Důkaz věty o geometrické řadě

Definujme $$M_n = \sum_{i=0}^{n} L^i \quad , M_n = \text{lineární operátor}$$

pro $p > 1$ $$M_{n+p} = \sum_{i=0}^{n+p} L^i .$$

Pak $$M_{n+p} - M_n = \sum_{i=n+1}^{n+p} L^i$$

a $$\| M_{n+p} - M_n \| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} \|L\|^i$$

Protože $\|L\| < 1 \Rightarrow \|M_{n+p} - M_n\| \leq \dfrac{\|L\|^{n+1}}{1-\|L\|}$.

Tedy $\sup_{p \geq 1} \| M_{n+p} - M_n \| \to 0$ pro $n \to \infty$.

To znamená, že $\{M_n\}$ je cauchyovská posloupnost v $\mathcal{L}(V)$, $\mathcal{L}(V)$ je Banachův prostor $\Rightarrow$ ex. $M \in \mathcal{L}(V)$:

$$\|M_n - M\| \to 0 \text{ pro } n \to \infty .$$

Dále

$(I - L) M_n = M_n (I - L) = I - L^{n+1}$, I - identický operátor

Pro $n \to \infty$ tedy platí

$$(I - L) M = M (I - L) = I$$

Odtud plyne, že $I - L$ je bijekce a

$$M = (I - L)^{-1} = \lim_{n \to \infty} (I + L + \dots + L^n) = \sum_{i=0}^{n} L^i$$

$$\|M_n\| \leq \sum_{i=0}^{n} \|L\|^i \leq \frac{1}{1 - \|L\|}$$