Gâteauxova a Fréchetova derivace

(1)

PŘÍKLAD

$f : R^2 \to R1$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = \Theta \\ \dfrac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{pro } x \neq \Theta \end{cases} \qquad (\Theta = (0,0))$$

f nemá G-derivaci v bodě Θ.

~~f není spojitá v bodě Θ~~

Řešení

Počítejme

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(f(th) - f(\Theta) \right) \quad \text{pro } \forall h \in R^2$$

Předp. $h \neq \Theta$ ($h = \Theta$ lim. ex.), $h = (h_1, h_2)$

$$\frac{f(th) - f(\Theta)}{t} = \frac{h_1 h_2^2}{h_1^2 + t^2 h_2^4}$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to 0} \frac{f(th) - f(\Theta)}{t} = \begin{cases} \dfrac{h_2^2}{h_1} & h_1 \neq \Theta \\ 0 & h_2 \neq \Theta,\ h_1 = \Theta \end{cases}$$

Hledejme matici $A = (a_1, a_2)$ tak, aby rovnost

$$\lim_{t \to 0} \left| \frac{f(th) - f(\Theta)}{t} - a_1 h_1 - a_2 h_2 \right| = 0$$

$\forall h \in R^2$. Pro $h = \Theta$ to platí.