prod_{j=i+1}^{t-1} \frac{1}{1+q(j)} = \\ &= \left( z_0 + \sum_{i=t_0}^{t-1} p(i) \prod_{j=t_0}^{i-1} (1+q(j)) \right) \prod_{i=t_0}^{t-1} \frac{1}{1+q(i)}, \end{aligned}$$

kde  $z_0 = z(t_0) = x(t_0)^{-1}$ . Platí tedy:

**Tvrzení 7.** Je-li  $r \equiv 0$ , pak má Riccatiho rovnice řešení

$$x(t) = \frac{x_0 \prod_{i=t_0}^{t-1} (1 + q(i))}{1 + x_0 \sum_{i=t_0}^{t-1} p(i) \prod_{j=t_0}^{i-1} (1 + q(j))}.$$

Rovnice (3.2) s  $r \equiv 0$  a s regresivní posloupností  $q$  se v literatuře objevuje v rozmanitých tvarech. Ukážeme některé z nich. Rovnici v takovém případě můžeme přepsat na tvar

$$\frac{p(t)}{1 + q(t)} + \frac{1}{1 + q(t)} \frac{1}{x(t)} - \frac{1}{x(t+1)} = 0$$

a při označení

$$a(t) = \frac{1}{1 + q(t)}, \quad b(t) = \frac{p(t)}{1 + q(t)}$$

dostaneme

$$\frac{1}{x(t+1)} - \frac{1}{x(t)} = (a(t) - 1) \frac{1}{x(t)} + b(t),$$

neboli

$$\Delta \frac{1}{x} = (a(t) - 1) \frac{1}{x} + b(t) \tag{3.6}$$

případně

$$\Delta x^{1-2} = (a(t) - 1)x^{1-2} + b(t). \tag{3.7}$$

S pomocí operátoru posunu můžeme rovnici (3.6) přepsat ve tvaru

$$\frac{1}{x^\sigma} - \frac{1}{x} = (a - 1) \frac{1}{x} + b.$$

Vynásobením výrazem  $xx^\sigma$  dostaneme rovnici ve tvaru

$$x - x^\sigma = (a - 1)x^\sigma + bxx^\sigma.$$

Z ní můžeme vyjádřit

$$\Delta x = (1 - a - bx)x^\sigma = (1 - a) \left( 1 - \frac{b}{1 - a} x \right) x^\sigma$$

nebo

$$x^\sigma = \frac{x}{a + bx}. \tag{3.8}$$

Poslední rovnici vynásobíme jmenovatelem pravé strany a upravíme na tvar

$$x^\sigma = \frac{x}{a} (1 - bx^\sigma),$$

ze kterého dostaneme jiné vyjádření difference hledané posloupnosti

$$\Delta x = x \left( \frac{1}{a} - 1 - \frac{b}{a} x^\sigma \right) = \frac{1 - a}{a} x \left( 1 - \frac{b}{1 - a} x^\sigma \right).$$

Bernoulliova diferenční rovnice je tvaru

$$\Delta x^{1-\alpha} = (a(t) - 1)x^{1-\alpha} + b(t), \quad (3.9)$$

kde  $\alpha \neq 1$  je nějaké reálné číslo. Bernoulliovu diferenční rovnici můžeme také vyjádřit ve tvaru rekurentní formule

$$x(t+1) = (a(t)x(t)^{1-\alpha} + b(t))^{1/(1-\alpha)}.$$

Porovnáním s rovnicí (3.7) vidíme, že Riccatiho rovnice (3.2) s  $r \equiv 0$  je speciálním případem Bernoulliovy rovnice (3.9) s parametrem  $\alpha = 2$ .

Tvar Bernoulliovy rovnice bezprostředně ukazuje, že substituce

$$x(t)^{1-\alpha} = z(t), \quad \text{tj.} \quad x(t) = z(t)^{1/(1-\alpha)} \quad (3.10)$$

transformuje Bernoulliovu diferenční rovnici (3.9) na lineární nehomogenní rovnici prvního řádu

$$\Delta z = (a(t) - 1)z + b(t), \quad \text{tj.} \quad z(t+1) = a(t)z(t) + b(t). \quad (3.11)$$

**Tvrzení 8.** Bernoulliova diferenční rovnice (3.9) pro neznámou posloupnost  $x$  se substitucí (3.10) transformuje na lineární nehomogenní rovnici prvního řádu (3.11) pro neznámou posloupnost  $z$ .

**Příklad:** Bevertonovu-Holtovu rovnici

$$x(t+1) = x(t) \frac{rK}{K + (r-1)x(t)} \quad (3.12)$$

modelující vývoj velikosti populace v prostředí s omezenými zdroji můžeme přepsat ve tvaru

$$x(t+1) = x(t) \frac{r}{1 + \frac{r-1}{K}x(t)}.$$

Jedná se o rovnici (3.8), tj. rovnici, která je současně Riccatiho i Bernoulliova. Můžeme ji tedy vyřešit substitucí (3.5). Tuto substituci nyní odvodíme intuitivně, z úvahy o modelovaném ději.

Budeme hledat řešení nenulové, tj. chceme modelovat nevyhynulou populaci. V tom případě můžeme napsat rovnost převrácených hodnot obou stran rovnice (3.12)

$$\frac{1}{x(t+1)} = \frac{1}{r} \frac{1}{x(t)} + \frac{r-1}{rK}.$$

Nyní pro zjednodušení označíme  $z$  posloupnost převrácených hodnot posloupnosti  $x$ . Podle předchozí rovnosti vidíme, že posloupnost  $z$  splňuje rekurentní formuli

$$z(t+1) = \frac{1}{r}z(t) + \frac{r-1}{rK}.$$

To je lineární rekurentní formule prvního řádu s konstantními koeficienty. Proto podle 2. důsledku Tvrzení 1 můžeme obecný člen posloupnosti  $z$  vyjádřit ve tvaru

$$z(t) = z(t_0) \left(\frac{1}{r}\right)^{t-t_0} + \frac{r-1}{rK} \frac{r^{-(t-t_0)} - 1}{1-r} = \frac{Kz(t_0) + r^{t-t_0} - 1}{Kr^{t-t_0}},$$

přítom  $z(t_0) = 1/x(t_0)$ . Můžeme tedy napsat obecný člen řešení Bevertonovy-Holtovy rovnice s počáteční hodnotou  $x(t_0) = x_0$  jako převrácenou hodnotu posloupnosti  $z$ , tj.

$$x(t) = \frac{K r^{t-t_0} x_0}{K + (r^{t-t_0} - 1) x_0} = \frac{K x_0}{x_0 + (K - x_0) r^{-(t-t_0)}}. \quad (3.13)$$

Snadno ověříme, že touto formulí je skutečně zadáno řešení počáteční úlohy pro Bevertonovu-Holtovu rovnici s počáteční hodnotou  $x(t_0) = x_0$ . Navíc takto zadaná posloupnost je v případě  $x_0 = 0$  konstantní nulová,  $x \equiv 0$ ; vyjadřuje tedy také řešení úlohy s počáteční hodnotou  $x(t_0) = 0$ .

