3 Základní číselné charakteristiky

V předchozí kapitole jsme se seznámili se základními metodami umožňující prvotní náhled na datový soubor, přičemž jsme se v závislosti na typu sledovanéproměnné, která byla buď kategoriální nebo spojitá zabývali různými metodami číselné a grafické vizualizace. Metody představené v kapitole **??** mají jednu společnou vlastnost. Vždy nám poskytují široké množství informací o sledovaném znaku, což nám umožňuje utvořit si globální a ucelený pohled na tento znak. Nevýhodou však může být právě přemíra informací, která se jednak hůře interpretuje a jednak neumožňuje snadné porovnávání znaků z různých datových souborů.

Výše uvedené nedostatky vedly k potřebě zavedení pojmů, které elegantně a jednoduše vystihují základní charakteristické rysy sledovaného znaku. Tyto pojmy se nazývají *číselné charakteristiky* a jejich výhodou je, že sledované vlastnosti znaku dokáží vystihnout pomocí jednoho čísla. Podle vlastnosti, kterou popisují rozlišujeme celkem čtyři základní typy číselných charakteristik: (1) charakteristiky polohy; (2) charakteristiky variability; (3) charakteristiky symetrie; (4) charakteristiky závislosti.

Podoně jako jsme si v sekci **??** představili odlišné výpočetní a grafické metody pro proměnné diskrétního typu a pro proměnné spojitého typu, tak i zde používáme různé číselné charakteristiky pro různé typy proměnných. Celkem rozlišujeme tři základní typy proměných: (a) nominální proměnné; (b) ordinální proměnné; (c) intervalové proměnné.

Nejjednodušší z uvedených typů je nominální proměnná. Jde o proměnnou, která nese informace pouze o nastání některé z variant sledovaného znaku, přičemž stanovené varianty jsou si navzájem rovnocenné. Konkrétním příkladem nominální proměnné je například *pohlaví* (proměnná popisující znak *pohlaví jedince* se dvěma variantami: m – muž; f – žena), *dermatoglyfický vzor* (proměnná popisující znak *dermatoglifický vzor na palci pravé ruky* se třemi variantami: whirl – vír, arc – oblouček, loop – smyčka), *barva vlasů* (proměnná popisující znak *přirozená barva vlasů jedice* se čtyřmi variantami: blond – světlé vlasy; hnědá – hnědé vlasy, černá – černé vlasy; rusá – rusé vlasy), nebo *vzdělání* (proměnná popisující znak *nejvyšší stupeň ukončeného vzdělní* se čtyřmi variantami: ZŠ – základoškolské; SŠ – středoškolské bez maturity; SŠm – středoškolské s marutitou; VŠ – vysokoškolské), apod. U každého objektu (jedince) je potom v proměnné zaznamenán výskyt jedné z vytyčených variant nominálního znaku, přičemž jednotlivé varianty jsou nastaveny tak, aby se navzájem nepřekrývaly a aby byl každý jedinec přiřaditelný právě k jedné z vytyčených variant (například není přípustné, aby měl jedinec závoreň hnědé vlasy a černé vlasy. Vždy musí být zařazen pouze do jedné z kategorií). Zároveň množství variant musí být stanoveno tak, aby každý jedinec do nějaké kategorie spadal (nemá-li sledovaný jedinec přirozenou barvu vlasů odpovídající jedné ze čtyř námi stanovených kategorií, buď jej do studie nezahrneme, nebo vytvoříme pátou kategorii (jiná barva vlasů), do které jedince zahrneme). Nominální znak je znak poskytující nejmenší množství informací. Proto i jeho charakteristiky jsou velmi jednoduché.

Přehled číselných charakteristik používaných v závislosti na typu znaku a vlastnosti, kterou popisují, je uveden v tabulce 1.

Tabulka 1: Přehled číselných charakteristik v závislosti na typu znaku a popisované vlastnosti

	Poloha	**Variabilita**	**Symetrie**	**Závislost**
Nominální	modus	–	–	Cramérův koeficient
Ordinální	medián	mezikvartilové rozpětí	–	Spearmanův korel. koeficient
Intervalová	aritmetický průměr	rozptyl směrodatná odchylka	koeficient šikmosti koeficient špičatosti	Pearsonův korel. koeficient

3.1 Číselné charakteristiky pro nominální proměnné

Nominální proměnná je nejjednodušším typem proměnné. Poskytuje nám nejmenší množství informací, proto i její charakteristiky jsou velmi jednoduché.

Charakteristiky polohy

Charakteristikou polohy nominálního znaku je *modus*. Jedná se o nejčetnejší variantu znaku. Často se uvádí i s absolutní četností výskytu tohoto znaku v datovém souboru.

Charakteristiky variability

Charakteristikami variability nominálního znaku se zde zabývat nebudeme, protože tyto charakteristiky nejsou do praxe příliš užitečné. Typickou charakteristikou variability je například *mutabilita*, o níž si v případě zájmu můžete přečíst v literatuře XXX.

Charakteristiky závislosti

Ze všech charakteristik nominálních znaků jsou nejzajímavější charakteristiky závislosti. Využíváme je, když máme dva znaky nominálního typu X (s počtem variant r) a Y (s počtem variant s) a chceme nějakým způsobem kvantifikovat vztah mezi nimi. Zkoumáme-li dva nominální znaky najednou, je vždy dobré vložit si údaje o četnostech jednotlivých dvojice variant do kontingenční tabulky, analogicky jako v sekci **??** (viz tabulka 2).

Tabulka 2: Kontingenční tabulka absolutních četností

znak X	znak Y				
	$y_{[1]}$	$y_{[2]}$	$\dots$	$y_{[s]}$	$n_{j.}$
$x_{[1]}$	n_{11}	n_{12}	$\dots$	n_{1s}	$n_{1.}$
$x_{[2]}$	n_{21}	n_{22}	$\dots$	n_{2s}	$n_{2.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_{[r]}$	n_{r1}	n_{r2}	$\dots$	n_{rs}	$n_{r.}$
$n_{.k}$	$n_{.1}$	$n_{.2}$	$\dots$	$n_{.s}$	n

Připomeňme, že n_{jk}, $j = 1, \dots, r$, $k = 1, \dots, s$ jsou simultánní absolutní četnosti, $n_{j.}$, $j = 1, \dots, r$, jsou marginální četnosti jednotlivých varinat znaku X a $n_{.k}$, $k = 1, \dots, s$, jsou marginální četnosti jednotlivých varinat znaku Y (viz kapitola **??**). Zde je důležité si uvědomit, že je možné vygenerovat různé kombinace simultánních četností v kontingenční tabulce a přitom zachovat marginální absolutní četnosti beze změny. Pro příklad uveďme dvojici kontingenčních tabulek, které se shodují v marginálních absolutních četnostech, ale liší se v hodnotách simultánních četností (viz tabulka 3).

Tabulka 3: Kontingenční tabulky s odlišnými simultánními absolutními četnostmi při zachování totožných marginálních četností

znak X	znak Y			
	$y_{[1]}$	$y_{[2]}$	$y_{[3]}$	$n_{j.}$
$x_{[1]}$	6	6	6	18
$x_{[2]}$	4	4	4	12
$x_{[2]}$	2	2	2	6
$n_{.k}$	12	12	12	36

znak X	znak Y			
	$y_{[1]}$	$y_{[2]}$	$y_{[3]}$	$n_{j.}$
$x_{[1]}$	12	0	6	18
$x_{[2]}$	0	12	0	12
$x_{[2]}$	0	0	6	6
$n_{.k}$	12	12	12	36

Tabulka umístěná nalevo odpovídá nezávislosti dvou znaků. Všechny dvojice všech možných kombinací variant znaků X a Y jsou vzhledem k získaným marginálním četnostem zastoupeny rovnoměrně, žádná dvojice není nijak upřednostňovaná před jinou. Naopak tabulka umístěná napravo odpovídá závislosti znaků X a Y, neboť některé kombinace variant znaků se (opět vzhledem k získaným marginálním četnostem) v kontingenční tabulce vyskytují častěji než jiné kombinace variant. Analogicky bychom mohli vymyslet spoustu způsobů, jak poskládat simultánní četnosti do tabulky tak, aby marginální četnosti zůstaly zachované.

Cramérův koeficient V

Nejčastěji používanou charakteristikou závislosti mezi dvěma nominálními znaky X a Y je Cramérův koeficient V. Jeho myšlenka je založena na porovnání pozorovaných simultánních četností n_{jk} s teoretickými četnostmi, $\frac{n_{j.}n_{.k}}{n}$, vypočítanými na základě rozložení marginálních četností $n_{j.}$ a $n_{.k}$, $j = 1, \ldots, r$, $k = 1, \ldots, s$. Teoretické četnosti $\frac{n_{j.}n_{.k}}{n}$, $j = 1, \ldots, r$, $k = 1, \ldots, s$, nám ukazují, jak by mělo vypadat ideální rozložení simultánních četností v kontingenční tabulce, pokud by znaky X a Y byly nezávislé (viz tabulka 4).

Tabulka 4: Kontingenční tabulka teoretických četností

znak X	znak Y				
	$y_{[1]}$	$y_{[2]}$	$\cdots$	$y_{[s]}$	$n_{j.}$
$x_{[1]}$	$\frac{n_{1.}n_{.1}}{n}$	$\frac{n_{1.}n_{.2}}{n}$	$\ldots$	$\frac{n_{1.}n_{.s}}{n}$	$n_{1.}$
$x_{[2]}$	$\frac{n_{2.}n_{.1}}{n}$	$\frac{n_{2.}n_{.2}}{n}$	$\ldots$	$\frac{n_{2.}n_{.s}}{n}$	$n_{2.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_{[r]}$	$\frac{n_{r.}n_{.1}}{n}$	$\frac{n_{r.}n_{.2}}{n}$	$\ldots$	$\frac{n_{r.}n_{.s}}{n}$	$n_{r.}$
$n_{.k}$	$n_{.1}$	$n_{.2}$	$\ldots$	$n_{.s}$	n

Porovnáme-li všechny pozorované simultnánní četnosti n_{jk} s příslušnými teoretickými četnostmi $\frac{n_{j.}n_{.k}}{n}$, získáme tzv. Pearsonovo K. Konkrétně,

$$K = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{s} \frac{\left(n_{jk} - \frac{n_{j.}n_{.k}}{n}\right)^2}{\frac{n_{j.}n_{.k}}{n}}. \tag{3.1}$$

Zaměříme-li se blíže na vzorec 3.1, rychle pochopíme, jak Pearsonovo K funguje. Čím více se pozorované simultánní četnosti n_{jk} liší od simultánních teoretických četností $\frac{n_{j.}n_{.k}}{n}$, tím větší jsou rozdíly $n_{jk} - \frac{n_{j.}n_{.k}}{n}$, a tím větší je hodnota Pearsonova K. Naopak, čím více se pozorované simultánní četnosti n_{jk} podobají simultánním teoretickým četnostem $\frac{n_{j.}n_{.k}}{n}$, tím menší jsou rozdíly $n_{jk} - \frac{n_{j.}n_{.k}}{n}$, a tím menší je hodnota Pearsonova K. Pearsonovo K potom obecně nabývá libovolné hodnoty z intervalu $\langle 0\,;\, \infty)$, přičemž čím je hodnota Pearsonova K vyšší, tím je závislost mezi znaky X a Y silnější, a naopak, čím je hodnota Pearsonova K nižší (bližší nule), tím je závislost mezi znaky X a Y slabší. Nevýhodou Pearsonova K je, že není shora omezené. Proto namísto Pearsonova K využíváme k určení míry závislosti mezi dvěma znaky Cramérův koeficient V

$$V = \sqrt{\frac{K}{n(m-1)}}, \tag{3.2}$$

kde K je Pearsonovo K, n je celkový počet pozorování a $m = \min\{r, s\}$, kde r je počet variant znaku X a s je počet variant znaku Y. Cramérův koeficient V nabývá libovolné hodnoty z intervalu $\langle 0\,;\, 1\rangle$, přičemž čím je hodnota Cramérova V vyšší (bližší 1), tím je závislost mezi znaky X a Y silnější, a naopak, čím je hodnota Cramérova V nižší (bližší nule), tím je závislost mezi znaky X a Y slabší. Podle hodnoty Cramérova koeficientu rozlišujeme několik stupňů závislosti mezi dvěma nominálními znaky X a Y. Stupnice míry závislosti je uvedena v tabulce 5.

Podíl šancí a logaritmus podílu šancí

Speciání případ nastává, pokud u každého znaku X i Y sledujeme pouze dvě varianty, tj. $r = s = 2$. Poskládáním pozorovaných četností všech kombinací variant znaků X a Y do tabulky získáme tzv. *čtyřpolní kontingenční tabulku* (viz tabulka 6).

