Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta
Masarykova univerzita

Aplikovaná statistika I

Téma 7: Úvod do testování hypotéz

Veronika Bendová

bendova.veroonika@gmail.com

Úvod do testování hypotéz

- datový soubor = náhodný výběr $\rightarrow$ stanovíme předpoklady $\rightarrow$ ověřujeme, zda platí
- předpoklady
  - o rozdělení: normální, Poissonovo, binomické, ...
  - o parametrech: μ, σ^2, σ, ρ, p ...

Postup testování hypotéz

- literární rešerše, formulace problému ... přesná, jednoznačná
- stanovení nulové hypotézy H_0
  - hypotéza o níž test rozhodne, zda se zamítne, nebo ne
  - příklad: jeden náhodný výběr a publikovaná hodnota c
    - $H_{01} : \mu = c$;
    - $H_{02} : \mu \leq c$;
    - $H_{03} : \mu \geq c$.
- stanovení alternativní hypotézy H_1
  - alt. hypotézu přijímáme, pokud H_0 zamítáme
  - příklad: jeden náhodný výběr a publikovaná hodnota c
    - $H_{11} : \mu \neq c$ (oboustranná alt.);
    - $H_{12} : \mu > c$ (pravostranná alt.);
    - $H_{13} : \mu < c$ (levostranná alt.).

- volba hladiny významnosti α
  - pst(riziko), že H_0 zamítneme, když platí - snažíme se tuto hodnotu snížit na minimum
- provedení měření; sběr dat
- testování H_0 (tři různé způsoby):
  - kritický obor
  - interval spolehlivosti
  - p-hodnota
- rozhodnutí o zamítnutí/nezamítnutí H_0
- interpretace výsledků

Přístupy k testování hypotézy H_0

- Na hladině významnosti α testujeme nulovou hypotézu H_{01}: $\theta = c$, případně H_{02}: $\theta \leq c$, či H_{03}: $\theta \geq c$ oproti alternativní hypotéze H_{11}: $\theta \neq c$, případně H_{12}: $\theta > c$, či H_{13}: $\theta < c$.
  - **Test kritickým oborem**
    - stanovíme hodnotu testovací statistiky t_0
    - stanovíme kritický obor W
    - pokud $t_0 \in W$, H_0 **zamítáme** na hladině významnosti α
  - **Test intervalem spolehlivosti**
    - sestrojíme $100(1-\alpha)\%$ IS
    - pokud $c \notin IS$, H_0 **zamítáme** na hladině významnosti α
  - **Test p-hodnotou**
    - vypočítáme p-hodnotu p
    - pokud $p \leq \alpha$, H_0 **zamítáme** na hladině významnosti α

Test jednorozměrné normality

- normalita = nepostradatelný předpoklad parametrických testů (jednovýběrových, párových, dvouvýběrových, ...)
- $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z jednorozměrného rozdělení $L(\theta)$
- stanovení hypotéz
  - H_0: *Data pochází z normálního rozdělení.*
  - H_1: *Data nepochází z normálního rozdělení.*
- testy normality
  - Shapirův-Wilkův test: shapiro.test() ... $n \leq 30$
  - Andersonův-Darlingův test: nortest::ad.test() ... $30 < n \leq 100$
  - Lillieforsův test: nortest::lillie.test() ... $n > 100$
- výstup testů = p-hodnota: $p > \alpha \to H_0$ nezamítáme; $p \leq \alpha \to H_0$ **zamítáme**
- grafické ověření normality
  - histogram + křivka hustoty normálního rozdělení ... hist() + dnorm()
  - QQ diagram ... qqnorm() + qqline()

Dataset: 11-two-samples-means-skull.txt

Datový soubor 11-two-samples-means-skull.txt obsahuje původní kraniometrické údaje o basion-bregmatické výšce lebky u 215 dospělých mužů a 107 dospělých žen ze starověké egyptské populace. Data pochází z archivních materiálů (Schmitd, 1888).

Popis proměnných v datasetu:

- id ... pořadové číslo;
- pop ... populace (egant - egyptská starověká);
- sex ... pohlaví jedince (m - muž, f - žena);
- skull.H ... basion-bregmatická výška lebky (v mm).

Příklad 7.1. Test o normalitě dat

Načtěte datový soubor 11-two-samples-means-skull.txt. Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ testujte hypotézu, že náhodný výběr basion-bregmatických výšek lebky (skull.H) mužů starověké egyptské populace pochází z normálního rozdělení.

Řešení příkladu 7.1

- H_0 : Data pochází / nepochází z normálního rozdělení.
- H_1 : Data pochází / nepochází z normálního rozdělení.

Hladina významnosti $\alpha =$............... .

```
data <- read.delim(...) # nacteni datoveho souboru
skull.HM <- data[... , ...] # vyber sloupce skull.H pro muze
skull.HM <- na.omit(...) # odstraneni NA hodnot
n <- length(...) # pocet udaju o delce b-b vysky lebky u muzu
tab <- data.frame(n, min = min(...),
                  max = max(...)) # souhrnna tabulka: n, min, a max
```

```
    n min max
1 215 119 146
```

Náhodný výběr obsahuje údaje o basion-bregmatické výšce lebky .... mužů starověké egyptské populace. Naměřené hodnoty se pohybují v rozmezí ....–............... mm. Protože rozsah náhodného výběru výšek lebky $n \leq 30$ / $30 < n \leq 100$ / $n > 100$ použijeme na testování hypotézy o normalitě dat Shapirův-Wilkův / Andersonův-Darlingův / Lillieforsův test.