Nyní můžeme snadno vyšetřit kvalitativní vlastnosti řešení Bevertonovy-Holtovy rovnice:

- Pro  $r = 1$  nebo  $x_0 = 0$  je řešení  $x \equiv x_0$ .
- Pokud  $r > 1$ , pak  $\lim_{t \rightarrow \infty} r^{-(t-t_0)} = 0$ , takže pro každou počáteční podmínku  $x_0 \neq 0$  řešení  $x$  splňuje

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K x_0}{x_0 + (K - x_0) r^{-(t-t_0)}} = K.$$

- Pokud  $r \in (0, 1)$ , pak  $\lim_{t \rightarrow \infty} r^{-(t-t_0)} = \infty$ , takže pro každou počáteční podmínku  $x_0 \in \mathbb{R}$  platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K x_0}{x_0 + (K - x_0) r^{-(t-t_0)}} = 0.$$

Tyto výsledky dobře odpovídají ekologické intuici: pokud je vnitřní koeficient růstu  $r$  větší než 1, tj. pokud v neomezeném prostředí má populace porodnost větší než úmrtnost, pak se její velikost ustálí na kapacitě prostředí; pokud je úmrtnost větší než porodnost, populace vymře. ■

## 3.2 Homogenní rovnice

Homogenní diferenční rovnice prvního řádu je rovnice tvaru

$$f\left(t, \frac{x(t+1)}{x(t)}\right) = 0, \quad (3.14)$$

kde  $f$  je funkce, která není konstantní ve druhé proměnné. Povšimněme si, že lineární homogenní rovnici  $x(t+1) = q(t)x(t)$  můžeme přepsat jako

$$\frac{x(t+1)}{x(t)} - q(t) = 0,$$

takže je skutečně speciálním případem rovnice (3.14); slovo „homogenní“ je použito oprávněně.

Substituce

$$y(t) = \frac{x(t+1)}{x(t)} \quad (3.15)$$

převede rovnici (3.14) na rovnici

$$f(t, y(t)) = 0,$$

ze které vyjádříme  $y(t) = g(t)$  a řešení dané rovnice (3.14) hledáme jako řešení lineární homogenní rovnice  $x(t+1) = g(t)x(t)$ .

Pokud hledáme kladná řešení rovnice (3.14), můžeme použít substituce

$$z(t) = \ln x(t),$$

která převádí danou rovnici na implicitní diferenční rovnici

$$f(t, \Delta z(t)) = 0.$$

Homogenní diferenční rovnice  $k$ -tého řádu je rovnice tvaru

$$F\left(t, \frac{x(t+k)}{x(t+k-1)}, \frac{x(t+k-1)}{x(t+k-2)}, \dots, \frac{x(t+1)}{x(t)}\right) = 0,$$

kde  $F$  je funkce, která není konstantní ve druhé a poslední proměnné. Tuto rovnici převede substituce (3.15) na diferenční rovnici  $(k-1)$ -ního řádu druhého typu

$$F(t, y(t+k-1), y(t+k-2), \dots, y(t)) = 0.$$

**Příklad:** Najdeme řešení homogenní rovnice druhého řádu

$$x(t+1) = \frac{x(t-1)x(t)}{x(t-1) + x(t)}.$$

Rovnici vynásobíme jmenovatelem zlomku na pravé straně a vydělíme výrazem  $x(t)x(t-1)$ . Dostaneme

$$\left(1 + \frac{x(t)}{x(t-1)}\right) \frac{x(t+1)}{x(t)} = 1.$$

Substituce (3.15) převede tuto rovnici na tvar

$$(1 + y(t-1))y(t) = 1,$$

který je ekvivalentní s  $(1 + y(t))y(t+1) = 1$ , neboli

$$y(t+1)y(t) + y(t+1) = 1.$$

To je Riccatiho rovnice. Proto zavedeme novou posloupnost  $z$  substitucí

$$y(t) = \frac{z(t+1) - z(t)}{z(t)}.$$

Po dosazení a úpravě dostaneme

$$\frac{z(t+2) - z(t+1)}{z(t+1)} \left( \frac{z(t+1) - z(t)}{z(t)} + 1 \right) = 1,$$

$$z(t+2) - z(t+1) - z(t) = 0,$$

což je lineární homogenní rovnice druhého řádu. ■

**3.2.1 Implicitní rovnice**  $x(t+1)^2 + a(t)x(t+1)x(t) + b(t)x(t)^2 = 0$ 

Tato rovnice má očividně řešení  $x \equiv 0$ . Budeme hledat také řešení nenulová. Rovnici vydělíme výrazem  $x(t)^2$  a tím ji převedeme na tvar rovnice homogenní

$$\left(\frac{x(t+1)}{x(t)}\right)^2 + a(t)\frac{x(t+1)}{x(t)} + b(t) = 0.$$

Pokud posloupnosti  $a, b$  splňují relaci  $a(t)^2 \geq 4b(t)$  pro všechny indexy, položíme

$$p(t) = \frac{1}{2} \left(-a(t) + \sqrt{a(t)^2 - 4b(t)}\right) \quad \text{a} \quad q(t) = \frac{1}{2} \left(-a(t) - \sqrt{a(t)^2 - 4b(t)}\right).$$

a pravou stranu rovnice přepíšeme jako součin dvou výrazů

$$\left(\frac{x(t+1)}{x(t)} - p(t)\right) \left(\frac{x(t+1)}{x(t)} - q(t)\right) = 0.$$

Odtud vidíme, že řešení každé z lineárních homogenních diferenčních rovnic prvního řádu

$$x_1(t+1) = p(t)x_1(t) \quad \text{a} \quad x_2(t+1) = q(t)x_2(t)$$

je také řešením původní rovnice. Tato řešení jsou

$$x(t) = x_0 \prod_{i=t_0}^{t-1} p(i) \quad \text{a} \quad x(t) = x_0 \prod_{i=t_0}^{t-1} q(i).$$

Povšimněme si, že nulové řešení je v tomto vyjádření zahrnuto pro  $x_0 = 0$ . Pokud  $a^2 = 4b$ , pak  $p = q = -\frac{1}{2}a$  a obě řešení splývají,  $x(t) = x_0 \left(-\frac{1}{2}\right)^{t-t_0} \prod_{i=t_0}^{t-1} a(i)$ .

**Tvrzení 9.** Počáteční úloha pro implicitní rovnici tvaru

$$x(t+1)^2 + a(t)x(t+1)x(t) + b(t)x(t)^2 = 0, \quad x(t_0) = x_0$$

má pro  $x_0 \neq 0$  a  $a^2 \neq 4b$  dvě řešení. V opačném případě je jednoznačně řešitelná.

**Příklad:** Najdeme všechna řešení rovnice v implicitním tvaru

$$x(t+1)^2 - 3x(t)x(t+1) + 2x(t)^2 = 0.$$

Rovnici postupně upravíme:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x(t+1)}{x(t)}\right)^2 - 3\frac{x(t+1)}{x(t)} + 2 &= 0, \\ \left(\frac{x(t+1)}{x(t)} - 2\right) \left(\frac{x(t+1)}{x(t)} - 1\right) &= 0. \end{aligned}$$

Dostáváme tak dvě homogenní lineární rovnice  $x(t+1) = 2x(t)$  a  $x(t+1) = x(t)$ . Daná rovnice má tedy dvě řešení, konkrétně

$$x(t) = x_0 2^{t-t_0} \quad \text{a} \quad x(t) = x_0,$$

kde  $x_0 = x(t_0)$ . Tato řešení splývají pro  $x_0 = 0$ . ■

### 3.3 Logaritmicky lineární rovnice

Jedná se o rovnici

$$x(t+k)^{r_k(t)} x(t+k-1)^{r_{k-1}(t)} \dots x(t+1)^{r_1(t)} x(t)^{r_0(t)} = b(t);$$

přičemž  $r_0, r_1, \dots, r_k$  jsou posloupnosti takové, že  $r_0(t) \neq 0 \neq r_k(t)$  pro všechna  $t$  z definičního oboru. Substitucí

$$x(t) = e^{z(t)} \quad (3.16)$$

tj.  $z(t) = \ln x(t)$  převedeme uvažovanou rovnici na tvar

$$e^{r_k(t)z(t+k)+r_{k-1}(t)z(t+k-1)+\dots+r_1(t)z(t+1)+r_0(t)z(t)} = b(t),$$

a dále zlogaritmováním na lineární rovnici  $k$ -tého řádu

$$z(t+k) + \frac{r_{k-1}(t)}{r_k(t)} z(t+k-1) + \dots + \frac{r_1(t)}{r_k(t)} z(t+1) + \frac{r_0(t)}{r_k(t)} z(t) = \frac{\ln b(t)}{r_k(t)}.$$