Tabulka 5: Stupnice míry závislosti pro Cramérův koeficient

Cramérův koeficient r_C	**Interpretace**
$\langle 0.0\,;\,0.1)$	Zanedbatelný stupeň závislosti
$\langle 0.1\,;\,0.3)$	Slabý stupeň závislosti
$\langle 0.3\,;\,0.7)$	Střední stupeň závislosti
$\langle 0.7\,;\,1.0\rangle$	Silný stupeň závislosti

Tabulka 6: Čtyřpolní kontingenční tabulka - tvar pro výpočet Cramérova koeficientu

znak X	znak Y		$\sum$
	$y_{[1]}$	y[2]	
$x_{[1]}$	n_{11}	n_{12}	$n_{11}+n_{12}$
$x_{[2]}$	n_{21}	n_{22}	$n_{21}+n_{22}$
$\sum$	$n_{11}+n_{21}$	$n_{12}+n_{22}$	N

Závislost mezi znaky X a Y můžeme opět zhodnotit pomocí Cramérova koeficientu 3.2. Druhou možností je vypočítat tzv. *podíl šancí*. V takovém případě musíme trochu změnit pohled na jednotlivé varianty znaků X a Y. Předně první variantu znaku X budeme nyní chápat jako nějakou okolnost I a druhou variantu znaku X jako okolnost II. Dále libovolnou variantu znaku Y budeme považovat za sledovanou událost. Druhá varianta znaku Y bude potom reprezentovat nenastání sledované události. Podíl šancí bude potom vyjadřovat šanci na výskyt sledované události za okolnosti I ku výskytu sledované události za okolnosti II. Čtyřpolní kontingenční tabulku 6 jednoduše upravíme, aby odpovídala právě popsané situaci (viz tabulka 7).

Tabulka 7: Čtyřpolní kontingenční tabulka - tvar pro výpočet Cramérova koeficientu

Okolnost	Sledovaná událost		$\sum$
	nastala	nenastala	
I	n_{11}	n_{12}	$n_{11}+n_{12}$
II	n_{21}	n_{22}	$n_{21}+n_{22}$
$\sum$	$n_{11}+n_{21}$	$n_{12}+n_{22}$	N

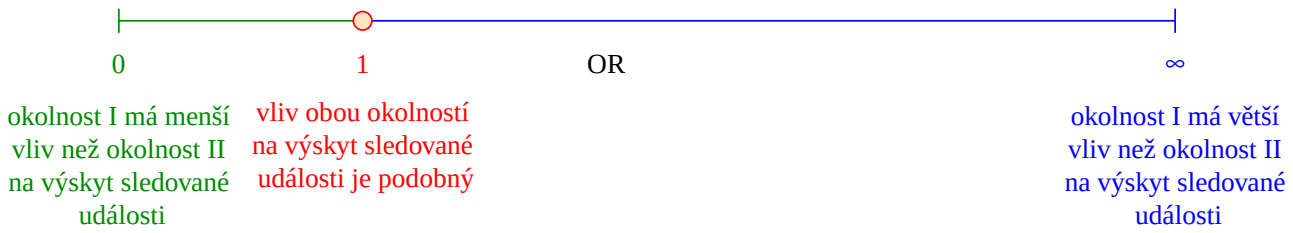
Podíl absolutní četnosti nastání sledované události ku absolutní četnosti nenastání sledované události n_{11}/n_{12} vyjadřuje šanci, že sledovaná událost nastane za okolnosti I. Analogicky podíl absolutní četnosti nastání sledované události ku absolutní četnosti nenastání sledované události n_{21}/n_{22} vyjadřuje šanci, že sledovaná událost nastane za okolnosti II. Konečně,

$$OR = \frac{n_{11}/n_{12}}{n_{21}/n_{22}} = \frac{n_{11}n_{22}}{n_{12}n_{21}} \tag{3.3}$$

popisuje podíl šancí nastání sledované události za okolnosti I ku nastání sledované události za okolnosti II. Výraz OR definovaný vztahem 3.3 se nazývá *podíl šancí*. Protože podíl šancí OR je sestaven pouze z absolutních četností, které jsou vždy kladné nebo nulové (není možné, aby sledovaná událost nastala $-2\times$, apod.), bude se jeho hodnota vždy pohybovat v intervalu od nuly do nekonečna, tj. $OR \in (0\,;\,\infty)$.

Zaměřme si nyní na to, co nám hodnota podílu šancí OR říká o nastání sledované události. Pohybuje-li se hodnota podílu šancí okolo 1, znamená to, že čitatel a jmenovatel nabývají podobné hodnoty, a tedy, že šance, že sledovaná událost nastane za okolnosti I je podobná šanci, že sledovaná událost nastane za okolnosti II. Je-li tedy hodnota podílu šancí OR blízká 1, znamená to, že okolnosti I a II nemají na sledovanou událost významný vliv, protože šance na nastání události za okolnosti I a II si jsou podobné. Naopak, čím více se hodnota podílu šancí OR vzdaluje

od 1 (tj. čím více se OR blíží k nule nebo k nekonečnu), tím více se liší šance na nastání sledované události za okolnosti I a za okolnosti II. Zmíněné poznatky přehledně znázorníme na obrázku 1.



Obrázek 1: Vizualizace podílu šancí OR

Z obrázku 1 je patrná jedna nežádoucí vlastnost podílu šancí OR, a sice asymetrie okolo 1. Z grafu na první pohled vidíme, že oblast vyjadřující větší vliv okolnosti I na výskyt sledované události se realizuje v úzkém intervalu $(0\,;\,1)$. Naopak oblast vyjadřující větší vliv okolnosti II na výskyt sledované události se realizuje v širokém intervalu $(1\,;\,\infty)$. Tuto nežádoucí vlastnost odstraníme aplikováním funkce přirozeného logaritmu $\ln(x)$ na podíl šancí OR.

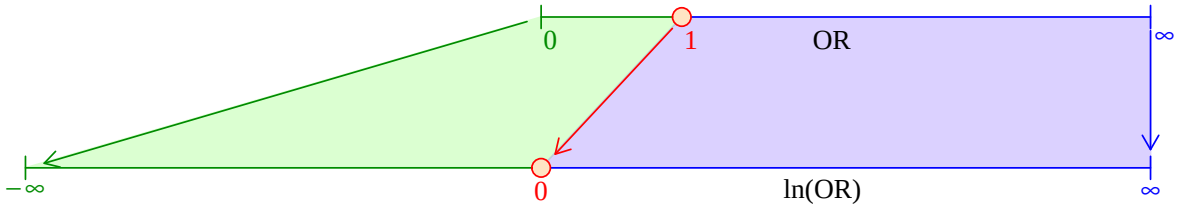
Poznámka: Funkce přirozeného logaritmu $f(x) = \ln(x)$ je funkce proměnné x s definičním oborem $D(f) = (0\,;\,\infty)$ a s oborem hodnot $H(f) = (-\infty\,;\,\infty)$. Jednoduše řečeno je to funkce, která tranformuje hodnoty z intervalu $(0\,;\,\infty)$ do intervalu $(-\infty\,;\,\infty)$ podle následujícího předpisu:

$$\begin{aligned} x \in (0\,;\,1) &\rightarrow f(x) \in (-\infty\,;\,0) \\ x = 1 &\rightarrow f(x) = 0 \\ x = (1\,;\,\infty) &\rightarrow f(x) \in (0\,;\,\infty) \end{aligned}$$

Zmíněným aplikováním funkce přirozeného logaritmu $\ln(x)$ na podíl šancí OR získáváme tzv. *logaritmus podílu šancí* $\ln OR$

$$\ln OR = \ln(OR) = \ln\left(\frac{n_{11}/n_{12}}{n_{21}/n_{22}}\right) = \ln\left(\frac{n_{11}n_{22}}{n_{12}n_{21}}\right) \tag{3.4}$$

Z obrázku 2 je potom patrné, jak jsme pomocí funkce $f(x) = \ln(x)$ převedli podíl šancí OR na logaritmus podílu šancí $\ln OR$, a získali tak statistiku $\ln OR$, která je symetrická okolo nuly.



Obrázek 2: Vizualizace transformace podílu šancí OR na logaritmus podílu šancí $\ln OR$ prostřednictvním funkce přirozeného logaritmu $\ln(x)$

Příklad 3.1. Charakteristika polohy nominálního znaku
Mějme údaje o porodní hmotnosti novorozence kategorizované do tří kategorií (*nízká* – porodní hmotnost $< 2500\,g$; *norma* – porodní hmotnost v rozmezí 2500–4200 g; *vysoká* – porodní hmotnost > 4200 g) a o nejvyšším dosaženém vzdělání matky kategorizovaném do čtyř kategorií (*ZŠ* – základní vzdělání; *SŠ* – středoškolské vzdělání bez maturity; *SŠm* – středoškolské vzdělání s maturitou a *VŠ* – vysokoškolské vzdělání). Údaje vychází z datového souboru 17-anova-newborns.txt (více informací o datovém souboru viz sekce **??**) a týkají se pouze novorozenců s maximálně dvěma staršími sourozenci. Absolutní četnosti všech kombinací variant kategorizované porodní hmotnosti novorozence a nejvyššího dosaženého vzdělání matky jsou uvedeny v tabulce 8 (viz příklad **??**). Vyberte vhodnou charakteristiku polohy (a) pro znak $X =$ *vzdělání matky*; (b) pro znak $Y =$ *porodní hmotnost novorozence*; a stanovte její hodnotu.

Tabulka 8: Simultánní absolutní četnosti znaků *vzdělání matky* a *porodní hmotnost novorozence*

	nízká	norma	vysoká
ZS	75	264	8
SS	79	325	20
SSm	73	341	11
VS	13	63	4

Řešení příkladu 3.1
Kontingenční tabulku simultánních absolutních četností znaků X a Y bychom mohli získat provedením posloupností kroků uvedených příkladech **??**–**??**, tj. načtením datového souboru 17-anova-newborns.txt, odstraněním neznámých hodnot, vyselektováním údajů o novorozencích s maximálně dvěma staršími sourozenci, kategorizací spojité proměnné weight.C a vytvořením tabulky simultánních absolutních četností pro znaky X a Y. My však využijeme znalosti tabulky 8 a kontingenční tabulku simultánních absolutních četností vytvoříme pomocí příkazu data.frame().

```
(data <- data.frame(nizka  = c( 75,  79,  73, 13),
                    norma  = c(264, 325, 341, 63),
                    vysoka = c(  8,  20,  11,  4),
                    row.names = c('ZS', 'SS', 'SSm', 'VS')))
```

```
    nizka norma vysoka
ZS     75   264      8
SS     79   325     20
SSm    73   341     11
VS     13    63      4
```

Zaměřme se nejprve na znak $X =$ *vzdělání matky*. Jde o znak nominálního typu, neboť máme k dispozici pouze informace o absolutních četnostech jednotlivých variant znaku X, přičemž tyto varianty jsou celkem čtyři, tj. $r = 4$: ZŠ, SŠ, SŠm a VŠ. Vhodnou charakteristikou polohy pro proměnnou nominálního typu je *modus*, tj. nejčetnější varianta sledovaného znaku. K získání modu znaku $X =$ *vzdělání matky* musíme zjistit četnost výskytu jednotlivých variant tohoto znaku bez ohledu na porodní hmotnost novorozence. Jinými slovy potřebujeme vypočítat vektor absolutních marginálních četností nj. pro varianty znaku X. Analogicky jako v příkladu **??** použijeme funkci apply() se specifikací argumentů MARGIN = 1 a FUN = sum.

```
(nj. <- apply(data, MARGIN = 1, FUN = sum))
```

```
 ZS  SS SSm  VS
347 424 425  80
```

Interpretace výsledků: Nejčetnější variantou znaku *vzdělání matky* je středoškolské vzdělání s maturitou ($n_{SSm} = 425$). Nejvíce novorozenců v datovém souboru s maximálně dvěma staršími sourozenci se narodilo matkám s dokončeným středoškolským vzděláním s maturitou.

Znak Y je taktéž znakem nominálního typu, neboť máme k dispozici pouze informace o absolutních četnostech jednotlivých variant znaku Y, přičemž tyto varianty jsou celkem tři, tj. $s = 3$: nízká porodní hmotnost, norma a vysoká porodní hmotnost. Vhodnou charakteristikou polohy bude tedy opět *modus*. K získání modu znaku Y musíme zjistit četnost výskytu jednotlivých variant tohoto znaku bez ohledu na vzdělání matky. Jinými slovy

potřebujeme vypočítat vektor absolutních marginálních četností n.k pro varianty znaku Y. Opět použijeme funkci apply() tentokrát se specifikací argumentu MARGIN = 2.

```
(n.k <- apply(data, MARGIN = 2, FUN = sum))
```

```
nizka  norma vysoka
  240    993     43
```

Interpretace výsledků: Nejvíce novorozenců v datovém souboru s maximálně dvěma staršími sourozenci mělo porodní hmotnost v normě ($n_{norma} = 993$).

