2

Preto bod x_2 je minimom funkcie $f(x) - p_1(x)$. Z tohto dôvodu platí

$$f'(x_2) - p_1'(x_2) = f'(x_2) - \alpha = 0. \tag{3.14}$$

Zo vzťahu (3.14) plynie $\alpha = f'(x_2)$.

Pretože je $f''(x) > 0$, je funkcia $f'(x) > 0$ rýdzo rastúca a v otvorenom intervale (a,b) neexistujú ďalšie extrémy rozdielu $f(x) - p_1(x)$. Preto zvyšné dva body alternanty tvoria krajné body intervalu $[a,b]$, resp. $x_1 = a$, $x_3 = b$. Pre zjednodušenie položme $x_2 = c$. Platí

$$f(a) - p_1(a) = f(b) - p_1(b) = -(f(c) - p_1(c)). \tag{3.15}$$

Vypočítajme hodnotu koeficientu α polynómu $p_1(x)$. Zo vzťahu (3.15) máme

$$f(a) - p_1(a) = f(a) - \alpha a - \beta = f(b) - \alpha b - \beta = f(a) - p_1(a).$$

jednoduchými úpravami získame hodnotu α ako

$$\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{3.16}$$

Na výpočet konštanty β využijeme rovnicu

$$f(a) - \alpha a - \beta = \alpha \cancel{a} + \beta - f(c).$$

c.

Hodnota β je rovná

$$\beta = \frac{f(a) + f(c)}{2} - \alpha \frac{a + c}{2}.$$

Po dosadení za α zo vzťahu (3.16) dostávame

$$\beta = \frac{f(a) + f(c)}{2} - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \frac{a + c}{2}. \tag{3.17}$$

Celkovo môžeme využitím vzťahov (3.16) a (3.17) polynóm $p_1(x)$ napísať v tvare

$$p_1(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + \frac{f(a) + f(c)}{2} - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \frac{a + c}{2}. \tag{3.18}$$

V predchádzajúcich úvahách sme uviedli, že dvomi bodmi alternanty funkcie $f(x) - p_1(x)$ sú krajné body intervalu. Tretí bod, označený ako c, získame v konkrétnych príkladoch pomocou jednoduchej rovnosti. Zo vzťahu (3.14) a vzťahu (3.16) získavame

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{3.19}$$

Príklad 3.1. Využitím vzťahu (3.18) spočítame polynóm $p_1 \in \Pi_1$ najlepšej aproximácie funkcie $f(x) = x^2$ na intervale $[-1,1]$. Výsledok získaný týmto spôsobom neskôr porovnáme s výsledkami, ktoré vychádzajú z odlišných postupov i úvah vysvetlených v Kapitole 4 a Kapitole 5.

Overme či funkcia $f(x) = x^2$ spĺňa potrebné predpoklady. Derivácia $f'(x) = 2x$ je spojitá funkcia na intervale $[-1,1]$. Druhá derivácia $f''(x) = 2$ je spojitá a kladná na celom