Povšimněme si, že z transformačního vztahu (3.16) plyne, že řešení původní rovnice musí být kladné. Uvedený postup tedy můžeme použít pouze v případě, že počáteční hodnoty hledané posloupnosti splňují podmínky

$$x(t_0) = x_0 > 0, \quad x(t_0+1) = x_1 > 0. \quad \dots, \quad x(t_0+k-1) = x_{k-1} > 0.$$

**Příklad:**

$$x(t+2) = \left( \frac{x(t+1)}{x(t)} \right)^2.$$

Rovnici prepíšeme ve tvaru

$$x(t+2)x(t+1)^{-2}x(t)^2 = 1$$

a zavedeme substituci  $z(t) = \ln x(t)$ . Dostaneme lineární homogenní rovnici druhého řádu

$$z(t+2) - 2z(t+1) + 2z(t) = 0.$$

Její charakteristická rovnice  $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$  má komplexně sdružené kořeny

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i.$$

Modul a argument charakteristických kořenů jsou

$$|\lambda| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad \arg \lambda = \arctg 1 = \frac{1}{4}\pi.$$

To znamená, že obecné řešení lineární rovnice je

$$z(t) = \sqrt{2}^t \left( A \cos \frac{\pi t}{4} + B \sin \frac{\pi t}{4} \right)$$

a obecné řešení dané rovnice je

$$x(t) = \exp \left\{ \sqrt{2}^t \left( A \cos \frac{\pi t}{4} + B \sin \frac{\pi t}{4} \right) \right\}.$$

■



### 3.4 Rovnice řešitelné speciálními substitucemi

#### 3.4.1 Goniometrické a hyperbolické substituce

Ukážeme několik speciálních rovnic, u kterých lze najít explicitní řešení pomocí goniometrické nebo hyperbolické substituce. U všech těchto rovnic budeme uvažovat také počáteční podmínku

$$x(t_0) = x_0. \quad (3.17)$$

Uvedené rovnice byly získány pomocí známých vztahů pro goniometrické nebo hyperbolické funkce násobného argumentu. Je z nich zřejmé, jak lze odvozovat další explicitně řešitelné rovnice. Navíc téměř libovolnou transformací hledané posloupnosti lze z uvedených rovnic získat další rovnice, které jsou opět explicitně řešitelné. Tuto skutečnost ukážeme na příkladech

**Rovnice**  $x(t+1) = 2x(t)^2 - 1$

Řešení uvažované úlohy je pro libovolné  $t \geq t_0$  určeno jednoznačně, neboť se jedná o rekurentní formuli prvního řádu s počáteční podmínkou. Přitom je na pravé straně rovnosti výraz definovaný pro jakoukoliv hodnotu  $x(t)$ .

Z rovnice a z počáteční podmínky (3.17) plyne, že hodnota řešení  $x(t_0 - 1)$  musí splňovat rovnici  $x_0 = 2[x(t_0 - 1)]^2 - 1$ . Tato algebraická rovnice pro neznámou  $x(t_0 - 1)$  nemá reálné řešení, pokud  $x_0 < -1$ , a má dvě různá reálná řešení, pokud  $x_0 > -1$ . Obecně tedy úloha není jednoznačně řešitelná pro  $t < t_0$ . Proto budeme řešení hledat pouze pro  $t \geq t_0$ .

Pokud počáteční hodnota splňuje nerovnost  $|x_0| \leq 1$ , položíme  $x(t) = \cos y(t)$ . S využitím známých vztahů pro goniometrické funkce

$$(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1 \quad \text{a} \quad \cos 2\alpha = (\cos \alpha)^2 - (\sin \alpha)^2$$

dostaneme

$$\cos y(t+1) = x(t+1) = 2x(t)^2 - 1 = 2(\cos y(t))^2 - 1 = (\cos y(t))^2 - (\sin y(t))^2 = \cos 2y(t).$$

To znamená, že  $y(t+1)$  je řešením goniometrické rovnice

$$\cos y(t+1) = \cos 2y(t),$$

a tedy

$$y(t+1) = \pm 2y(t) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Každá z tohoto spočetného systému lineárních nehomogenních diferenčních rovnic prvního řádu má podle 2. důsledku Tvzení 1 řešení tvaru

$$y(t) = y_0(\pm 2)^{t-t_0} + 2k\pi \frac{(\pm 2)^{t-t_0} - 1}{\pm 2 - 1}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

kde  $y_0 = y(t_0)$ , tj.  $\cos y_0 = x_0$ ,  $y_0 = \arccos x_0$ . Druhý sčítanec na pravé straně rovnosti můžeme upravit na tvar

$$2k\pi \frac{(\pm 2)^{t-t_0} - 1}{\pm 2 - 1} = 2k\pi \sum_{i=0}^{t-t_0-1} (\pm 2)^i.$$

Součet celých čísel je celé číslo a to znamená, že druhý sčítanec je sudým násobkem  $\pi$ , tj.

$$y(t) = y_0(\pm 2)^{t-t_0} + 2l\pi$$

pro nějaké  $l \in \mathbb{Z}$ . Zpětnou substitucí a úpravou s využitím součtového vzorce

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

dostaneme

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(y_0(\pm 2)^{t-t_0} + 2l\pi) = \cos(y_0(\pm 2)^{t-t_0}) \cos 2l\pi - \sin(y_0(\pm 2)^{t-t_0}) \sin 2l\pi = \\ &= \cos((\pm 1)^{t-t_0} 2^{t-t_0} y_0) = \cos(2^{t-t_0} y_0), \end{aligned}$$

neboť cosinus je sudá funkce. Řešení úlohy

$$x(t+1) = 2x(t)^2 - 1, \quad x(t_0) = x_0 \in [-1, 1] \quad (3.18)$$

je tedy tvaru

$$x(t) = \cos(2^{t-t_0} \arccos x_0).$$

Pokud je  $|x_0| > 1$ , položíme  $x(t) = \cosh y(t)$ . S využitím známého vztahu pro hyperbolický cosinus<sup>1</sup>

$$\cosh 2\alpha = 2(\cosh \alpha)^2 - 1$$

dostaneme

$$\cosh y(t+1) = x(t+1) = 2x(t)^2 - 1 = 2(\cosh y(t))^2 - 1 = \cosh 2y(t).$$

Hodnota  $y(t+1)$  je tedy řešením rovnice  $\cosh y(t+1) = \cosh 2y(t)$ . Poněvadž hyperbolický cosinus je sudá funkce, která je ryze monotonní na každém z intervalů  $(-\infty, 0]$  a  $[0, \infty)$ , platí

$$y(t+1) = \pm 2y(t),$$

což jsou dvě rekurentní formule pro geometrickou posloupnost, jedna má kvocient 2, druhá  $-2$ . Posloupnost tedy můžeme vyjádřit ve tvaru

$$y(t) = y_0(\pm 2)^{t-t_0} = (\pm 1)^{t-t_0} 2^{t-t_0} y_0,$$

kde  $y_0 = y(t_0)$ , tj.  $\cosh y_0 = x_0$ ,

$$y_0 = \operatorname{argcosh} x_0 = \ln \left( |x_0| + \sqrt{x_0^2 - 1} \right).$$

Poněvadž hyperbolický cosinus je sudá funkce, dostaneme řešení úlohy s počáteční hodnotou  $x_0 \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$  ve tvaru

$$x(t) = \begin{cases} x_0, & t = t_0, \\ \cosh \left( 2^{t-t_0} \ln \left( |x_0| + \sqrt{x_0^2 - 1} \right) \right), & t > t_0. \end{cases}$$