♣

Příklad 3.2. Charakteristika závislosti mezi dvěma nominálními znaky
Zaměřme se nyní na oba znaky X = *vzdělání matky* a Y = *porodní hmotnost novorozence* najednou. Určete míru závislosti mezi znaky X a Y .

Řešení příkladu 3.2
Protože X a Y jsou znaky nominálního typu, použijeme na určení míry závislosti mezi nimi *Cramérův koeficient*. Tento koeficient nabývá hodnoty z intervalu $\langle 0\,;\,1\rangle$, přičemž vyšší hodnota Cramérova koeficientu ukazuje na těsnější vztah mezi oběma znaky. Stupnice míry závislosti podle hodnoty Cramérova koeficientu je uvedena v tabulce 9.

Tabulka 9: Stupnice míry závislosti pro Cramérův koeficient

Cramérův koeficient r_C	**Interpretace**
$\langle 0.0\,;\,0.1)$	Zanedbatelný stupeň závislosti
$\langle 0.1\,;\,0.3)$	Slabý stupeň závislosti
$\langle 0.3\,;\,0.7)$	Střední stupeň závislosti
$\langle 0.7\,;\,1.0\rangle$	Silný stupeň závislosti

Přesným postupem výpočtu Cramérova koeficientu se budeme zabývat v kapitole **??**. Nyní stanovíme hodnotu Cramérova koeficientu pomocí funkce cramersV(), která je součástí knihovny lsr. Abychom mohli funkci cramersV() použít, musíme knihovnu lsr nainstalovat (RStudio → multifunkční okno → záložka Packages → ikona Install → knihovna: lsr → Install) a načíst. Celou knihovnu lsr je možné načíst příkazem library(lsr). Pro nás je však zbytečné načítat celou knihovnu, proto pomocí operátoru :: pouze zavoláme z knihovny lsr funkci cramersV().

```
lsr::cramersV(data)
```

```
[1] 0.05502639
```

Interpretace výsledků: Cramérovův koeficient nabývá hodnoty 0.0550. Mezi vzděláním matky a porodní hmotností novorozence existuje zanedbatelný stupeň závislosti. ♣

Dataset 3: Zakončení palmárních linií

Ve vzorku, který tvořilo 200 studentů (100 mužů a 100 žen), byly standartní dermatoglyfickou metodikou snímané dermatoglyfy dlaně (Býmová, 1990; soubor 22-multinom-palmar-lines.txt). Na otiscích byla hodnocena zakončení tří hlavních palmárních linií (D, C, a B). Případy byly podle vzoru zakončení (vyústění proximálních radiantů digitálních trirádií na standartně číslovaných polohách okraje dlaně) rozdělené do tří kategorií. Současně byla hodnocena barva vlasů podle standartní Fischer-Sallerové stupnice 30 odstínů (Martin a Saller, 1957–1966, s. 391), které byly rozděleny do tří skupin. K dispozici máme početnosti jedinců v jednotlivých kategoriích, zvlášť pro muže a pro ženy.

Popis proměnných v datasetu 3:

- sex – pohlaví (m – muž, f – žena);
- palmar.lines – zakončení tří palmárních linií (Hi - vysoké (nejčastější vzorec 11 9 7), Mi - střední (nejčastější vzorec 9 7 5), Lo - nízké (nejčastější vzorec 7 5 5));
- hair.C - barva vlasů (LiH - světlé, MH - střední, DaH - tmavé).

Příklad 3.3. Charakteristika polohy nominálního znaku
Načtete datový soubor 22-multinom-palmar-lines.txt a prohlédněte si jej. Z tabulky vyselektujte pouze údaje týkající se znaků X = *barva vlasů* a Y = *zakončení palmárních linií* u žen. Změňte záhlaví tabulky tak, aby názvy jednotlivých variant znaku X = *barva vlasů* byly: světlé, střední a tmavé; a názvy jednotlivých variant znaku Y = *zakončení palmárních linií* byly: vysoké, střední a nízké. Stanovte vhodnou charakteristiku polohy pro znak X i pro znak Y.

Řešení příkladu 3.3
Datový soubor načteme příkazem read.delim().

```
(data <- read.delim('00-Data//22-multinom-palmar-lines.txt'))
```

```
    m Hi Mi Lo  X   f Hi.1 Mi.1 Lo.1
1 LiH  6  6  4 NA LiH    4    6    6
2  MH 20 15  7 NA  MH   18   10   10
3 DaH 18 12 12 NA DaH   12   22   12
```

Načtená datová tabulka obsahuje celkem 9 sloupců, z nichž první čtyři sloupce tvoří tabulku simultánních absolutních četností výskytu dvojic variant znaků X a Y pro muže, pátý sloupec obsahuje NA hodnoty sloužící jako oddělovače tabulky s údaji pro muže od tabulky s údaji pro ženy a poslední čtyři sloupce tvoří tabulku simultánních absolutních četností výskytu dvojic variant znaků X a Y pro ženy.

Pomocí logického operátoru [ ] vybereme z tabulky data pouze simultánní absolutní četnosti znaků *barva vlasů* a *zakončení palmárních linií* u žen a vložíme je do proměnné data.f. Příkazem row.names() doplníme do tabulky data.f názvy řádků příslušející jednotlivým variantám znaku X = *barva vlasů*. Příkazem names() doplníme do tabulky názvy sloupců příslušející variantám znaku Y = *zakončení palmárních linií*.

```
data.f <- data[, 7:9]
row.names(data.f) <- c('svetle', 'stredni', 'tmave')
names(data.f)     <- c('vysoke', 'stredni', 'nizke')
data.f
```

```
       vysoke stredni nizke
svetle      4       6     6
stredni    18      10    10
tmave      12      22    12
```

Znaky X a Y jsou nominálního typu, proto jako vhodnou charakteristiku polohy zvolíme v obou případech *modus*. K získání modu znaku X musíme zjistit četnost výskytu jednotlivých variant tohoto znaku bez ohledu na typ zakončení palmárních linií. Pomocí funkce apply() se specifikací argumentů MARGIN = 1 a FUN = sum najdeme marginální vektor absolutních četností jednotlivých variant znaku X.

```
(nj. <- apply(data.f, MARGIN = 1, FUN = sum))
```

```
svetle stredni   tmave
    16      38      46
```

Interpretace výsledků: Nejčetnější variantou znaku *barva vlasů* u žen v datovém souboru je tmavá barva ($n_{\text{tmavé}} = 46$). Nejvíce žen v datovém souboru mělo tmavé vlasy.

Analogicky najdeme modus znaku Y = *zakončení palmárních linií*. K získání modu znaku Y u žen musíme zjistit četnost výskytu jednotlivých variant tohoto znaku bez ohledu na barvu vlasů žen. Funkci apply() nyní použijeme se specifikací argumentu MARGIN = 2.

```
(n.k <- apply(data.f, MARGIN = 2, FUN = sum))
```

```
 vysoke stredni    nizke
     34       38       28
```

Interpretace výsledků: Nejvíce žen v datovém souboru mělo střední zakončení palmárních linií ($n_{\text{střední}} = 38$). ♣

Příklad 3.4. Charakteristika závislosti mezi dvěma nominálními znaky
Zaměřme se nyní na oba znaky X = *barva vlasů* a Y = *zakončení palmárních linií* u žen najednou. Určete míru závislosti mezi znaky X a Y.

Řešení příkladu 3.4
Protože X a Y jsou znaky nominálního typu, použijeme na určení míry závislosti mezi nimi *Cramérův koeficient*. Hodnotu Cramérova koeficientu stanovíme pomocí funkce cramersV() z knihovny lsr.

```
lsr::cramersV(data.f)
```

```
[1] 0.1785374
```

Interpretace výsledků: Cramérův koeficient nabývá hodnoty 0.1785. Mezi barvou vlasů a zakončením palmárních linií u žen existuje slabý stupeň závislosti. ♣

3.2 Číselné charakteristiky pro ordinální znaky

Příklad 3.5. Základní číselné charakteristiky pro ordinální znak
Načtěte datový soubor 17-anova-newborns.txt, ze souboru odstraňte neznámé hodnoty a zjistěte dimenzi datové tabulky. Zaměřte se tentokrát na všechny novorozence v datovém souboru a vytvořte tabulku vhodných základních číselných charakteristik pro znak $X =$ *počet starších sourozenců*.

Řešení příkladu 3.5
Nejprve načteme datový soubor (read.delim()), odstraníme neznámé hodnoty (na.omit()) a vypíšeme dimenzi datové tabulky (dim()).

```
39 data <- read.delim('17-anova-newborns.txt')
40 data <- na.omit(data)
41 dim(data)
```

```
[1] 1382    4                                                                    42
```

Po odstranění neznámých hodnot obsahuje datová tabulka údaje o 1382 novorozencích, přičemž u každého novorozence máme záznamy o čtyřech znacích.

Znak $X =$ *počet starších sourozenců* novorozence je příkladem ordinálních dat. Ordinální data můžeme navzájem porovnávat, (nula starších sourozenců je méně než jeden starší sourozenec a to je méně než dva starší sourozenci), ale uvědomujeme si, že rozestupy mezi sousedními variantami nejsou stejné (rozdíl prvorodičkou a druhorodičkou je propastnější než rozdíl mezi druhorodičkou a třetirodičkou). V tabulce základních charakteristik budou obsaženy následující charakteristiky: minimální hodnota, dolní kvartil, medián, horní kvartil, maximální hodnota a mezikvartilové rozpětí.

Výpočet α-kvantilu x_α
Předpokládejme, že α je libovolná hodnota z intervalu $(0; 1)$. Pojmem α-kvantil, nebo také $\alpha \times 100\%$ kvantil, značíme takové číslo x_α, pro které $\alpha \times 100\%$ hodnot z datového soubotu leží nalevo od x_α a $(1-\alpha) \times 100\%$ hodnot leží napravo od x_α. Výpočet α-kvantilu je tedy úzce spjatý s počtem objektů v datovém souboru n. Při výpočtu α-kvantilu mohou nastat dvě situace:

1. $n \times \alpha = c$, kde c je celé číslo. V takovém případě dopočítáme hodnotu kvantilu x_α jako aritmetický průměr c-tého a $(c+1)$-tého čísla v posloupnosti **seřazených** naměřených hodnot, tj.
$$x_\alpha = \frac{x_{(c)} + x_{(c+1)}}{2}, \tag{3.5}$$
2. $n \times \alpha = c$, kde c není celé číslo. V takovém případě zaokrouhlíme c na nejbližší vyšší celé číslo a hodnota kvantilu x_α je rovna c-tému číslu v posloupnosti **seřazených** naměřených hodnot, tj.
$$x_\alpha = x_{(c)}. \tag{3.6}$$

Nejprve se zaměříme na výpočet dolního kvartilu znaku $X =$ *počet starších sourozenců*. Koeficient α je v tomto případě rovný 0.25, počet novorozenců $n = 1382$. Součin $c = n \times \alpha = 1382 \times 0.25 = 345.5$ není celé číslo, proto jej zaokrouhlíme na nejbližší vyšší celé číslo, tj. 346. Dolní kvartil $x_{0.25}$ bude potom odpovídat 346. hodnotě v posloupnosti seřazených naměřených hodnot. Hodnoty ve vektoru prch seřadíme vzestupně pomocí příkazu sort(). V pořadí 346. hodnotu ze seřazeného vektoru prch získáme pomocí operátoru [ ].

```
43 prch <- sort(data$prch)
44 prch[346]
```

```
[1] 0                                                                           45
```

$$x_{0.25} = x_{(346)} = 0. \tag{3.7}$$

V případě výpočtu mediánu $x_{0.50}$ je $\alpha = 0.50$ a počet novorozenců $n = 1382$. Součin $c = n \times \alpha = 1382 \times 0.50 = 691$ je celé číslo, proto hodnotu mediánu stanovíme jako průměr hodnot na 691. a 692. pozici v seřazeném vektoru prch.

```
prch[691]
```

```
[1] 1
```

```
prch[692]
```

```
[1] 1
```

$$x_{0.50} = \frac{x_{(691)} + x_{(692)}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1.$$

Při výpočtu horního kvartilu $x_{0.75}$ je $\alpha = 0.75$ a počet novorozenců $n = 1382$. Součin $c = n \times \alpha = 1382 \times 0.75 = 1036.5$ není celé číslo, proto jej zaokrouhlíme na nejbližší vyšší celé číslo, tj. 1037, a horní kvartil bude odpovídat 1037. hodnotě v posloupnosti seřazených naměřených hodnot.

```
prch[1037]
```

```
[1] 1
```

$$x_{0.75} = x_{(1037)} = 1.$$

Mezikvartilové rozpětí spočítáme odečtením dolního kvartilu od horního kvartilu, tj.

