HOMOGENNÍ LIN. ROVNICE VYŠŠÍCH ŘÁDŮ

Rovnice vyššího řádu

$$x(t+k) + a_{k-1}x(t+k-1) + \dots + a_0 x(t) = 0$$

$$L(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_0 = 0$$

↳ pro každý reálný kořen λ násobnosti r

$$c_1\lambda^t,\ c_2 t\lambda^t,\ \dots,\ c_r t^{r-1}\lambda^t$$

$$\lambda^t P_{r-1}(t)$$

↳ pro každou dvojici komplexně sdružených kořenů $\lambda = \alpha \pm i\beta = \varrho(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$ násobnosti r

$$c_1\varrho^t\cos\varphi t,\ c_2\varrho^t\sin\varphi t,\ \dots,\ c_{2r-1}t^{r-1}\varrho^t\cos\varphi t,\ c_{2r}t^{r-1}\varrho^t\sin\varphi t$$

$$\varrho^t\cos\varphi t\cdot P_{r-1}(t) + \varrho^t\sin\varphi t\cdot Q_{r-1}(t)$$

Celkové řešení je pak libovolná lin. kombinace dílčích řešení.

$$\max\{|\lambda_i|\} > 1 \Rightarrow |x(t)| \to \infty$$

$$\max\{|\lambda_i|\} < 1 \Rightarrow |x(t)| \to 0$$

Př. 1

$$x(t+2) - 16x(t) = 0$$

$$\lambda^2 - 16 = 0$$

$$\lambda = \pm 4$$

$$x(t) = c_1 4^t + c_2(-4)^t$$

$$|x(t)| \to \infty$$

Př. 2 $\Delta^3 x(t) = 0$

1 1
1 −2 1
1 −3 3 −1

$$x(t+3) - 3x(t+2) + 3x(t+1) - x(t) = 0$$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda-1)^3 \Rightarrow d_1 = d_2 = d_3 = 1$$

$$x(t) = c_1 1^t + c_2 1^t\cdot t + c_3 1^t\cdot t^2$$

$$= P_2(t)$$

Př. 3 $(\sigma^2+2)^2 x(t) = 0$

$$(\sigma^4 + 2\sigma^2 + 4)\,x(t) = 0$$

$$x(t+4) + 2x(t+2) + 4x(t) = 0$$

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 4 = (\lambda^2+2)^2 = 0$$

$$\lambda^2 = -2$$

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{2}i = \sqrt{2}i\sin\tfrac{\pi}{2}$$

$$\lambda_{3,4} = -\sqrt{2}i = -\sqrt{2}i\sin\tfrac{\pi}{2}$$

$$x(t) = 2^{\frac{t}{2}}\cos\tfrac{\pi}{2}t\cdot(c_1+c_2t) + 2^{\frac{t}{2}}\sin\tfrac{\pi}{2}t\,(c_3+c_4t)$$

DÚ: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

Fibonacci:

$$F(t+2) = F(t+1) + F(t);\quad F(0)=1,\ F(1)=1$$

$$F(t) = ?$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{F(t+1)}{F(t)} = \varphi$$

Lucas:

$$L(t+2) = L(t+1) + L(t);\quad L(0)=1,\ L(1)=2$$

$$L(t) = ?$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{L(t+1)}{L(t)} = ?$$