---

<sup>1</sup>  $\cosh 2\alpha = \frac{1}{2}(e^{2\alpha} + e^{-2\alpha}) = \frac{1}{2}((e^\alpha + e^{-\alpha})^2 - 2) = 2\left(\frac{1}{2}(e^\alpha + e^{-\alpha})\right)^2 - 1 = 2(\cosh \alpha)^2 - 1$

**Příklad:**

$$x(t+1) = 2x(t)(2x(t) - 1), \quad x(0) = \frac{1}{8}$$

Nejprve upravíme pravou stranu rovnice tak, aby byla tvaru  $f(2X^2 - 1)$  pro nějakou funkci  $f$  a nějaký výraz  $X$  závisující na  $x(t)$ ; použijeme doplnění na úplný čtverec:

$$4x(t)^2 - 2x(t) = (2x(t) - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \left( 2(2x(t) - \frac{1}{2})^2 - 1 \right) + \frac{1}{4}.$$

Odtud vidíme, že daná diferenční rovnice je ekvivalentní s rovnicí

$$2x(t+1) - \frac{1}{2} = 2(2x(t) - \frac{1}{2})^2 - 1.$$

Můžeme tedy použít substituci  $y(t) = 2x(t) - \frac{1}{2}$ , která převádí danou úlohu na počáteční úlohu ve tvaru

$$y(t+1) = 2y(t)^2 - 1, \quad y(0) = -\frac{1}{4},$$

která má řešení

$$y(t) = \cos(2^t \arccos(-\frac{1}{4})) = \cos(2^t (\pi - \arccos \frac{1}{4})) = \begin{cases} -\frac{1}{4}, & t = 0 \\ \cos(2^t \arccos \frac{1}{4}), & t > 0. \end{cases}$$

Řešení dané úlohy je tedy pro  $t > 0$  dáno výrazem

$$x(t) = \frac{1}{2} (\cos(2^t \arccos \frac{1}{4}) + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos(2^t \arccos \frac{1}{4}).$$

■

**Rovnice**  $x(t+1) = 2x(t)\sqrt{1 \pm x(t)^2}$

Řešení uvažované úlohy je pro  $t \geq t_0$  určeno jednoznačně, neboť se jedná o rekurentní formuli prvního řádu s počáteční podmínkou a odmocninu považujeme v reálném oboru za jednoznačnou funkci. Řešení ovšem v případě znaménka „-“ pod odmocninou nemusí být definováno pro každé  $t \geq t_0$ ; je-li totiž v takovém případě  $|x(t)| > 1$ , pak není  $x(t+1)$  definováno.

Z rovnice a z počáteční podmínky plyne, že pro hodnotu  $x(t_0 - 1)$  řešení by mělo platit

$$x_0 = 2x(t_0 - 1)\sqrt{1 \pm x(t_0 - 1)^2},$$

nebo po snadné úpravě

$$\pm 4[x(t_0 - 1)]^4 + 4[x(t_0 - 1)]^2 - x_0^2 = 0,$$

takže by mělo platit

$$x(t_0 - 1) = \sqrt{\frac{-4 \pm \sqrt{16 \mp 16x_0^2}}{\pm 8}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{1 \pm x_0^2} \mp 1 \right)};$$

hodnota  $x(t_0 - 1)$  tedy není určena jednoznačně. Z tohoto důvodu má smysl uvažovat řešení pouze pro  $t \geq t_0$ .

Pokud je pod odmocninou na pravé straně rovnice znaménko „+“, tedy pokud je rovnice tvaru

$$x(t+1) = 2x(t)\sqrt{1 + x(t)^2}, \tag{3.19}$$

zavedeme substituci  $x(t) = \sinh y(t)$  a využijeme známých vlastností hyperbolických funkcí

$$\sinh 2\alpha = 2 \sinh \alpha \cosh \alpha, \quad (\cosh \alpha)^2 - (\sinh \alpha)^2 = 1, \quad \cosh \alpha > 0.$$

Pak je

$$\begin{aligned} \sinh y(t+1) = x(t+1) &= 2x(t)\sqrt{1+x(t)^2} = 2 \sinh y(t)\sqrt{1+(\sinh y(t))^2} = \\ &= 2 \sinh y(t) \cosh y(t) = \sinh 2y(t). \end{aligned}$$

Poněvadž hyperbolický sinus je prostá funkce, implicitní diferenciální rovnice

$$\sinh y(t+1) = \sinh y(t)$$

je ekvivalentní s explicitní rovnicí  $y(t+1) = 2y(t)$  a její řešení je tvaru

$$y(t) = 2^{t-t_0} y_0,$$

kde  $y_0 = y(t_0)$ , tj.  $x_0 = \sinh y_0$ ,  $y_0 = \operatorname{argsinh} x_0 = \ln(x_0 + \sqrt{x_0^2 + 1})$ .

Zpětnou substitucí dostaneme řešení úlohy (3.19), (3.17) pro  $t \geq t_0$  ve tvaru

$$x(t) = \sinh(2^{t-t_0} \operatorname{argsinh} x_0) = \frac{1}{2} \left( \left( x_0 + \sqrt{1+x_0^2} \right)^{2^{t-t_0}} - \left( x_0 + \sqrt{1+x_0^2} \right)^{-2^{t-t_0}} \right). \quad (3.20)$$

Rovnice se znaménkem „-“ pod odmocninou na pravé straně, tedy rovnice

$$x(t+1) = 2x(t)\sqrt{1-x(t)^2} \quad (3.21)$$

může mít řešení pouze pro počáteční podmínku  $x_0 \in [-1, 1]$ , pro  $|x| > 0$  není pravá strana rovnice definována. Navíc pro všechny hodnoty řešení musí platit  $|x(t)| \leq 1$ . Pokud je  $x_0 = 0$ , bude řešením úlohy (3.21), (3.17) konstantní posloupnost  $x \equiv 0$ .

Dále si můžeme všimnout, že pro řešení úlohy platí

$$x(t+1)x(t) = 2x(t)^2\sqrt{1-x(t)^2} \geq 0,$$

neboť odmocninu v reálném oboru chápeme jako nezápornou funkci. To znamená, že řešení rovnice nemění znaménko, tj.  $\operatorname{sgn} x(t) = \operatorname{sgn} x_0$  pro všechna  $t \geq t_0$ .

Toto pozorování umožňuje zavést substituci

$$x(t) = |\sin y(t)| \operatorname{sgn} x_0. \quad (3.22)$$

Využijeme známých vlastností goniometrických funkcí

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad (\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1$$

a pro  $x_0 \neq 0$  dostaneme

$$\begin{aligned} |\sin y(t+1)| &= 2|\sin y(t)|\sqrt{1-(\sin y(t))^2} = 2|\sin y(t)| \cdot |\cos y(t)| = \\ &= |2 \sin y(t) \cos y(t)| = |\sin 2y(t)|. \end{aligned}$$

Řešíme tedy goniometrickou rovnici s absolutní hodnotou  $|\sin y(t+1)| = |\sin y(t)|$  pro neznámou  $y(t+1)$ . Řešení této rovnice může být řešením některé ze dvou goniometrických rovnic

$$\sin y(t+1) = \sin 2y(t), \quad \sin y(t+1) = -\sin 2y(t)$$

pro neznámou  $y(t+1)$ . První z těchto rovnic má dvě řešení

$$y(t+1) = 2y(t) + 2k\pi, \quad y(t+1) = -2y(t) + (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

druhá má také dvě řešení

$$y(t+1) = -2y(t) + 2k\pi, \quad y(t+1) = 2y(t) + (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