$$IQR = x_{0.75} - x_{0.50} = 1 - 0 = 1.$$

Všechny výše zmíněné charakteristiky můžeme vypočítat také pomocí funkcí implementovaných v softwaru R. Hodnoty kvantilů stanovíme příkazem quantile(). Prvním argumentem příkazu bude vektor seřazených nebo neseřazených údajů o počtu starších sourozenců (prch). Druhým argumentem probs specifikujeme hodnotu α (0.25, 0.50, resp. 0.75). Nakonec specifikací argumentu type = 2 vybereme z devíti možných metod výpočtu, které funkce quantile() poskytuje, metodu odpovídající ručnímu výpočtu. Interkvartilové rozpětí vypočítáme pomocí funkce IQR() opět se specifikací argumentu type = 2. Nakonec stanovíme minimální, resp. maximální počet starších sourozenců u novorozenců v datovém souboru pomocí příkazu min(), resp. max() a všechny hodnoty vložíme do tabulky příkazem data.frame().

```
x0.25 <- quantile(prch, probs = 0.25, type = 2)
x0.50 <- quantile(prch, probs = 0.50, type = 2)
x0.75 <- quantile(prch, probs = 0.75, type = 2)
IQR <- IQR(prch, type = 2)
min <- min(prch)
max <- max(prch)
(Tab <- data.frame(min = min, dolni.kv = x0.25, median = x0.50,
                   horni.kv = x0.75, max = max, IQR = IQR,
                   row.names = 'pocet st. sourozencu'))
```

```
                   min dolni.kv median horni.kv max IQR
pocet st. sourozencu   0        0      1        1   9   1
```

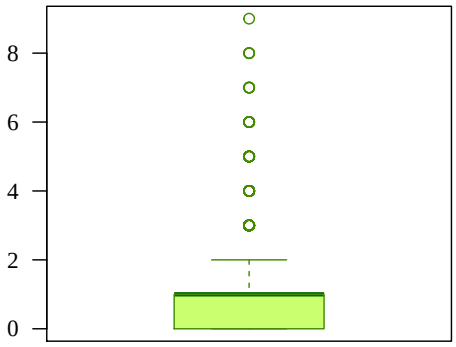
Interpretace výsledků: Počet starších sourozenců u novorozenců v datovém souboru se pohybuje v rozmezí 0–9. Dolní kvartil počtu starších sourozenců nabývá hodnoty 0, tj. 25% novorozenců v datovém souboru nemá více než nula starších sourozenců. Medián počtu starších sourozenců nabývá hodnoty 1, tj. 50% novorozenců v datovém souboru má jednoho staršího sourozence nebo méně. Horní kvartil počtu starších sourozenců nabývá hodnoty 1, tj. 75% novorozenců v datovém souboru má jednoho staršího sourozence nebo méně. Hodnota mezikvartilového rozpětí je rovna jedné. ♣

Příklad 3.6. Krabicový diagram
Sestrojte krabicový diagram pro znak X = *počet starších sourozenců* novorozence. Zaměřte se na vzhled vykresleného grafu a zamyslete se nad polohou mediánu, dolního kvartilu, horního kvartilu a mezikvartilového rozpětí v

krabicovém diagramu.

Řešení příkladu 3.6
Krabicový diagram vykreslíme příkazem boxplot(). Prvním argumentem bude vektor počtu starších sourozenců prch, argumentem type = 2 vybereme k výpočtu kvantilů zobrazených v grafu metodu analogickou ručnímu výpočtu. Dále nastavíme barvu výplně grafu (col), barvu ohraničení grafu (border), barvu mediánu (medcol) v zelených odstínech a vodorovné vykreslení popisků u měřítka osy y (las). Argumentem xlab = ' ' zamezíme vypsání popisku osy x. Ten doplníme do grafu samostatně pomocí příkazu mtext(). Prvním argumentem tohoto příkazu bude text popisku. Argumentem side = 1 specifikujeme umístění popisku pod dolní stranu grafu a argumentem line zvolíme umístění popisku do výšky 1.5.

```
boxplot(prch, type = 2, col = 'darkolivegreen1',
        border = 'chartreuse4', medcol = 'darkgreen',
        las = 1,  xlab = '')
mtext('počet starších sourozenců', side = 1, line = 1.5)
```



počet starších sourozenců

♣

Příklad 3.7. Charakteristika závislosti mezi ordinálními znaky
Zaměřme se nyní na znaky X = *počet starších sourozenců* a Y = *porodní hmotnost novorozence* najednou. Určete míru závislosti mezi znaky X a Y.

Řešení příkladu 3.7
Znak X je ordinálního typu, zatímco znak Y je typickým případem znaku intervalového typu. Vzhledem k tomu, že znaky intervalového typu jsou bohatší na informace než znaky ordinálního typu, můžeme k nim bez jakékoli újmy přistupovat jako k ordinálním znakům. Konkrétně tedy na znak Y budeme v tomto případě nahlížet jako na ordinální znak.

Ke stanovení míry závislosti mezi znaky X a Y použijeme *Spearmanův koeficient pořadové korelace* r_S. Tento koeficient nabývá hodnoty mezi -1 a 1, tj. $r_S \in \langle -1\,;\,1\rangle$, přičemž kladné znaménko koeficientu určuje přímý směr *pořadové závislosti* a záporné znaménko určuje nepřímý směr *pořadové* závislosti. Stupnice těsnosti závislosti mezi dvěma znaky podle hodnoty Spearmanova koeficientu r_S je uvedena v tabulce 10. Detailněji se na výpočet Spearmanova koeficientu pořadové korelace zaměříme v kapitole **??**.
Spearmanův koeficient pořadové korelace r_S vypočítáme pomocí funkce cor() se specifikací argumentu method = 'spearman'. První dva argumenty zadané do funkce budou vektory naměřených hodnot znaků X (prch) a Y (wei).

```
prch <- data$prch.N
wei  <- data$wei
(rS  <- cor(prch, wei, method = 'spearman'))
```

Tabulka 10: Stupnice míry závislosti pro Spearmanův a Pearsonův korelační koeficient

$\lvert r_S\rvert$, **resp.** $\lvert r_{12}\rvert$	**Interpretace**
0.0	Pořadová (resp. lineární) nezávislost
$\langle 0.0\,;\,0.1\rangle$	Velmi nízký stupeň závislosti
$\langle 0.1\,;\,0.3\rangle$	Nízký stupeň závislosti
$\langle 0.3\,;\,0.5\rangle$	Mírný stupeň závislosti
$\langle 0.5\,;\,0.7\rangle$	Význačný stupeň závislosti
$\langle 0.7\,;\,0.9\rangle$	Vysoký stupeň závislosti
$\langle 0.9\,;\,1.0)$	Velmi vysoký stupeň závislosti
1.0	Úplná pořadová (resp. lineární) závislost

```
[1] 0.04761724
```

Interpretace výsledků: Hodnota Spearmanova koeficientu pořadové korelace $r_S = 0.0476$. Mezi počtem starších sourozenců a porodní hmotností novorozence existuje velmi nízký stupeň přímé pořadové závislosti. ♣

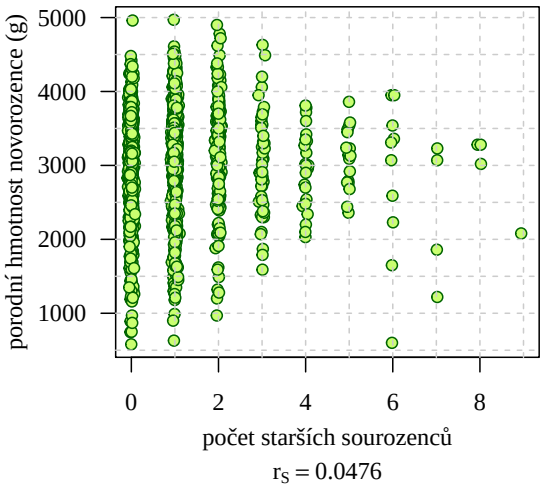
Příklad 3.8. Dvourozměrný tečkový diagram
Pro znaky X = *počet starších sourozenců* a Y = *porodní hmotnost novorozence* vykreslete dvourozměrný tečkový diagram. Pozastavte se nad vzhledem tečkového diagramu a jeho vztahem k hodnotě Spearmanova koeficientu pořadové korelace.

Řešení příkladu 3.8
Dvourozměrný tečkový diagram sestrojíme příkazem dotplot(), který je součástí RSkriptu Sbirka-AS-I-2018-funkce.R. Ten načteme příkazem source(). Vykreslovaným bodům přisoudíme kulatý tvar pch = 21 s tmavě zeleným obvodem (col) a světlezelenou výplní (bg). Pomocí příkazu abline() dokreslíme do grafu horizontální referenční čáry (specifikace argumentu h) a vertikální referenční čáry (specifikace argumentu **v**). Poznamenejme, že v příkazu dotplot() jsme volbou argumentu main = ' ' zakázali vypsání nadpisu a volbou argumentu xlab = ' ' zase vypsání popisku osy x. Popisek osy x doplníme do grafu samostatně příkazem mtext(). Pomocí stejné funkce v kombinaci s funkcí bquote() přidáme do grafu druhý popisek s hodnotu Spearmanova koeficientu pořadové korelace r_S zaokrouhlenou na čtyři desetinná místa. Funkce bquote() zadaná uvnitř příkazu mtext() umožnuje vytvoření specifického popisku. Zápis r[S] vysází písmeno r s indexem S, tj. r_S. Symbol == v příkazu bquote() odpovídá syntaxi symbolu = a vyjádření .(rS) vyčíslí hodnotu uloženou v proměnné rS, tj. 0.0476.

```
source('Sbirka-AS-I-2018-funkce.R')
rS <- round(rS, digits = 4)

dotplot(prch, wei, main = '', xlab = '',
        ylab = 'porodní hmotnost novorozence (g)', pch = 21,
        bg = 'darkolivegreen1', col = 'darkgreen')

abline(h = seq(0, 5000, by = 500), col = 'grey80', lty = 2)
abline(v = seq(1,   10, by =   1), col = 'grey80', lty = 2)
mtext('počet starších sourozenců', side = 1, line = 2.2)
mtext(bquote(r[S] == .(rS)), side = 1, line = 3.5)
```


porodní hmotnost novorozence (g)
5000
4000
3000
2000
1000
0
2
4
6
8
počet starších sourozenců
$r_S = 0.0476$

♣

3.3 Číselné charakteristiky pro intervalové znaky

Příklad 3.9. Základní číselné charakteristiky pro intervalový znak
Načtěte datový soubor 01-one-sample-mean-skull-mf.txt a odstraňte z načtených dat NA hodnoty. Zaměřte se pouze na znak X = *největší šířka mozkovny* pro skelety mužského pohlaví. Vytvořte tabulku základních číselných charakteristik pro znak X.

Řešení příkladu 3.9
Načtení datového souboru provedeme příkazem read.delim(), odstranění NA hodnot příkazem na.omit(). Pomocí podmnožinového operátoru [ ] vybereme z tabulky data pouze údaje o největší šířce mozkovny (skull.B) pro muže. Naměřené hodnoty si příkazem sort() vzestupně seřadíme.

```
82 data <- read.delim('01-one-sample-mean-skull-mf.txt')
83 data <- na.omit(data)
84 skull.BM <- data[data$sex == 'm', 'skull.B']
85 skull.BM <- sort(skull.BM)
86 length(skull.BM)
```

```
[1] 216                                                                    87
```

Po odstranění neznámých hodnot obsahuje datová tabulka údaje o 216 skeletech mužského pohlaví.

Znak X = *největší šířka mozkovny* pro skelety mužského pohlaví je příkladem intervalového typu dat. V tabulce základních číselných charakteristik budou obsaženy následující charakteristiky: aritmetický průměr, rozptyl, směrodatná odchylka, koeficient variace, minimální hodnota, dolní kvartil, medián, horní kvartil, maximální hodnota, mezikvartilové rozpětí, koeficient šikmosti a koeficient špičatosti. Nejprve se podíváme na ruční výpočet každé z těchto číselných charakteristik a následně provedeme kontrolu výsledků pomocí softwaru R.

Aritmetický průmer m vypočítáme pomocí vzorce

$$m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{3.8}$$

kde x_i, $i = 1, \ldots, n$, je i-tá naměřená hodnota a $n = 216$.

$$m = \frac{1}{216}(124 + 127 + \cdots + 149 + 149) = \frac{29\,632}{216} = 137.1852.$$

Rozptyl s^2 vypočítáme pomocí vzorce

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2, \tag{3.9}$$

kde x_i, $i = 1, \ldots, n$, je i-tá naměřená hodnota, $n = 216$ a m je aritmetický průměr.

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{216}\left((124 - 137.1852)^2 + (127 - 137.1852)^2 + \cdots + (149 - 137.1852)^2 + (149 - 137.1852)^2\right) \\ &= \frac{1}{216}\left((-13.1852)^2 + (-10.1852)^2 + \cdots + 11.8148^2 + 11.8148^2\right) \\ &\doteq 23.1694. \end{aligned}$$

Směrodatnou odchylku s vypočítáme jako odmocninu z rozptylu, tj.

