NEHomogenní rovnice vyššího řádu s konst. koef. a speciální pravou stranou

Speciální pravá strana: posloupnost, která je řešením nějaké homogenní rovnice s konst. koef.

struktura řešení: $x_H + x_p$ ← jedno řešení celé rovnice
↑ všechna řešení homogenní části

Návod:
a) Vyřešíme homogenní část → x_H
b) Během toho získali $L(\lambda)$ → char. pol. levé strany
c) Uhodneme $P(\lambda)$ char. polynom, pro nějž je pravá strana řešením přidružené homogenní rovnice
d) Celkový polynom $P(\lambda)\cdot L(\lambda)$ → $x(t) = x_H + x_p$ dopočítáním (určíme koef.)
(zná z a) ↑ ↑ (zná d)

---

př. $x(t+2) - 4x(t+1) + 4x(t) = 2^t$ ← $P(\lambda) = (\lambda - 2)$

$L(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2$

$x_H(t) = (A + Bt)\cdot 2^t$

$L(\lambda)\cdot P(\lambda) = (\lambda-2)^3$

$x(t) = (A + Bt + Ct^2)\cdot 2^t$
↑ přibylo → dopočítat

$x_p(t) = Ct^2\cdot 2^t$

$C\cdot(t+2)^2\cdot 2^{t+2} - 4\cdot C(t+1)^2\cdot 2^{t+1} + 4Ct^2\cdot 2^t = 2^t$

$2^t C\,(4t^2 + 16t + 16 - 8t^2 - 16t - 8 + 4t^2) = 2^t$

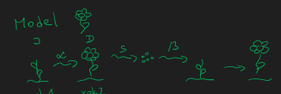
$C(16-8) = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{8}$

$x(t) = \left(A + Bt + \frac{t^2}{8}\right)\cdot 2^t \qquad$ pro $A, B \in \mathbb{R}$

Fibonacciho posloupnost

$F(n+1) = F(n) + F(n-1)$ $\quad F(0)=0,\ F(1)=1$
$F(n+2) - F(n+1) - F(n) = 0$
$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$
$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$
$F(n) = A\cdot\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n$
$F(0) = A + B = 0 \quad \Rightarrow B = -A$
$F(1) = A\cdot\frac{1+\sqrt5}{2} + B\cdot\frac{1-\sqrt5}{2} = 1$
$A\cdot\frac{1+\sqrt5}{2} - A\cdot\frac{1-\sqrt5}{2} = 1$
$A\sqrt5 = 1$
$A = \frac{\sqrt5}{5} \quad B = -\frac{\sqrt5}{5}$
$F(n) = \frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\right)$
$\lim_{n\to\infty}\frac{F(n+1)}{F(n)} = \varphi = \frac{1+\sqrt5}{2}$
$F(n+1) + F(n-1) = F(n) \quad / : F(n)$
$\frac{F(n+1)}{F(n)} + \frac{F(n-1)}{F(n)} = 1 \quad / \lim_{n\to\infty}$
$\varphi + \frac{1}{\varphi} = 1 \quad / \cdot\varphi$
$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$
$\varphi = \frac{1\pm\sqrt5}{2}$

Model



$\alpha, \beta, s > 0$
$\alpha, \beta < 1$

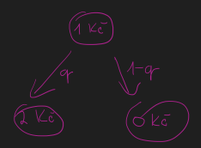
$D(t+1) = \alpha\cdot J(t)$
$J(t+1) = \beta\cdot s\cdot D(t)$

$J(t+2) = \beta\cdot s\, D(t+1)$
$= \underbrace{\alpha\cdot\beta\cdot s}_{\sigma^2}\cdot J(t)$

$J(t+2) = \sigma^2 J(t)$ ← čas $\Delta = 2$
$J(t+2) - \sigma^2 J(t) = 0$
$J(t+1) = \sigma^2\cdot J(t)$ ← pro sudé, pro liché
$\lambda^2 - \sigma^2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+\sigma)(\lambda-\sigma) = 0$ ⇒ exponenciál
$J(t) = A\cdot\sigma^t + B(-\sigma)^t$

potřebuji vědět $J(0) = 0 \quad A + B = 0 \Rightarrow B = -A$
~~$J(0) = 0 = J(1)$~~
$J(1) = 1 \quad \sigma A - \sigma B = 1 \quad B = \frac{1}{2\sigma}$
$\sigma A + \sigma A = 1 \quad A = \frac{1}{2\sigma}$

Gamblerův problém



začíná s K Kč
končí: a) má 0 Kč
b) dosáhl N Kč

- chceme pro $0 \le k \le N$ určit $P(k)$, tj. pravděpodobnost, že gambler zbankrotuje, když má k Kč

$\boxed{P(k) = q\cdot P(k+1) + (1-q)\cdot P(k-1)}$

$q\cdot P(k+2) - P(k+1) + (1-q)\cdot P(k) = 0$
$P(k+2) - \frac{1}{q}P(k+1) + \frac{1-q}{q}\cdot P(k) = 0$
$\lambda^2 - \frac{1}{q}\lambda + \frac{1-q}{q} = 0$

$\boxed{P(0) = 1,\ P(N) = 0}$

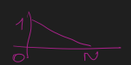
$\lambda = \frac{\frac{1}{q} \pm \sqrt{\frac{1}{q^2} - 4\frac{1-q}{q}}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q} \pm \sqrt{\frac{1-4q+4q^2}{q^2}}\right)$
$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q} \pm \frac{1-2q}{q}\right) = \begin{cases} + & 1 \\ - & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q} - 2\right) = \frac{1}{q} - 1 \end{cases}$

což dalo kořeny $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = \frac{1-q}{q} = Q$
když $Q \neq 1$ tj. $q \neq \frac{1}{2}$

$P(k) = A\cdot 1^k + B\cdot Q^k = A + B\cdot Q^k$
$P(0) = 1 \quad A + B = 1 \quad \Rightarrow A = 1 - B$
$P(N) = 0 \quad A + BQ^N = 0 \quad 1 - B + BQ^N = 0$

$A = 1 - B = \frac{1-Q^N-1}{1-Q^N} = \frac{-Q^N}{1-Q^N}$

$1 = B(1-Q^N) \Rightarrow B = \frac{1}{1-Q^N}$

pro $q = \frac{1}{2}$ $\quad P(k) = (A + Bk)\cdot 1^k = A + Bk$
$P(0) = A = 1$
$P(N) = 1 + BN = 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{N}$

$\Big\} \; P(k) = 1 - \frac{k}{N}$