To znamená, že posloupnost  $y$  splňuje některou z nekonečného systému lineárních rekurentních formulí prvního řádu

$$y(t+1) = \pm 2y(t) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

nebo ekvivalentně lineárních diferenčních rovnic  $\Delta y = (\pm 2 - 1)y + k\pi$ . Podle 2. důsledku Tvzení 1 je řešení těchto rovnic tvaru

$$y(t) = y_0(\pm 2)^{t-t_0} + k\pi \frac{(\pm 2)^{t-t_0} - 1}{\pm 2 - 1} = y_0(\pm 2)^{t-t_0} + k\pi \sum_{i=0}^{t-t_0-1} (\pm 2)^i,$$

kde  $y_0 = y(t_0) = \arcsin x_0$ . Sumu na pravé straně rovnosti lze vyjádřit jako

$$\sum_{i=0}^{t-t_0-1} (\pm 2)^i = \begin{cases} 0, & t = t_0, \\ 1 \pm 2 + 4 \pm \dots + (\pm 2)^{t-t_0-1}, & t > t_0, \end{cases}$$

což znamená, že pro  $t > t_0$  je rovna lichému celému číslu. Proto pro  $t > t_0$  platí

$$y(t) = (\pm 2)^{t-t_0} y_0 + (2l+1)\pi, \quad l \in \mathbb{Z}$$

a tedy také

$$\begin{aligned} x(t) &= |\sin y(t)| \operatorname{sgn} x_0 = \\ &= |\sin((\pm 2)^{t-t_0} y_0) \cos((2l+1)\pi) + \cos((\pm 2)^{t-t_0} y_0) \sin((2l+1)\pi)| \operatorname{sgn} x_0 = \\ &= |-(\mp 1)^{t-t_0} \sin(2^{t-t_0} y_0) + 0| \operatorname{sgn} x_0 = |(\pm 1)^{t-t_0} \sin(2^{t-t_0} y_0)| \operatorname{sgn} x_0 = \\ &= |\sin(2^{t-t_0} \arcsin x_0)| \operatorname{sgn} x_0. \end{aligned}$$

Dostáváme tak výsledek, že řešení počáteční úlohy (3.21), (3.17) s  $x_0 \in [-1, 1]$  je pro  $t \geq t_0$  dáno formulí

$$x(t) = |\sin(2^{t-t_0} \arcsin x_0)| \operatorname{sgn} x_0; \quad (3.23)$$

toto řešení nemění znaménko a pro libovolné  $t \geq t_0$  splňuje nerovnost  $|x(t)| \leq 1$ .

**Příklad:**

$$x(t+1) = \frac{x(t)^2}{4(x(t)+1)}, \quad x(0) = -3$$

Zavedeme substituci  $x(t) = -\frac{1}{y(t)^2}$ . Pak

$$\frac{1}{y(t+1)^2} = -x(t+1) = -\frac{x(t)^2}{4(x(t)+1)} = \frac{-1}{4y(t)^4 \left(-\frac{1}{y(t)^2} + 1\right)} = \frac{1}{4y(t)^2(1-y(t)^2)}.$$

Tedy  $y(t+1)^2 = 4y(t)^2(1-y(t)^2)$ , neboli

$$y(t+1) = 2y(t)\sqrt{1-y(t)^2}.$$

Řešení této rovnice s počáteční podmínkou  $y(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$  je podle předchozího výsledku dáno výrazem  $y(t) = \left| \sin \left( 2^t \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right|$ . Řešení dané úlohy tedy je

$$x(t) = - \left( \frac{1}{\sin \left( 2^t \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3} \right)} \right)^2. \quad \blacksquare$$

**Rovnice**  $x(t+1) = \frac{2x(t)}{1-x(t)^2}$ ,  $x(t+1) = \frac{x(t)^2-1}{2x(t)}$

Opět má smysl řešit počáteční úlohu pouze pro  $t \geq t_0$ .

V případě první rovnice zavedeme substituci  $x(t) = \operatorname{tg} y(t)$  a využijeme vzorec pro tangens dvojnásobného argumentu

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - (\operatorname{tg} \alpha)^2}.$$

Pak je

$$\operatorname{tg} y(t+1) = x(t+1) = \frac{2x(t)}{1-x(t)^2} = \frac{2 \operatorname{tg} y(t)}{1 - (\operatorname{tg} y(t))^2} = \operatorname{tg} 2y(t).$$

Řešíme tedy goniometrickou rovnicí  $\operatorname{tg} y(t+1) = \operatorname{tg} 2y(t)$  pro neznámou  $y(t+1)$ . Dostaneme

$$y(t+1) = 2y(t) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Tato lineární nehomogenní rovnice prvního řádu má řešení

$$y(t) = y_0 2^{t-t_0} + k\pi (2^{t-t_0} - 1),$$

kde  $y_0 = y(0) = \operatorname{arctg} x_0$ . Zpětnou substitucí dostaneme

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{tg} (2^{t-t_0} \operatorname{arctg} x_0 + (2^{t-t_0} - 1)k\pi) = \\ &= \frac{\operatorname{tg} (2^{t-t_0} \operatorname{arctg} x_0) + \operatorname{tg} ((2^{t-t_0} - 1)k\pi)}{1 - \operatorname{tg} (2^{t-t_0} \operatorname{arctg} x_0) \operatorname{tg} ((2^{t-t_0} - 1)k\pi)} = \operatorname{tg} (2^{t-t_0} \operatorname{arctg} x_0). \end{aligned}$$

Řešení počáteční úlohy

$$x(t+1) = \frac{2x(t)}{1-x(t)^2}, \quad x(t_0) = x_0$$

je dáno výrazem

$$x(t) = \operatorname{tg} \left( 2^{t-t_0} \operatorname{arctg} x_0 \right).$$

Druhou rovnici řešíme analogicky, použijeme substituci  $x(t) = \operatorname{cotg} y(t)$ .

**Příklad:**

$$x(t+1) = 2 \frac{x(t) - 1}{x(t)(2 - x(t))} + 1, \quad x(0) = \frac{1}{2}.$$

Rovnici postupně upravujeme

$$\begin{aligned} 1 - x(t+1) &= 2 \frac{1 - x(t)}{x(t)(2 - x(t))}, \\ 1 - x(t+1) &= 2 \frac{1 - x(t)}{\left(1 - (1 - x(t))\right) \left(1 + (1 - x(t))\right)}, \\ 1 - x(t+1) &= 2 \frac{1 - x(t)}{1 - (1 - x(t))^2}. \end{aligned}$$

Tento zápis rovnice ukazuje, že substituce  $y(t) = 1 - x(t)$  rovnici transformuje na uvažovaný tvar. Řešení úlohy je tedy dáno relací

$$1 - x(t) = \operatorname{tg} \left( 2^t \operatorname{arctg}(1 - x_0) \right) = \operatorname{tg} \left( 2^{t-1} \frac{\pi}{3} \right),$$

neboť  $1 - x_0 = \frac{1}{2}$ ,  $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\pi$ . Řešení dané úlohy tedy je

$$x(t) = 1 - \operatorname{tg} \left( \frac{2^{t-1}}{3} \pi \right). \quad \blacksquare$$

### 3.4.2 Logistická rovnice

*Logistická diferenční rovnice* je rovnice tvaru

$$x(t+1) = ax(t)(1 - x(t)), \quad \text{nebo} \quad \Delta x = x(a - 1 - ax),$$

kde  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ .

Rekurentní vztah pro hledanou posloupnost  $x$  ukazuje, že logistická rovnice s počáteční podmínkou  $x(t_0) = x_0$  má jednoznačné řešení pro  $t \geq t_0$ . Z rekurentního vztahu však obecně nelze jednoznačně vyjádřit hodnotu  $x(t)$  v závislosti na  $x(t+1)$ . Z rovnice

$$ax(t)^2 - ax(t) + x(t+1) = 0$$

totiž vychází

$$x(t) = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4x(t+1)}{a}} \right).$$

Odtud plyne, že logistická rovnice s počáteční podmínkou  $x(t_0) = x_0$  má reálné řešení pro nějaké indexy  $t < t_0$  pouze v případě, že  $x_0 \leq \frac{1}{4}a$ . Toto řešení však obecně není vyjádřeno jednoznačně. Jedinou výjimkou je případ  $a = 2$ ,  $x_0 = \frac{1}{2}$ ; pak je konstantní posloupnost  $x \equiv \frac{1}{2}$

jednoznačným řešením počáteční úlohy definovaným na celé množině  $\mathbb{Z}$ . V případě  $x_0 = \frac{1}{4}a$ ,  $a \neq 2$  totiž dostaneme  $x(t_0 - 1) = \frac{1}{2} \neq x_0$  a hodnota  $x(t_0 - 2)$  již není určena jednoznačně.