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{23.1694} \doteq 4.8135.$$

Koeficient variace v je definovaný jako podíl směrodatné odchylky a aritmetického průměru vynásobený 100%, tj.

$$v = \frac{s}{m} \times 100\% = \frac{4.8135}{137.1852} \times 100\% = 0.035087 \times 100\% \doteq 3.5087\%.$$

Minimální naměřenou hodnotu nalezneme na první pozici v seřazeném vektoru skull.BM.

```
skull.BM[1]
```

```
[1] 124
```

$$x_{\min} = 124.$$

V případě výpočtu dolního kvartilu postupujeme analogicky jako v příkladu 3.5. Koeficient $\alpha = 0.25$, počet naměřených hodnot $n = 216$. Součin $c = n \times \alpha = 216 \times 0.25 = 54$ je celé číslo, tedy hodnotu dolního kvartilu $x_{0.25}$ stanovíme jako průměr 54. a 55. hodnoty v posloupnosti seřazených naměřených hodnot.

```
skull.BM[54]
```

```
[1] 134
```

```
skull.BM[55]
```

```
[1] 134
```

$$x_{0.25} = \frac{x_{(54)} + x_{(55)}}{2} = \frac{134 + 134}{2} = 134.$$

Pro výpočet mediánu $x_{0.50}$ je $\alpha = 0.50$ a počet naměřených hodnot $n = 216$. Součin $c = n \times \alpha = 216 \times 0.50 = 108$ je celé číslo, proto hodnotu mediánu $x_{0.50}$ stanovíme jako průměr hodnot na 108. a 109. pozici v posloupnosti seřazených naměřených hodnot.

```
skull.BM[108]
```

```
[1] 137
```

```
skull.BM[109]
```

```
[1] 137
```

$$x_{0.50} = \frac{x_{(108)} + x_{(109)}}{2} = \frac{137 + 137}{2} = 137.$$

V případě výpočtu horního kvartilu je $\alpha = 0.75$ a počet naměřených hodnot $n = 216$. Součin $n \times \alpha = 216 \times 0.75 = 162$, je celé číslo, tedy hodnota horního kvartilu bude rovná průměru 162. a 163. hodnoty v posloupnosti seřazených naměřených hodnot.

```
skull.BM[162]
```

```
[1] 140
```

```
skull.BM[163]
```

```
[1] 140
```

$$x_{0.75} = \frac{x_{(162)} + x_{(163)}}{2} = \frac{140 + 140}{2} = 140.$$

Maximální naměřenou hodnotu nalezneme na poslední pozici v seřazeném vektoru skull.BM.

```
skull.BM[216]
```

```
[1] 149
```

$$x_{\max} = 149$$

Mezikvartilové rozpětí IQR získáme odečtením hodnoty dolního kvartilu od hodnoty horního kvartilu, tj.

$$IQR = x_{0.75} - x_{0.25} = 140 - 134 = 6.$$

Koeficient šikmosti b_1 vypočítáme pomocí vzorce

$$b_1 = \frac{1}{n}\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^3}{s^3}, \tag{3.10}$$

kde x_i, $i = 1, \ldots, n$, je i-tá naměřená hodnota, $n = 216$, m je aritmetický průměr a s je směrodatná odchylka.

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{216}\frac{(124 - 137.1852)^3 + (127 - 137.1852)^3 + \cdots + (149 - 137.1852)^3 + (149 - 137.1852)^3}{23.2772^3} \\ &= \frac{1}{216}\frac{(-13.1852)^3 + (-10.1852)^3 + \cdots + 11.8148^3 + 11.8148^3)}{4.824642^3} \\ &= \frac{2040.299}{24257.67} = 0.0841094 \doteq 0.0841. \end{aligned}$$

Koeficient špičatosti b_2 vypočítáme pomocí vzorce

$$b_2 = \frac{1}{n}\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^4}{s^4} - 3, \tag{3.11}$$

kde x_i, $i = 1, \ldots, n$, je i-tá naměřená hodnota, $n = 216$, m je aritmetický průměr a s je směrodatná odchylka.

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{1}{216}\frac{(124 - 137.1852)^4 + (127 - 137.1852)^4 + \cdots + (149 - 137.1852)^4 + (149 - 137.1852)^4}{8.424642^4} - 3 \\ &= \frac{1}{216}\frac{(-13.1852)^4 + (-10.1852)^4 + \cdots + 11.8148^4 + 11.8148^4}{4.824642^4} - 3 \\ &= \frac{316498.6}{117034.6} - 3 = -0.295683 \doteq -0.2957. \end{aligned}$$

Všechny výše zmíněné základní charakteristiky můžeme vypočítat pomocí funkcí zabudovaných v softwaru R. Aritmetický průměr získáme příkazem mean(), rozptyl pomocí funkcí mean() a sum() a směrodatnou odchylku jako odmocninu z rozptylu pomocí příkazu sqrt(). Koeficient variace vypočítáme jako podíl směrodatné odchylky a aritmetického průměru vynásobený stem. Minimální resp. maximální naměřenou hodnotu získáme příkazem min(), resp. max(). Hodnotu dolního kvartilu, mediánu a horního kvartilu vypočítáme funkcí quantile() s volbou ruční metody výpočtu (type = 2), kde specifikací argumentu probs stanovíme hodnotu koeficientu α (0.25, 0.50 a 0.75). Mezikvartilové rozpětí spočítáme příkazem IQR() opět se specifikací argumentu (type = 2). Koeficient šikmosti, resp. špičatosti získáme pomocí funkce skewness(), resp. kurtosis(), které jsou součástí balíčku e1071. Volbou argumentu type = 3 vybereme ze tří dostupných metod výpočtu koeficientů metody analogické vzorcům 3.10 a 3.11. Poznamenejme, že balíček e1071 není mezi defaultně nainstalovanými balíčky a je tedy potřeba jej doinstalovat.

Na závěr všechny hodnoty vložíme do jedné tabulky (data.frame()), kterou vypíšeme se zaokrouhlením na čtyři desetinná místa (round()).

```
104 m   <- mean(skull.BM)
105 s2  <- 1 / 216 * sum((skull.BM - m)^2)
106 s   <- sqrt(s2)
107 v   <- s / m * 100
108
109 min   <- min(skull.BM)
110 x0.25 <- quantile(skull.BM, probs = 0.25, type = 2)
111 x0.50 <- quantile(skull.BM, probs = 0.50, type = 2)
112 x0.75 <- quantile(skull.BM, probs = 0.75, type = 2)
113 IQR   <- IQR(skull.BM, type = 2)
114 max   <- max(skull.BM)
115
116 sikmost   <- e1071::skewness(skull.BM, type = 3)
117 spicatost <- e1071::kurtosis(skull.BM, type = 3)
118
119 tab <- data.frame(m, var = s2, s, v, min, dolni.k = x0.25, median = x0.50,
```

```
                    horni.k = x0.75, max, IQR, sikmost, spicatost,
                    row.names = 'm-S')
round(tab, digits = 4)
```

```
          m     var      s      v min dolni.k median horni.k max IQR sikmost spicatost
m-S 137.1852 23.1694 4.8135 3.5087 124     134    137     140 149   6  0.0841   -0.2957
```

Interpretace výsledků: Naměřené hodnoty největší šířky mozkovny pro skelety mužského pohlaví se pohybují v rozmezí 124–149 mm. Průměrná hodnota největší šířky mozkovny u skeletů mužského pohlaví je 137.19 mm se směrodatnou odchylkou 4.81 mm, přičemž směrodatná odchylka představuje 3.51% aritmerického průměru. 25% naměřených hodnot je menších nebo rovných 134 mm, 50% naměřených hodnot je menších nebo rovných 137 mm a 75% naměřených hodnot je menších nebo rovných 140 mm. Mezikvartilové rozpětí má rozsah 6 mm. Hodnota koeficientu šikmosti, 0.0841, ukazuje na kladně zešikmená data s prodlouženým pravým koncem. Hodnota koeficientu šikmosti je však tak blízká nule, že zmíněný efekt zešikmení nebude téměř znatelný. Hodnota koeficientu špičatosti, -0.2957, ukazuje na plošší charakter dat. ♣

Příklad 3.10. Charakteristika závislosti pro znaky intervalového typu
Zaměřme se nyní na znaky X = *největší šířka mozkovny* a Y = *největší délka mozkovny* pro skelety mužského pohlaví najednou. Určete míru závislosti mezi znaky X a Y.

Řešení příkladu 3.10
Oba znaky X a Y jsou intervalového typu. Ke stanovení míry závislosti mezi těmito znaky použijeme Pearsonův korelační koeficient r_{12}. Tento koeficient nabývá hodnoty mezi -1 a 1, tj. $r_{12} \in \langle -1\,;\,1\rangle$, přičemž kladné znaménko koeficientu určuje přímý směr *lineární* závislosti a záporné znaménko určuje nepřímý směr *lineární* závislosti. Stupnice těsnosti závislosti mezi dvěma znaky podle hodnoty Pearsonova korelačního koeficientu je uvedena v tabulce 10 společně se stupnicí pro Spearmanův koeficient pořadové korelace.

Hodnotu Pearsonova korelačního koeficientu spočítáme příkazem cor() se specifikací argumentu method = 'pearson'. První dva argumenty příkazu budou vektory naměřených hodnot znaků X (skull.BM) a Y (skull.LM).

```
skull.BM <- data[data$sex == 'm', 'skull.B']
skull.LM <- data[data$sex == 'm', 'skull.L']
(r12 <- cor(skull.BM, skull.LM, method = 'pearson'))
```

```
[1] 0.168157
```

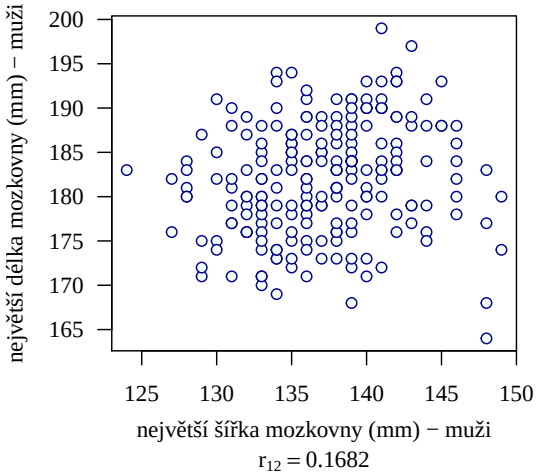
Interpretace výsledků: Pearsonův korelační koeficient nabývá hodnoty 0.1682. Mezi největší šířkou a délkou mozkovny u skeletů mužského pohlaví existuje nízký stupeň přímé lineární závislosti. ♣

Příklad 3.11. Dvourozměrný tečkový diagram
Výslednou míru závislosti mezi znaky X = *největší šířka mozkovny* a Y = *největší délka mozkovny* pro skelety mužského pohlaví vizualizujeme pomocí dvourozměrného tečkového diagramu sestrojeného v rámci příkladu **??**. Do diagramu doplníme akorát popisek s hodnotou Pearsonova korelačního koeficientu r_{12}.

Řešení příkladu 3.11
Dvourozměrný tečkový diagram vykreslíme příkazem plot(), přičemž první dva argumenty budou vektory naměřených hodnot znaku X (skull.BM) a znaku Y (skull.LM), viz str. **??**. Argumentem xlab = ' ' zabráníme vypsání popisku osy x, který následně doplníme do grafu samostatně (příkaz mtext()) pod osu x (argument side) do výšky 2.3 (argument line). Analogicky přidáme do grafu řádek s hodnotou korelačního koeficientu. Text řádku generujeme příkazem bquote(), kde r[12] je syntaxe zápisu r_{12}, symbol == odpovídá syntaxi znaménka = a .(r12) zajistí vypsání hodnoty uložené v proměnné r12, tj. 0.1682.

```
r12 <- round(r12, digits = 4)
plot(skull.BM , skull.LM , pch = 21, col = 'darkblue', bg = 'mintcream',
     xlab = '', ylab = 'největší délka mozkovny (mm) - muži', las = 1)

mtext('největší šířka mozkovny (mm) - muži', side = 1, line = 2.3)
mtext(bquote(r[12] == .(r12)), side = 1, line = 3.5)
```



♣

Dataset 4: Délkové rozměry klíčních kostí

Hodnocený soubor představují osteometrická data klíční kosti (*clavicula*) anglického souboru dokumentovaných skeletů (Parsons, 1916; soubor 03-paired-means-clavicle2.txt). Konkrétně jde o délku klíční kosti z pravé a levé strany těla v párovém uspořádání. Jednotlivé kosti bez druhostranné kosti nebyly do souboru zařazeny.

Popis proměnných:

- id – pořadové číslo jednice;
- sex – pohlaví (m – muž, f – žena);
- length.R – délka kosti z pravé strany (mm);
- length.L – délka kosti z levé strany (mm).