Z vyjádření difference hledané posloupnosti  $x$  bezprostředně plyne, že konstantní posloupnosti

$$x \equiv 0 \quad \text{a} \quad x \equiv 1 - \frac{1}{a} \quad (3.24)$$

jsou řešeními logistické rovnice definovanými na celé množině  $\mathbb{Z}$ . Tyto posloupnosti ovšem obecně nelze považovat za řešení logistické rovnice s počáteční hodnotou  $x_0 = 0$  nebo  $x_0 = 1 - 1/a$ .

Počáteční úlohu pro logistickou rovnici vyřešíme pouze ve třech speciálních případech.

**Případ  $a = 2$ :** Budeme řešit počáteční úlohu

$$x(t+1) = 2x(t)(1-x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (3.25)$$

která je ekvivalentní s úlohou

$$\Delta x = x(1-2x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Nejprve zavedeme substituci

$$y(t) = 1 - 2x(t), \quad \text{tj.} \quad x(t) = \frac{1}{2}(1 - y(t)). \quad (3.26)$$

Po dosazení a úpravách postupně dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1 - y(t+1)) &= (1 - y(t)) \left(1 - \frac{1}{2}(1 - y(t))\right) \\ \frac{1}{2}(1 - y(t+1)) &= \frac{1}{2}(1 - y(t)^2) \\ y(t+1) &= y(t)^2 \\ y(t+1)y(t)^{-2} &= 1. \end{aligned}$$

To je logaritmicky lineární rovnice. Jejím logaritmováním dostaneme

$$\ln y(t+1) - 2 \ln y(t) = 0,$$

což je lineární homogenní rovnice  $z(t+1) = 2z(t)$  pro posloupnost

$$z(t) = \ln y(t). \quad (3.27)$$

To znamená, že  $z(t) = z_0 2^{t-t_0}$ , kde  $z_0 = \ln y(t_0) = \ln(1 - 2x_0)$ . Odtud dostaneme

$$y(t) = e^{z(t)} = \exp(2^{t-t_0} \ln(1 - 2x_0)) = (1 - 2x_0)^{2^{t-t_0}}.$$

Zpětnou substitucí dostaneme řešení úlohy ve tvaru

$$x(t) = \frac{1}{2} \left(1 - (1 - 2x_0)^{2^{t-t_0}}\right). \quad (3.28)$$



Při řešení úlohy jsme mlčky předpokládali, že výraz  $\ln(1 - 2x_0)$  je definován, tedy že  $x_0 < \frac{1}{2}$ . Výraz na pravé straně rovnosti (3.28) je však definován pro každé  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Platí totiž

$$(1 - 2x_0)^{2^{t-t_0}} = (|1 - 2x_0| \operatorname{sgn}(1 - 2x_0))^{2^{t-t_0}} = \begin{cases} 1 - 2x_0, & t = t_0, \\ \exp(2^{t-t_0} \ln |1 - 2x_0|), & t \neq t_0. \end{cases}$$

Přímým výpočtem se můžeme přesvědčit, že rovností (3.28) je skutečně definováno řešení úlohy (3.25) pro libovolnou počáteční hodnotu.

Postup hledání tvaru (3.28) řešení počáteční úlohy (3.25) pomocí substitucí (3.26) a (3.27) můžeme popsat ve zhuštěné formě: substitucí

$$1 - 2x(t) = \exp z(t)$$

najdeme řešení úlohy (3.25) ve tvaru

$$1 - 2x(t) = \exp(2^{t-t_0} \ln(1 - 2x_0)).$$

*Kvalitativní vlastnosti řešení úlohy (3.25).* Pro  $x_0 \in (0, 1)$  je  $|1 - 2x_0| < 1$ , takže řešení úlohy s takovými počátečními hodnotami splňuje

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - 2x_0)^{2^{t-t_0}} = \frac{1}{2}.$$

Pro  $x_0 \in \{0, 1\}$  a  $t > t_0$  je  $(1 - 2x_0)^{2^{t-t_0}} = 1$ , neboť číslo  $2^{t-t_0}$  je sudé. Proto řešení úlohy (3.25) s počáteční podmínkou  $x_0 \in \{0, 1\}$  splňuje rovnost  $x(t) = 0$  pro každé  $t > t_0$ .

Pro  $x_0 > 1$  nebo  $x_0 < 0$  je  $|1 - 2x_0| > 1$  a proto  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = -\infty$ .

Pro  $x_0 = \frac{1}{2}$  je řešení úlohy (3.25) rovno  $x \equiv \frac{1}{2}$  v souladu s (3.24). Toto řešení je definováno na celé množině  $\mathbb{Z}$ , jak již bylo předesláno.

**Příklad  $a = 4$ :** Nejprve budeme hledat nezáporné řešení počáteční úlohy

$$x(t+1) = 4x(t)(1 - x(t)), \quad x(t_0) = x_0. \quad (3.29)$$

To znamená, že budeme předpokládat, že  $x_0 \in [0, 1]$  a zavedeme substituci

$$x(t) = y(t)^2, \quad \text{tj. } y(t) = \sqrt{x(t)}. \quad (3.30)$$

Po dosazení do rekurentní formule v (3.29) dostaneme

$$y(t+1)^2 = 4y(t)^2(1 - y(t)^2) = \left(2y(t)\sqrt{1 - y(t)^2}\right)^2,$$

tedy

$$y(t+1) = 2y(t)\sqrt{1 - y(t)^2}.$$

Počáteční podmínka bude  $y(t_0) = \sqrt{x_0} \geq 0$ . Jedná se tedy o rovnici tvaru (3.21) s nezápornou počáteční hodnotou, kterou řešíme substitucí

$$y(t) = |\sin z(t)|. \quad (3.31)$$

Podle (3.23) dostaneme řešení ve tvaru

$$y(t) = |\sin(2^{t-t_0} \arcsin\sqrt{x_0})|.$$

Zpětnou substitucí dostaneme řešení  $x(t) = y(t)^2$  úlohy (3.29) vyjádřené formulí

$$x(t) = [\sin(2^{t-t_0} \arcsin\sqrt{x_0})]^2. \quad (3.32)$$

Přímým výpočtem můžeme ověřit, že tato posloupnost je skutečně řešením úlohy (3.29).

Postup hledání řešení tvaru (3.32) počáteční úlohy (3.29) s  $x_0 \in [0, 1]$  pomocí substitucí (3.30) a (3.31) můžeme opět zformulovat ve zhuštěné podobě: Substitucí

$$\sqrt{x(t)} = |\sin z(t)|$$

najdeme řešení úlohy (3.29) s  $x_0 \in [0, 1]$  ve tvaru

$$\sqrt{x(t)} = |\sin(2^{t-t_0} \arcsin\sqrt{x_0})|.$$

*Kvalitativní vlastnosti řešení úlohy (3.29) s  $x_0 \in [0, 1]$ .*

Nejprve ukážeme, že logistická rovnice s parametrem  $a = 4$  má periodická řešení libovolné periody. Buď tedy  $n$  libovolné přirozené číslo a položíme

$$x_0 = \left( \sin \frac{2^{n-1}}{2^n + 1} \pi \right)^2.$$

Dosazením do (3.32) dostaneme

$$\begin{aligned} x(t_0 + n) &= \left[ \sin \left( 2^n \arcsin \sqrt{\left( \sin \frac{2^{n-1}}{2^n + 1} \pi \right)^2} \right) \right]^2 = \left[ \sin \left( 2^n \frac{2^{n-1}}{2^n + 1} \pi \right) \right]^2 = \\ &= \left[ \sin \left( (2^n + 1 - 1) \frac{2^{n-1}}{2^n + 1} \pi \right) \right]^2 = \left[ \sin \left( 2^{n-1} \pi - \frac{2^{n-1}}{2^n + 1} \pi \right) \right]^2 = \left( -\sin \frac{2^{n-1}}{2^n + 1} \pi \right)^2 = x_0. \end{aligned}$$

Pro  $n = 1$  je

$$\left( \sin \frac{2^{n-1}}{2^n + 1} \pi \right)^2 = \left( \sin \frac{1}{3} \pi \right)^2 = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{3}{4}$$

v souladu s (3.24).