Příklad 3.12. Základní číselné charakteristiky pro intervalový znak
Načtěte datový soubor 03-paired-means-clavicle2.txt a vypište první čtyři řádky z načtené tabulky. Zjistěte, zda datový soubor obsahuje neznámé hodnoty a případně je z načteného souboru odstraňte. Zaměřte se pouze na znak $X =$ *délka levé klíční kosti* pro skelety ženského pohlaví. Vytvořte tabulku základních číselných charakteristik pro znak X.

Řešení příkladu 3.12
Načtení datového souboru provedeme příkazem read.delim(), první čtyři řádky tabulky vypíšeme příkazem head() se specifikací argumentu n = 4.

```
135 data <- read.delim('03-paired-means-clavicle2.txt')
136 head(data, n = 4)
```

```
  id sex length.R length.L                                                    137
1 66   m      126      130                                                    138
2 69   m      158      159                                                    139
3 71   m      153      151                                                    140
4 72   m      145      147                                                    141
```

Pomocí funkce is.na() zjistíme, zda datový soubor obsahuje neznámé hodnoty.

```
142 sum(is.na(data))
```

```
[1] 0                                                                         143
```

Datová tabulka neobsahuje žádné neznámé hodnoty. Pomocí podmnožinového operátoru [ ] nyní vybereme z tabulky data pouze údaje o levé klíční kosti (length.L) u skeletů ženského pohlaví. Naměřené hodnoty si příkazem sort() vzestupně seřadíme.

```
144 length.LF <- data[data$sex == 'f', 'length.L']
145 length.LF <- sort(length.LF)
146 length(length.LF)
```

```
[1] 50                                                                    147
```

Datová tabulka obsahuje údaje o délkách levostranných klíčních kostí u 50 skeletů ženského pohlaví.

Znak X = *délka levé klíční kosti* pro skelety ženského pohlaví je příkladem intervalového typu dat. V tabulce základních číselných charakteristik budou obsaženy následující charakteristiky: aritmetický průměr, rozptyl, směrodatná odchylka, koeficient variace, minimální hodnota, dolní kvartil, medián, horní kvartil, maximální hodnota, mezikvartilové rozpětí, koeficient šikmosti a koeficient špičatosti. Nejprve provedeme ruční výpočet každé z těchto číselných charakteristik a následně uskutečníme kontrolu pomocí softwaru  .

Začneme výpočtem aritmetického průměru m, tj.

$$m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{50}(121 + 127 + \cdots + 162 + 162) = \frac{6\,927}{50} = 138.54.$$

Rozptyl s^2 vypočítáme jako

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 \\ &= \frac{1}{50}\left((121 - 138.54)^2 + (127 - 138.54)^2 + \cdots + (162 - 138.54)^2 + (162 - 138.54)^2\right) \\ &= \frac{1}{50}\left((-17.54)^2 + (-11.54)^2 + \cdots + 23.46^2 + 23.46^2\right) \\ &= \frac{3\,582.42}{50} \doteq 70.5684. \end{aligned}$$

Směrodatnou odchylku s stanovíme jako odmocninu z rozptylu, tj.

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{70.5684} \doteq 8.4005.$$

Koeficient variace v je dopočítáme jako podíl směrodatné odchylky a aritmetického průměru vynásobený 100%, tj.

$$v = \frac{s}{m} \times 100\% = \frac{8.4005}{138.54} \times 100\% = 0.060636 \times 100\% \doteq 6.0636\%.$$

Minimální naměřenou hodnotu nalezneme na první pozici v posloupnosti seřazených naměřených hodnot.

```
148 length.LF[1]
```

```
[1] 121                                                                   149
```

$$x_{\min} = 121.$$

V případě výpočtu dolního kvartilu postupujeme analogicky jako v příkladech 3.5 a 3.9. Koeficient $\alpha = 0.25$, počet naměřených hodnot $n = 50$. Součin $c = n \times \alpha = 50 \times 0.25 = 12.5$ není celé číslo, tedy c zaokrouhlíme na nejbližší vyšší celé číslo, tj. 13, a dolní kvartil bude rovný hodnotě umístěné na 13. pozici v seřazeném vektoru skull.LF.

```
150 length.LF[13]
```

```
[1] 134                                                                   151
```

$$x_{0.25} = x_{(13)} = 134.$$

Pro výpočet mediánu $x_{0.50}$ je $\alpha = 0.50$ a počet naměřených hodnot $n = 50$. Součin $c = n \times \alpha = 50 \times 0.50 = 25$ je celé číslo, proto medián stanovíme jako průměr hodnot umístěných na 25. a 26. pozici v seřazeném vektoru skull.LF.

```
152 length.LF[25]
```

```
[1] 137                                                                    153
```

```
154 length.LF[26]
```

```
[1] 138                                                                    155
```

$$x_{0.50} = \frac{x_{(25)} + x_{(26)}}{2} = \frac{137 + 138}{2} = 137.5.$$

V případě výpočtu horního kvartilu je $\alpha = 0.75$ a počet naměřených hodnot $n = 50$. Součin $n \times \alpha = 50 \times 0.75 = 37.5$, není celé číslo, tedy c zaokrouhlíme na nejbližší vyšší celé číslo, tj. 38, a horní kvartil bude rovný hodnotě umístěné na 38. pozici v seřazeném vektoru skull.LF.

```
156 length.LF[38]
```

```
[1] 142                                                                    157
```

$$x_{0.75} = x_{(38)} = 142.$$

Maximální naměřenou hodnotu nalezneme na poslední pozici v posloupnosti seřazených naměřených hodnot.

```
158 length.LF[50]
```

```
[1] 162                                                                    159
```

$$x_{\max} = 162.$$

Mezikvartilové rozpětí IQR získáme odečtením hodnoty dolního kvartilu od hodnoty horního kvartilu, tj.

$$IQR = x_{0.75} - x_{0.25} = 142 - 134 = 8. \tag{3.12}$$

Koeficient šikmosti b_1 vypočítáme pomocí vzorce 3.10, tj.

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{n} \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^3}{s^3} \\ &= \frac{1}{50} \frac{(121 - 138.54)^3 + (127 - 138.54)^3 + \cdots + (162 - 138.54)^3 + (162 - 138.54)^3}{8.485786^3} \\ &= \frac{1}{50} \frac{(-17.54)^3 + (-11.54)^3 + \cdots + 23.46^3 + 23.46^3)}{8.485786^3} \\ &= \frac{24\,867.09}{30\,552.47} = 0.8139141 \doteq 0.8139. \end{aligned}$$

Koeficient špičatosti b_2 stanovíme pomocí vzorce 3.11, tj.

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{1}{n} \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^4}{s^4} - 3 \\ &= \frac{1}{50} \frac{(121 - 138.54)^4 + (127 - 138.54)^4 + \cdots + (162 - 138.54)^4 + (162 - 138.54)^4}{8.424642^4} - 3 \\ &= \frac{1}{50} \frac{(-17.54)^4 + (-11.54)^4 + \cdots + 23.46^4 + 23.46^4}{8.485786^4} - 3 \\ &= \frac{963\,700.5}{259\,261.7} - 3 = 0.7170956 \doteq 0.7171. \end{aligned}$$

Všechny výše zmíněné základní charakteristiky vypočítáme nyní pomocí funkcí zabudovaných v softwaru R. Na závěr všechny hodnoty vložíme do jedné tabulky (data.frame()), kterou vypíšeme se zaokrouhlením na čtyři desetinná místa (round()).

```r
m    <- mean(length.LF)
s2   <- 1 / 50 * sum((length.LF - m)^2)
s    <- sqrt(s2)
v    <- s / m * 100

min    <- min(length.LF)
x0.25 <- quantile(length.LF, probs = 0.25, type = 2)
x0.50 <- quantile(length.LF, probs = 0.50, type = 2)
x0.75 <- quantile(length.LF, probs = 0.75, type = 2)
IQR    <- IQR(length.LF, type = 2)
max    <- max(length.LF)

sikmost   <- e1071::skewness(length.LF, type = 3)
spicatost <- e1071::kurtosis(length.LF, type = 3)

tab <- data.frame(m, var = s2, s, v, min, dolni.k = x0.25, median = x0.50,
                  horni.k = x0.75, max, IQR, sikmost, spicatost,
                  row.names = 'f-L')
round(tab, digits = 4)
```

```
        m     var      s      v min dolni.k median horni.k max IQR sikmost spicatost
f-L 138.54 70.5684 8.4005 6.0636 121     134  137.5     142 162   8  0.8139    0.7171
```

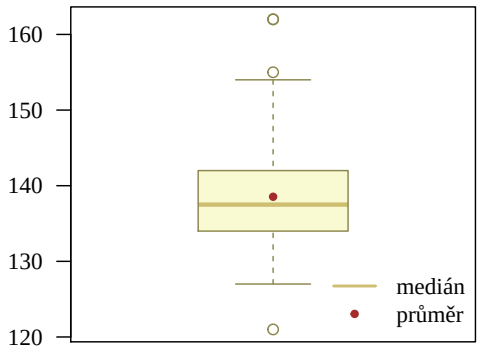
Interpretace výsledků: Délka levé klíční kosti u skeletů ženského pohlaví v datovém souboru se pohybuje v rozsahu od 121 mm do 162 mm. Průměrná hodnota délky levé klíční kosti u skeletů ženského pohlaví je 138.54 mm se směrodatnou odchylkou 8.40 mm, přičemž směrodatná odchylka představuje 6.06% aritmerického průměru. 25% naměřených hodnot je menších nebo rovných 134 mm, 50% naměřených hodnot je menších nebo rovných 137.5 mm a 75% naměřených hodnot je menších nebo rovných 142 mm. Mezikvartilové rozpětí pro délku levé klíční kosti je 8 mm. Hodnota koeficientu šikmosti, 0.8139, ukazuje na výrazněji kladně zešikmená data s prodlouženým pravým koncem. Hodnota koeficientu špičatosti, 0.7171, ukazuje na strmější charakter dat. ♣

Příklad 3.13. Krabicový diagram
Pro znak X = *délka levé klíční kosti* u žen sestrojte krabicový diagram. Do grafu doplňte hodnotu aritmetického průměru a vypište legendu.

Řešení příkladu 3.13
Krabicový diagram vykreslíme analogicky jako v příkladu 3.6 příkazem boxplot(). Příkazem mtext() doplníme do grafu popisek osy x na řádek 1.5. Hodnotu aritmetického průměru zaneseme do grafu pomocí funkce points(), kde prvním argumentem bude hodnota aritmetického průměru, kterou máme vloženou v proměnné m. Vykreslený bod bude kulatého tvaru s plným vnitřkem (pch = 20) v hnědé barvě (col). Nakonec do grafu doplníme legendu příkazem legend(), kde prvním argumentem specifikujeme pozici legendy vpravo dole ('bottomright'). První člen legendy bude plná čára (lty = c(1, NA)) o tloušťce 2 (lwd = c(2, NA)). Druhý člen legendy bude ve tvaru kulatého bodu s plným vnitřkem (pch = c(NA, 20)). Barvy a popisky obou členů legendy specifikujeme argumenty col a legend. Nakonec odstraníme černý rámeček okolo legendy nastavením argumentu bty = 'n'.

```r
boxplot(length.LF, type = 2, xlab = '', las = 1,
        col = 'lightgoldenrodyellow', border = 'khaki4', medcol = 'lightgoldenrod3')
mtext('délka levé klíční kosti (mm) - ženy', side = 1, line = 1.5)

points(m, pch = 20, col = 'brown')
legend('bottomright', lty = c(1, NA), pch = c(NA, 20),  lwd = c(2, NA),
       col = c('lightgoldenrod3', 'brown'),
       legend = c('medián', 'průměr'), bty = 'n')
```



délka levé klíční kosti (mm) – ženy

♣

Příklad 3.14. Charakteristika závislosti pro znaky intervalového typu
Zaměřme se nyní na znaky X = *délka levé klíční kosti* a Y = *délka pravé klíční kosti* u skeletů ženského pohlaví najednou. Určete míru závislosti mezi znaky X a Y.