V případě rovnice (3.25) libovolné řešení s počáteční hodnotou  $x_0 \in (0, 1)$  konvergovalo ke konstantnímu nenulovému řešení. Rovnice (3.29) tuto vlastnost nemá, periodická řešení samozřejmě nekonvergují. Ovšem existují taková řešení, která ke  $\frac{3}{4}$  konvergují. Uvažme řešení s počáteční hodnotou

$$x_0 = \left( \sin \frac{1}{3 \cdot 2^n} \pi \right)^2$$

a buď  $k \in \mathbb{N}_0$  libovolné. Pak platí

$$x(t_0 + k) = \left[ \sin \left( 2^k \frac{1}{3 \cdot 2^n} \pi \right) \right]^2 = \begin{cases} \frac{3}{4}, & k \geq n, \\ \left[ \sin \left( \frac{1}{3 \cdot 2^{n-k}} \pi \right) \right]^2 \neq \frac{3}{4}, & k < n. \end{cases}$$

Toto řešení tedy konverguje ke  $\frac{3}{4}$  a to tak, že po  $n$  krocích této hodnoty dosáhne a zůstane konstantní.

Počáteční úloha pro logistickou rovnici s parametrem  $a = 4$  má také řešení, které je nenulové pouze pro konečně mnoho indexů, tj. řešení, které „po konečně mnoha krocích vymizí“. Buď opět  $n \in \mathbb{N}$  libovolné číslo a položme

$$x_0 = \left( \sin \frac{\pi}{2^n} \right)^2.$$

Pro libovolné  $k \in \mathbb{N}_0$  platí

$$x(t_0 + k) = \left[ \sin \left( 2^k \frac{\pi}{2^n} \right) \right]^2 = \left[ \sin \left( 2^{k-n} \pi \right) \right]^2.$$

To znamená, že  $x(t_0 + k) = 0$  pro  $k \geq 0$  a  $x(t_0 + k) > 0$  pro  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ .

Nyní hledejme řešení úlohy (3.29) s počáteční hodnotou  $x_0$  splňující nerovnost  $x_0 > 1$  nebo  $x_0 < 0$ , tj.  $|x_0 - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}$ .

Nejprve si všimněme, že pro  $x_0 > 1$  je  $x(t_0 + 1) = 4x_0(1 - x_0) < 0$ . Dále pro  $x(t) < 0$  je také

$$x(t+1) = 4x(t)(1 - x(t)) = -4|x(t)|(1 + |x(t)|) < 0,$$

což znamená, že pokud v nějakém  $t_1$  je řešení úlohy (3.29) záporné, pak je záporné pro každé  $t \geq t_1$ . Celkem tak dostáváme, že pro počáteční hodnotu  $x_0$  splňující nerovnost  $|x_0 - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}$ , řešení úlohy (3.29) splňuje nerovnost  $x(t) < 0$  pro všechna  $t \geq t_0 + 1$ . Budeme tedy řešit úlohu

$$x(t+1) = 4x(t)(1 - x(t)), \quad x(t_0 + 1) = x_1 < 0. \quad (3.33)$$

Poněvadž řešení této úlohy je záporné, můžeme použít substituci

$$x(t) = -y(t)^2, \quad \text{tj.} \quad |y(t)| = \sqrt{-x(t)}. \quad (3.34)$$

Dosazením do rovnice v (3.33) dostaneme

$$y(t+1)^2 = -x(t+1) = -4x(t)(1 - x(t)) = 4y(t)^2(1 + y(t)^2),$$

neboli

$$|y(t+1)|^2 = 2|y(t)|\sqrt{1 + |y(t)|^2}.$$

To je diferenciální rovnice tvaru (3.19) pro posloupnost  $|y|$ . Příslušná počáteční podmínka je  $|y(t_0 + 1)| = \sqrt{-x_1}$ . Tuto úlohu řešíme substitucí  $|y(t)| = \sinh z(t)$  a podle (3.20) dostaneme její řešení ve tvaru

$$|y(t)| = \sinh \left( 2^{t-t_0-1} \operatorname{argsinh} |y(t_0 + 1)| \right) = \sinh \left( 2^{t-t_0-1} \operatorname{argsinh} \sqrt{-x_1} \right).$$

Zpětnou substitucí (3.34) napíšeme řešení úlohy (3.33) ve tvaru

$$x(t) = - \left[ \sinh \left( 2^{t-t_0-1} \operatorname{argsinh} \sqrt{-x_1} \right) \right]^2. \quad (3.35)$$

Tento výsledek můžeme ještě upravit. Nejprve využijeme skutečnosti, že  $-x_1 = 4x_0(x_0 - 1)$  a proto

$$\begin{aligned} \operatorname{argsinh} \sqrt{-x_1} &= \operatorname{argsinh} \sqrt{4x_0^2 - 4x_0} = \ln \left( \sqrt{4x_0^2 - 4x_0} + \sqrt{4x_0^2 - 4x_0 + 1} \right) = \\ &= \ln \left( \sqrt{(2x_0 - 1)^2 - 1} + \sqrt{(2x_0 - 1)^2} \right) = \ln \left( |1 - 2x_0| + \sqrt{(2x_0 - 1)^2 - 1} \right) = \\ &= \operatorname{argcosh} |1 - 2x_0|; \end{aligned}$$

dále využijeme vzorec pro hyperbolický sinus polovičního argumentu

$$\left(\sinh \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\cosh \alpha - 1}{2}$$

a po dosazení dostaneme

$$x(t) = -\frac{1}{2} \left( \cosh \left( 2^{t-t_0} \operatorname{argcosh} |1 - 2x_0| \right) - 1 \right).$$

Odtud vyjádříme

$$1 - 2x(t) = \cosh \left( 2^{t-t_0} \operatorname{argcosh} |1 - 2x_0| \right). \quad (3.36)$$

Řešení úlohy (3.29) s počáteční hodnotou  $x_0$ , splňující nerovnost  $|x_0 - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}$  jsme pro  $t > t_0$  dostali v implicitním tvaru (3.36). Již snadno ověříme, že rovností

$$|1 - 2x(t)| = \cosh \left( 2^{t-t_0} \operatorname{argcosh} |1 - 2x_0| \right) \quad (3.37)$$

je dáno řešení úlohy (3.29) s počáteční hodnotou splňující  $|x_0 - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}$  pro každé  $t \geq t_0$ .

Přímým výpočtem můžeme také ukázat, že substitucí

$$|1 - 2x(t)| = \cosh z(t)$$

dostaneme řešení úlohy (3.29) s počáteční hodnotou  $x_0$  splňující nerovnost  $|x_0 - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}$  ve tvaru (3.37).

*Kvalitativní vlastnosti řešení úlohy (3.29) s počáteční hodnotou  $x_0$  splňující nerovnost  $|x_0 - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}$ . Z vyjádření řešení ve tvaru (3.35) vidíme, že pro libovolné řešení  $x$  úlohy platí*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} = -\infty$$

a posloupnost  $x$  je ryze klesající.