Řešení příkladu 3.14
Oba znaky X a Y jsou intervalového typu. Ke stanovení míry závislosti mezi těmito znaky použijeme Pearsonův korelační koeficient r_{12}, který spočítáme příkazem cor() se specifikací argumentu method = 'pearson'. Prvními dvěma argumenty příkazu jsou vektory naměřených hodnot znaků X (length.LF) a Y (length.RF).

```
189 length.LF <- data[data$sex == 'f', 'length.L']
190 length.RF <- data[data$sex == 'f', 'length.R']
191 (r12 <- cor(length.LF, length.RF, method = 'pearson'))
```

```
[1] 0.9296909                                                    192
```

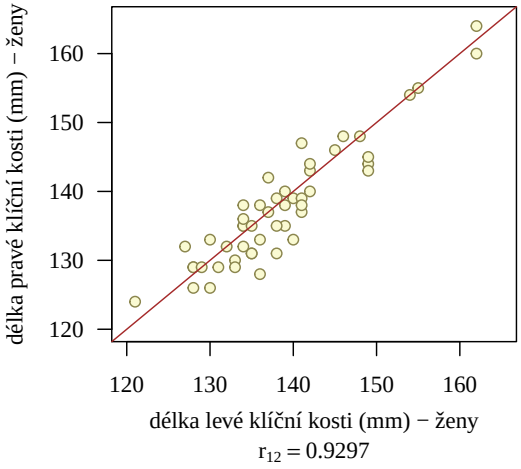
Interpretace výsledků: Pearsonův korelační koeficient nabývá hodnoty 0.9297. Mezi délkou pravé a levé klíční kosti u skeletů ženského pohlaví existuje velmi vysoký stupeň přímé lineární závislosti. S rostoucí délkou pravé klíční kosti roste délka levé klíční kosti a naopak. ♣

Příklad 3.15. Dvourozměrný tečkový diagram
Výslednou míru závislosti mezi znaky X = *délka levé klíční kosti* a Y = *délka pravé klíční kosti* u skeletů ženského pohlaví vizualizujte pomocí dvourozměrného tečkového diagramu. Do diagramu doplňte popisek s hodnotou Pearsonova korelačního koeficientu r_{12} a referenční přímku $x = y$.

Řešení příkladu 3.15
Analogicky jako v příkladu 3.11 vykreslíme dvourozměrný tečkový diagram příkazem plot(). Rozsah obou os, x i y stanovíme stejný (xlim = c(120, 165), ylim = c(120, 165)). Řádek s hodnotou korelačního koeficientu r_{12} doplníme do grafu pomocí příkazu mtext(), přičemž obsah řádku vygenerujeme pomocí funkce bquote(). Z grafu vidíme, že naměřené hodnoty obou znaků X a Y se pohybují v podobných rozsazích, navíc mezi nimi pozorujeme přímý lineární trend, který máme podložený vysokou hodnotou Pearsonova korelačního koeficientu. Pro zvýraznění lineárního trendu mezi oběma znaky dokreslíme do grafu referenční lineární přímku $x = y$ (příkaz abline()) se sklonem 1 (argument b = 1) procházející bodem 0 (argument a = 0). Vykreslená přímka bude mít tloušťku 1 (lwd = 1) a hnědou barvu (col = 'brown') .

```
193 r12 <- round(r12, digits = 4)
194 plot(length.LF , length.RF , pch = 21, xlim = c(120, 165),
195      ylim = c(120, 165), col = 'khaki4', bg = 'lightgoldenrodyellow',
```

```
196       xlab = '', ylab = 'délka pravé klíční kosti (mm) - ženy', las = 1)
197
198  mtext('délka levé klíční kosti (mm) - ženy', side = 1, line = 2.3)
199  mtext(bquote(r[12] == .(r12)), side = 1, line = 3.5)
200  abline(a = 0, b = 1, lwd = 1,  col = 'brown')
```



♣

3.4 Příklady k samostatnému procvičování

Příklad 3.16. Charakteristika polohy nominálního znaku
V rámci sekce **??** jsme jako mezivýstup příkladu **??** získali kontingenční tabulku simultánních absolutních četností znaků X = *počet starších sourozenců* a Y = *porodní hmotnost novorozence* (viz tabulka 11). Najděte vhodnou charakteristiku polohy pro znak *počet starších sourozenců*.

Tabulka 11: Simultánní absolutní četnosti znaků *počet starších sourozenců* a *porodní hmotnost novorozence*

	nízká	norma	vysoká
žádný	123	456	11
jeden	91	399	21
dva	26	138	11

Řešení příkladu 3.16

```
zadny jeden   dva
  590   511   175
```

Interpretace výsledků: Nejvíce novorozenců v datovém souboru bylo prvorozených s četností výskytu 590. ♣

Příklad 3.17. Charakteristika závislosti mezi dvěma nominálními znaky
Zaměřme se nyní na oba znaky X = *počet starších sourozenců* a Y = *porodní hmotnost novorozence* najednou. Určete míru závislosti mezi znaky X a Y. Výslednou míru závislosti porovnejte s mírou závislosti stanovenou v rámci příkladu 3.7 na základě hodnoty Spearmanova koeficientu pořadové korelace r_S. Který z obou koeficientů bychom upřednostnili pro charakterizaci vztahu mezi počtem starších sourozenců a porodní hmotností novorozence a proč?

Řešení příkladu 3.17

```
[1] 0.06940097
```

Interpretace výsledků: Mezi počtem starších sourozenců a porodní hmotností novorozence existuje zanedbatelný stupeň závislosti.

Odpověď na otázku: Znak X = *počet starších sourozenců* je originálně proměnnou ordinálního typu, znak Y = *porodní hmotnost novorozence* je originálně proměnnou spojitého typu. Kategorizací obou proměnných, tedy jejich převodem na proměnné nominálního typu, přicházíme o informace, které původní proměnné poskytují. Preferovanou charakteristikou závislosti je v tomto případě Spearmanův keficient pořadové korelace ($r_S = 0.0476$; velmi nízký stupeň pořadové závislosti), který přistupuje k oběma proměnným jako k ordinálním, a pracuje tedy s širším množstvím informací než Cramérův koeficient. ♣

Příklad 3.18. Charakteristika polohy nominálního znaku
Načtete datový soubor 22-multinom-palmar-lines.txt. Z tabulky vyselektujte pouze údaje týkající se znaků X = *barva vlasů* a Y = *zakončení palmárních linií* u mužů. Změňte záhlaví tabulky tak, aby názvy jednotlivých variant znaku X = *barva vlasů* byly: světlé, střední a tmavé; a názvy jednotlivých variant znaku Y = *zakončení palmárních linií* byly: vysoké, střední a nízké. Stanovte vhodnou charakteristiku polohy pro znak X i pro znak Y.

Řešení příkladu 3.18

```
Warning in file(file, "rt"): cannot open file '22-multinom-palmar-lines.txt': No such file or
    directory
```

```
Error in file(file, "rt"): cannot open the connection
```

```
Error in `[.data.frame`(data, , 2:4): undefined columns selected
```

```
Error in row.names(data.m) <- c("svetle", "stredni", "tmave"): object 'data.m' not found
```

```
Error in names(data.m) <- c("vysoke", "stredni", "nizke"): object 'data.m' not found
```

```
Error in eval(expr, envir, enclos): object 'data.m' not found
```

Charakteristika polohy pro barvu vlasů

```
Error in apply(data.m, MARGIN = 1, FUN = sum): object 'data.m' not found
```

Interpretace výsledků: Nejvíce mužů v datovém souboru mělo střední nebo tmavou barvu vlasů ($n_{\text{střední}} = n_{\text{tmavé}} = 42$).

Charakteristika polohy pro zakončení palmárních linií

```
Error in apply(data.m, MARGIN = 2, FUN = sum): object 'data.m' not found
```

Interpretace výsledků: Nejvíce mužů v datovém souboru mělo vysoké zakončení palmárních linií s četností výskytu 44. ♣

Příklad 3.19. Charakteristika závislosti mezi dvěma nominálními znaky
Zaměřme se nyní na oba znaky $X =$ *barva vlasů* a $Y =$ *zakončení palmárních linií* u mužů najednou. Určete míru závislosti mezi znaky X a Y. Míru závislosti mezi barvou vlasů a zakončením palmárních linií u mužů porovnejte s mírou závislosti mezi barvou vlasů a zakončením palmárních linií u žen (viz příklad 3.4). Zauvažujte, jak byste výsledek srovnání odborně zdůvodnili.

Řešení příkladu 3.19

```
Error in is.data.frame(x): object 'data.m' not found
```

Interpretace výsledků: Mezi barvou vlasů a zakončením palmárních linií u mužů existuje slabý stupeň závislosti. Stejný závěr jsme stanovili také pro vztah mezi barvou vlasů a zakončením palmárních linií u žen. ♣

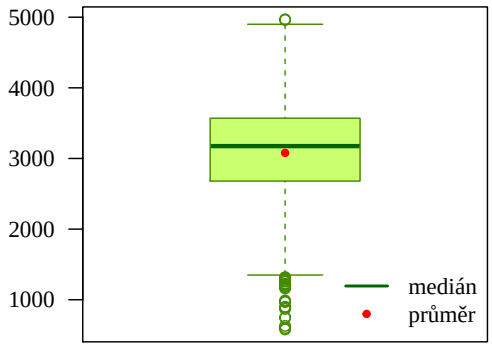
Příklad 3.20. Základní číselné charakteristiky pro intervalový znak
Načtěte datový soubor 17-anova-newborns.txt, odstraňte z načtených dat NA hodnoty a zjistěte dimenzi datové tabulky. Zaměřte se pouze na znak $X =$ *porodní hmotnost novorozence*. S pomocí softwaru R vytvořte tabulku základních číselných charakteristik pro znak X. Pro hodnoty kvantilů proveďte také ruční výpočet. Dále sestrojte krabicový diagram pro znak X a zaneste do něj hodnotu aritmetického průměru. Zamyslete se nad propojením diagramu s charakteristikami polohy a variability.

Řešení příkladu 3.20

```
[1] 1382    4
```

Datový soubor obsahuje údaje o 1382 novorozencích, přičemž u každého novorozence máme záznamy o čtyřech znacích.

```
          m      var        s       v min dolni.k median horni.k  max IQR sikmost
hmt 3078.94 485440.5 696.7356 22.6291 580    2680   3175    3570 4970 890 -0.6094
    spicatost
hmt    0.4937
```



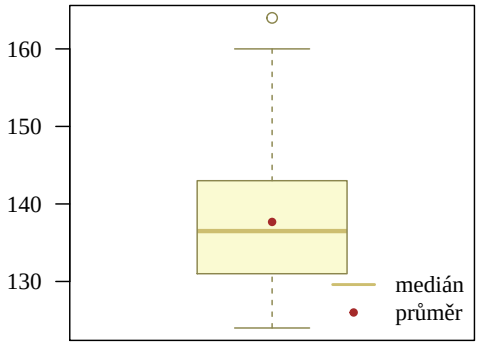
porodní hmotnost novorozence (g)

Interpretace výsledků: Porodní hmotnost novorozenců v datovém souboru nabývá hodnot v rozmezí 580–4970 g. Průměrná hodnota porodní hmotnosti je 3078.94 g se směrodatnou odchylkou 696.74 g, která představuje 22.63% aritmerického průměru. 25% naměřených hodnot je menších nebo rovných 2680 g, 50% naměřených hodnot je menších nebo rovných 3175 g a 75% naměřených hodnot je menších nebo rovných 3570 g. Mezikvartilové rozpětí pro porodní hmotnost novorozenců má rozsah 890 g. Hodnota koeficientu šikmosti, -0.6094, ukazuje na záporně zešikmená data s prodlouženým levým koncem. Hodnota koeficientu špičatosti, 0.4937, ukazuje na strmý charakter dat. ♣

Příklad 3.21. Základní číselné charakteristiky pro intervalový znak
Načtěte datový soubor 03-paired-means-clavicle2.txt, zjistěte, zda datový soubor obsahuje neznámé hodnoty a případně je z načteného souboru odstraňte. Zaměřte se pouze na znak X = *délka pravé klíční kosti* pro skelety ženského pohlaví. S pomocí softwaru R vytvořte tabulku základních číselných charakteristik pro znak X. Pro hodnoty kvantilů proveďte také ruční výpočet. Dále sestrojte krabicový diagram pro znak X a zaneste do něj hodnotu aritmetického průměru.

Řešení příkladu 3.21

```
         m     var      s      v min dolni.k median horni.k max IQR sikmost spicatost
f-R 137.68 73.5376 8.5754 6.2285 124     131  136.5     143 164  12   0.971    0.7501
```



délka pravé klíční kosti (mm) – ženy

Interpretace výsledků: Délka pravé klíční kosti u skeletů ženského pohlaví nabývá hodnot v rozmezí 124 mm až 164 mm. Průměrná délka pravé klíční kosti u skeletů ženského pohlaví v datovém souboru je 137.68 mm se směrodatnou odchylkou 8.58 mm, přičemž směrodatná odchylka představuje 6.23% aritmerického průměru. 25% naměřených hodnot je menších nebo rovných 131 mm, 50% naměřených hodnot je menších nebo rovných 136.5 mm a 75% naměřených hodnot je menších nebo rovných 143 mm. Mezikvartilové rozpětí má rozsah 12 mm. Hodnota koeficientu šikmosti, 0.9710, ukazuje na výrazněji kladně zešikmená data s prodlouženým pravým koncem. Hodnota koeficientu špičatosti, 0.7501, ukazuje na strmý charakter dat. ♣

Příklad 3.22. Základní číselné charakteristiky pro intervalový znak
Načtěte datový soubor 03-paired-means-clavicle2.txt. Zaměřte se na znak X = *délka levé klíční kosti* pro skelety mužského pohlaví. Pomocí softwaru R vytvořte tabulku základních číselných charakteristik pro znak X. Pro hodnoty kvantilů proveďte také ruční výpočet.

Řešení příkladu 3.22

```
           m   var      s      v min dolni.k median horni.k max IQR sikmost spicatost
muzi-L 153.6 96.96 9.8468 6.4107 130     147  154.5     158 176  11  0.2093   -0.2896
```

Interpretace výsledků: Naměřené délky levých klíčních kostí u skeletů mužského pohlaví nabývají hodnot v rozsahu 130–176 mm. Průměrná délka levé klíční kosti u skeletů mužského pohlaví v datovém souboru je 153.60 mm se směrodatnou odchylkou 9.85 mm, přičemž směrodatná odchylka představuje 6.41% aritmerického průměru. 25% naměřených hodnot je menších nebo rovných 147 mm, 50% naměřených hodnot je menších nebo rovných 154.5 mm a 75% naměřených hodnot je menších nebo rovných 158 mm. Mezikvartilové rozpětí naměřených hodnot má rozsah 11 mm. Hodnota koeficientu šikmosti, 0.2093, ukazuje na kladně zešikmená data s prodlouženým pravým koncem. Hodnota koeficientu špičatosti, -0.2896, ukazuje na plošší charakter dat. ♣

Příklad 3.23. Základní číselné charakteristiky pro intervalový znak
Načtěte datový soubor 03-paired-means-clavicle2.txt. Zaměřte se na znak Y = *délka pravé klíční kosti* pro skelety mužského pohlaví. S pomocí softwaru R vytvořte tabulku základních číselných charakteristik pro znak Y. Pro hodnoty kvantilů proveďte také ruční výpočet.

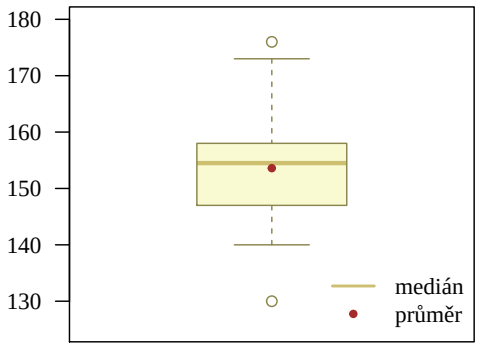
Řešení příkladu 3.23

```
            m      var       s      v min dolni.k median horni.k max IQR sikmost
muzi-R 151.74 118.5124 10.8863 7.1743 126     143    153     160 175  17  -0.057
       spicatost
muzi-R    -0.646
```

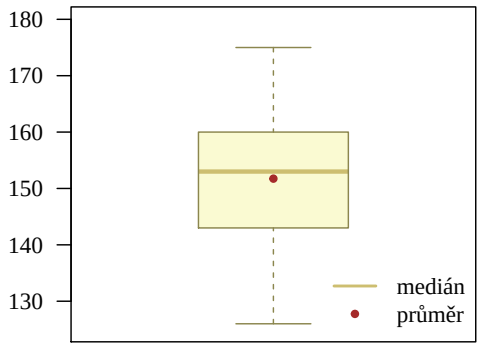
Interpretace výsledků: Délka pravé klíční kosti u skeletů mužského pohlaví nabývá hodnot v rozsahu od 126 mm do 175 mm. Průměrná délka pravé klíční kosti u skeletů mužského pohlaví v datovém souboru je 151.74 mm se směrodatnou odchylkou 10.89 mm, přičemž směrodatná odchylka představuje 7.17% aritmerického průměru. 25% naměřených hodnot je menších nebo rovných 143 mm, 50% naměřených hodnot je menších nebo rovných 153 mm a 75% naměřených hodnot je menších nebo rovných 160 mm. Mezikvartilové rozpětí má rozsah 17 mm. Hodnota koeficientu šikmosti, -0.057, ukazuje na záporně zešikmená data s tendencí k prodlouženému levému konci. Hodnota koeficientu je však tak malá, že zešikmení dat nebude okem skoro viditelné. Hodnota koeficientu špičatosti, -0.6460, ukazuje na plochý charakter dat. ♣

Příklad 3.24. Krabicový diagram
Vykreslete krabicový diagram (a) pro znak X = *délka levé klíční kosti*; (b) pro znak Y = *délka pravé klíční kosti* pro skelety mužského pohlaví.

Řešení příkladu 3.24



délka levé klíční kosti (mm) − muži

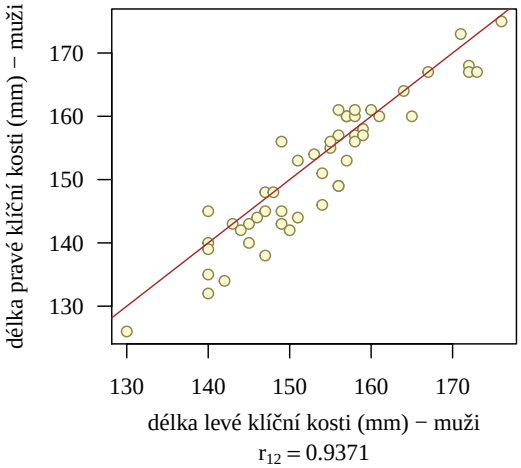


délka pravé klíční kosti (mm) − muži

♣

Příklad 3.25. Charakteristika závislosti pro znaky intervalového typu
Zaměřme se nyní na znaky $X =$ *délka levé klíční kosti* a $Y =$ *délka pravé klíční kosti* u skeletů mužského pohlaví najednou. Určete míru závislosti mezi znaky X a Y. Míru závislosti mezi znaky vizualizujte pomocí dvourozměrného tečkového diagramu. Do diagramu doplňte popisek s hodnotou korelačního koeficientu a referenční přímku $x = y$. Míru závislosti mezi délkou pravé a levé klíční kosti u skeletů mužského pohlaví porovnejte s mírou závislosti stanovenou u skeletů ženského pohlaví (viz příklad 3.14). Zauvažujte, jak byste výsledek srovnání odborně zdůvodnili.

Řešení příkladu 3.25



Interpretace výsledků: Pearsonův korelační koeficient nabývá hodnoty 0.9371. Mezi délkou pravé a levé klíční kosti u skeletů mužského pohlaví existuje velmi vysoký stupeň přímé lineární závislosti. S rostoucí délkou pravé klíční kosti roste délka levé klíční kosti a naopak. Stejný závěr jsme stanovili také pro vztah mezi délkou pravé a levé klíční kosti u skeletů ženského pohlaví ($r_{12} = 0.9297$). ♣

Příklad 3.26. Základní číselné charakteristiky pro intervalový znak
Načtěte datový soubor 01-one-sample-mean-skull-mf.txt a odstraňte z načtených dat NA hodnoty. Zaměřte se pouze

na znak X = *největší délka mozkovny* pro skelety ženského pohlaví. S pomocí softwaru R vytvořte tabulku základních číselných charakteristik pro znak X. Pro hodnoty kvantilů proveďte také ruční výpočet. Vraťte se k histogramu a krabicovému diagramu znaku *největší délka mozkovny* pro skelety ženského pohlaví sestrojených v rámci příkladu **??**. Prozkoumejte, jak se vypočítané charakteristiky polohy, variability a nesymetrie projeví v tvaru histogramu a krabicového diagramu. Které číselné charakteristiky byste hledali v histogramu a které naopak v krabicovém diagramu?

Řešení příkladu 3.26

```
           m     var      s      v min dolni.k median horni.k max IQR sikmost spicatost
f-D 174.5321 38.3224 6.1905 3.5469 157     170    175     178 188   8 -0.0383   -0.2611
```

Interpretace výsledků: Naměřené hodnoty největší délky mozkovny pro skelety ženského pohlaví se pohybují v rozmezí 157–188 mm. Průměrná hodnota největší délky mozkovny u skeletů ženského pohlaví je 174.53 mm se směrodatnou odchylkou 6.19 mm, přičemž směrodatná odchylka představuje 3.55% aritmerického průměru. 25% naměřených hodnot je menších nebo rovných 170 mm, 50% naměřených hodnot je menších nebo rovných 175 mm a 75% naměřených hodnot je menších nebo rovných 178 mm. Mezikvartilové rozpětí má rozsah 8 mm. Hodnota koeficientu šikmosti, -0.0383, ukazuje na téměř neznatelně záporně zešikmená data. Hodnota koeficientu špičatosti, -0.2611, ukazuje na plošší charakter dat.

Odpověď na otázku: Pomocí histogramu můžeme vizualizovat hodnotu aritmetického průměru, rozptylu, resp. směrodatné odchylky, koeficientu šikmosti a špičatosti. Pomocí krabicového diagramu vizualizujeme minimální a maximální naměřenou hodnotu, dolní kvartil, medián, horní kvartil a mezikvartilové rozpětí, šikmost, špičatost a v neposlední řadě také aritmetický průměr, je-li v krabicovém diagramu zaznamenán. ♣

Příklad 3.27. Základní číselné charakteristiky pro intervalový znak
Načtěte datový soubor 01-one-sample-mean-skull-mf.txt a odstraňte z načtených dat neznámé hodnoty. Zaměřte se pouze na znak Y = *největší šířka mozkovny* pro skelety ženského pohlaví. Pomocí softwaru R vytvořte tabulku základních číselných charakteristik pro znak Y. Hodnoty kvantilů stanovte také ručním výpočtem. Vraťte se k histogramu a krabicovému diagramu znaku *největší šířka mozkovny* pro skelety ženského pohlaví sestrojených v rámci příkladu **??**. Prozkoumejte, jak se vypočítané charakteristiky polohy, variability a nesymetrie projeví v tvaru histogramu a krabicového diagramu.

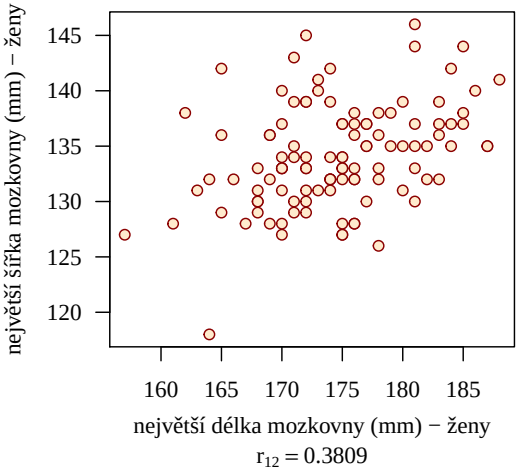
Řešení příkladu 3.27

```
           m   var      s      v min dolni.k median horni.k max IQR sikmost spicatost
f-S 134.1468 21.85 4.6744 3.4845 118     131    134     137 146   6  0.0297    0.4235
```

Interpretace výsledků: Naměřené hodnoty největší šířky mozkovny pro skelety ženského pohlaví se pohybují v rozmezí 118–146 mm. Průměrná hodnota největší šířky mozkovny u skeletů ženského pohlaví je 134.15 mm se směrodatnou odchylkou 4.67 mm, přičemž směrodatná odchylka představuje 3.48% aritmerického průměru. 25% naměřených hodnot je menších nebo rovných 131 mm, 50% naměřených hodnot je menších nebo rovných 134 mm a 75% naměřených hodnot je menších nebo rovnýchž 137 mm. Mezikvartilové rozpětí má rozsah 6 mm. Hodnota koeficientu šikmosti, 0.0297, ukazuje na téměř neznatelně kladně zešikmená data. Hodnota koeficientu špičatosti, 0.4235, ukazuje na strmější charakter dat. ♣

Příklad 3.28. Charakteristika závislosti pro znaky intervalového typu
Zaměřme se nyní na znaky X = *největší délka mozkovny* a Y = *největší šířka mozkovny* pro skelety ženského pohlaví najednou. Určete míru závislosti mezi znaky X a Y. Míru závislosti mezi znaky vizualizujte pomocí dvourozměrného tečkového diagramu (viz příklad **??**). Do diagramu doplňte popisek s hodnotou korelačního koeficientu. Míru závislosti mezi největší délkou a šířkou mozkovny u skeletů ženského pohlaví porovnejte s mírou závislosti stanovenou u skeletů mužského pohlaví (viz příklad 3.11). Zauvažujte, jak byste výsledek srovnání odborně zdůvodnili.

Řešení příkladu 3.28



Interpretace výsledků: Mezi největší šířkou a délkou mozkovny pro skelety ženského pohlaví existuje mírný stupeň přímé lineární závislosti ($r_{12} = 0.3809$). Naproti tomu mezi největší šířkou a délkou mozkovny pro skelety mužského pohlaví existuje pouze nízký stupeň přímé lineární závislosti ($r_{12} = 0.1682$). ♣