**Případ  $a = -2$ :** Budeme řešit počáteční úlohu

$$x(t+1) = -2x(t)(1-x(t)), \quad x(t_0) = x_0. \quad (3.38)$$

Nejprve zavedeme substituci

$$y(t) = x(t) - \frac{1}{2}, \quad \text{tj. } x(t) = y(t) + \frac{1}{2}. \quad (3.39)$$

Po dosazení dostaneme

$$\begin{aligned} y(t+1) &= x(t+1) - \frac{1}{2} = -2x(t)(1-x(t)) - \frac{1}{2} = -2\left(y(t) + \frac{1}{2}\right)\left(1 - y(t) - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \\ &= -2\left(y(t) + \frac{1}{2}\right)\left(-y(t) + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 2\left(y(t)^2 - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} = 2y(t)^2 - 1. \end{aligned}$$

Posloupnost  $y$  je tedy řešením počáteční úlohy

$$y(t+1) = 2y(t)^2 - 1, \quad y(t_0) = x_0 - \frac{1}{2}.$$

To je první z rovnic řešitelná goniometrickou nebo hyperbolickou substitucí, viz 3.4.1. Řešení rovnice hledáme pro různé počáteční hodnoty různými substitucemi.

Nechť nejprve  $y(t_0) = x_0 - \frac{1}{2} \in [-1, 1]$ , tj.  $x_0 \in [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ . Substitucí

$$y(t) = \cos z(t) \quad (3.40)$$

dostaneme řešení ve tvaru  $y(t) = \cos(2^{t-t_0} \arccos y_0)$ . Zpětnou substitucí dostaneme řešení původní úlohy

$$x(t) = \frac{1}{2} + \cos(2^{t-t_0} \arccos(x_0 - \frac{1}{2})).$$

Pokud  $|y(t_0)| = |x_0 - \frac{1}{2}| > 1$ , tj.  $x_0 < -\frac{1}{2}$  nebo  $x_0 > \frac{3}{2}$ , použijeme substituci

$$y(t) = \cosh z(t) \quad (3.41)$$

a dostaneme řešení ve tvaru

$$x(t) = \frac{1}{2} + \cosh\left(2^{t-t_0} \ln\left(|x_0 - \frac{1}{2}| + \sqrt{(x_0 - \frac{1}{2})^2 - 1}\right)\right).$$

Řešení logistické rovnice s parametrem  $a = -2$  pomocí substitucí (3.39) a (3.40) nebo (3.41) můžeme opět shrnout:

Řešení úlohy (3.38) s počáteční podmínkou  $x(t_0) = x_0 \in [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$  najdeme substitucí

$$x(t) - \frac{1}{2} = \cos z(t)$$

ve tvaru

$$x(t) - \frac{1}{2} = \cos(2^{t-t_0} \arccos(x_0 - \frac{1}{2}));$$

řešení úlohy (3.38) s počáteční podmínkou  $|x_0 - \frac{1}{2}| > 1$  najdeme substitucí

$$x(t) - \frac{1}{2} = \cosh z(t)$$

ve tvaru

$$x(t) - \frac{1}{2} = \cosh(2^{t-t_0} \operatorname{argcosh}(x_0 - \frac{1}{2})).$$

**„Zobecňující“ poznámka:** Logistickou rovnicí

$$x(t+1) = ax(t)(1-x(t))$$

lze pro některé hodnoty parametru  $a$  a některé počáteční hodnoty  $x_0$  řešit substitucí

$$f(x(t)) = \varphi(z(t)),$$

kterou dostaneme řešení logistické rovnice v implicitním tvaru

$$f(x(t)) = \varphi\left(2^{t-t_0} \varphi^{-1}(f(x_0))\right).$$

Hodnoty parametru  $a$  a počáteční hodnoty  $x_0$ , pro které jsme tímto postupem našli řešení logistické rovnice jsou shrnuty v tabulce 3.1.

parametr	počáteční hodnota	$f(\xi)$	$\varphi(\zeta)$
$a = 2$	$x_0 \in \mathbb{R}$	$1 - 2\xi$	$e^\zeta$
$a = 4$	$x_0 \in [0, 1]$	$\sqrt{\xi}$	$ \sin \zeta $
$a = 4$	$x_0 > 1$ nebo $x_0 < 0$	$ 1 - 2\xi $	$\cosh \zeta$
$a = -2$	$x_0 \in [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$	$\xi - \frac{1}{2}$	$\cos \zeta$
$a = -2$	$x_0 < -\frac{1}{2}$ nebo $x_0 > \frac{3}{2}$	$\xi - \frac{1}{2}$	$\cosh \zeta$

Tabulka 3.1: Hodnoty parametru a počáteční podmínky, pro které je řešení diskrétní logistické rovnice  $x(t+1) = ax(t)(1-x(t))$  s počáteční podmínkou  $x(t_0) = x_0$  implicitně dáno rovností  $f(x(t)) = \varphi\left(2^{t-t_0}\varphi^{-1}(f(x_0))\right)$ .

### 3.5 Cvičení

V úlohách 1–6 najděte obecné řešení rovnice.

1.  $x(t+1)^2 - (2+t)x(t+1)x(t) - 2tx(t)^2 = 0$
2.  $x(t+1)x(t) - x(t+1) + x(t) = 0$
3.  $x(t+1)x(t) - \frac{2}{3}x(t+1) + \frac{1}{6}x(t) = \frac{5}{18}$
4.  $x(t+1) = x(t)^2$
5.  $x(t+1) = 2x(t)\sqrt{1-x(t)^2}$
6.  $x(t+1) = \frac{1}{2}\left(x(t) - \frac{a}{x(t)}\right)$ ,  $a > 0$

V úlohách 7–10 najděte řešení rovnice s počáteční podmínkou  $x(0) = x_0$ .

7.  $x(t+1)^2 - 2x(t+1)x(t) - 3x(t)^2 = 0$
8.  $x(t+1) = 5 - \frac{6}{x(t)}$
9.  $x(t+1) = \frac{x(t)+a}{x(t)+1}$ ,  $a > 0$
10.  $x(t+1) = \frac{2-x(t)^2}{2(1-x(t))}$
11. Řešte počáteční úlohu  $x(t+2) = \frac{x(t+1)^3}{x(t)^2}$ ,  $x(0) = x_0$ ,  $x(1) = x_1$ .

12. Ukažte, že k libovolnému kladnému přirozenému číslu  $n$  existuje hodnota  $x_0 = x_0(n)$  taková, že řešení úlohy

$$x(t+1) = 2x(t)(x(t)-1), \quad x(0) = x_0$$

má periodu  $n$ .

Výsledky:

$$1. 2^t c, x(t_0)(-1)^{t-t_0} \prod_{i=t_0}^{t-1} i,$$

$$4. c^{2^t}$$

$$2. \frac{1}{c-t},$$

$$5. \sin 2^t c$$

$$3. \frac{5-2c(-6)^t}{6(1+c(-6)^t)}, -\frac{1}{3}$$

$$6. \sqrt{a} \operatorname{cotg} 2^t c$$

$$7. x_0 3^t, x_0(-1)^t$$

$$8. \frac{3x_0 - 6}{x_0 - 2 + (x_0 + 3) \left(\frac{2}{3}\right)^t} + \frac{2x_0 + 6}{x_0 + 3 + (x_0 - 2) \left(\frac{3}{2}\right)^t}$$

$$9. \sqrt{a} \frac{(x_0 + \sqrt{a})(1 + \sqrt{a})^t + (x_0 - \sqrt{a})(1 - \sqrt{a})^t}{(x_0 + \sqrt{a})(1 + \sqrt{a})^t - (x_0 - \sqrt{a})(1 - \sqrt{a})^t}$$

$$10. 1 - \operatorname{cotg}(2^t \operatorname{arccotg}(1 - x_0))$$

$$11. x_0 \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^{2^t - 1}$$

$$12. \text{Například } x_0 = \frac{1}{2} + \cos \frac{2\pi}{2^n - 1}$$