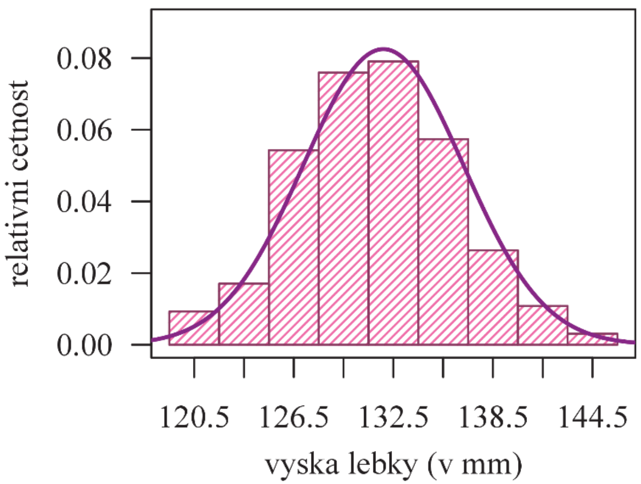
```
nortest::lillie.test(...) # Lillieforsuv test
```

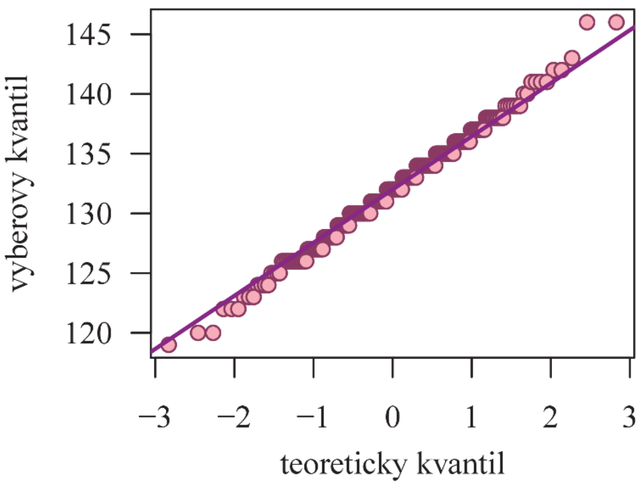
```

        Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov) normality test

data:  skull.HM
D = 0.054341, p-value = 0.1263
```

Protože p-hodnota $p =$ .... je větší / menší než $\alpha = 0.05$, H_0 zamítáme / nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

Grafická vizualizace rozdělení náhodného výběru

```
r <- ... # 9; optimalni pocet trid. intervalu (Sturgesovo pravidlo)
# 146 - 119 = 27 -> 27 -> seq(119, 149, by = 3)
par(mar = c(...)) # okraje 4, 4, 1, 1
hist(skull.HM, breaks = ..., prob = T, ylim = c(0, 0.09), axes = F, col = ...,
     border = ..., density = ..., xlab = '', ylab = ..., main = '') # histogram
box(...) # ramecek okolo grafu
axis(side = ..., at = seq(120.5, 144.5, by = 3)) # osa x (stredy trid. int.)
axis(...) # osa y
mtext(..., side = ..., line = ...) # popisek osy x
xfit <- seq(...) # posl. od 115 do 150 o delce 512
yfit <- dnorm(x = xfit, mean(skull.HM), sd(skull.HM)) # hustota f(x) N(m, s^2)
lines(xfit, yfit, col = ..., lwd = ...) # krivka hustoty f(x)

qqnorm(skull.HM, pch = ..., bg = ..., col = ..., main = '',
       xlab = '', ylab = ..., las = ...) # Q-Q diagram
qqline(skull.HM, col = ..., lwd = ...) # referencni primka
mtext(..., side = ..., line = ...) # popisek osy x
```





Interpretace výsledků: Náhodný výběr basion-bregmatických výšek lebky mužů starověké egyptské populace pochází / nepochází z normálního rozdělení.

Dataset: 15-anova-means-skull.txt
Datový soubor 15-anova-means-skull.txt obsahuje původní kraniometrické údaje o výšce horní části tváře mužů z německé, malajské, čínské, peruánské a bantuské populace. Data pochází z archivních materiálů (Schmitd, 1888).

Popis proměnných v datasetu:

- id . . . pořadové číslo;
- pop . . . populace (nem - německá, mal - malajská, cin - čínská, per - peruánská, ban - bantuská);
- sex . . . pohlaví jedince (m - muž);
- upface.H . . . výška horní části tváře, přímá vzdálenost mezi body *nasion* a *prosthion* (v mm).

Příklad 7.2. Test o normalitě dat
Načtěte datový soubor 15-anova-means-skull.txt. Na hladině významnosti $\alpha = 0.10$ testujte hypotézu, že náhodný výběr výšek horní části tváře (upface.H) mužů německé populace pochází z normálního rozdělení.

Řešení příkladu 7.2

- H_0 : Data .... z normálního rozdělení.
- H_1 : Data .... z normálního rozdělení.

Hladina významnosti $\alpha =$............... .

```
data <- read.delim(...) # nacteni datoveho souboru
upface.HN <- data[..., ...] # vyber sloupce upface.H pro muze nem. pop.
upface.HN <- ... # odstraneni NA hodnot
n <- ... # pocet udaju ve vektoru upface.HN
(tab <- data.frame(...)) # souhrnna tabulka: n, min, a max
```

```
   n min max
1 19  62  76
```

Náhodný výběr obsahuje údaje o výšce horní části tváře .... mužů německé populace. Naměřené hodnoty se pohybují v rozmezí ....–............ mm. Protože rozsah náhodného výběru výšek horní části tváře $n \leq 30$ / $30 < n \leq 100$ / $n > 100$ použijeme na testování hypotézy o normalitě dat Shapirův-Wilkův / Andersonův-Darlingův / Lillieforsův test.

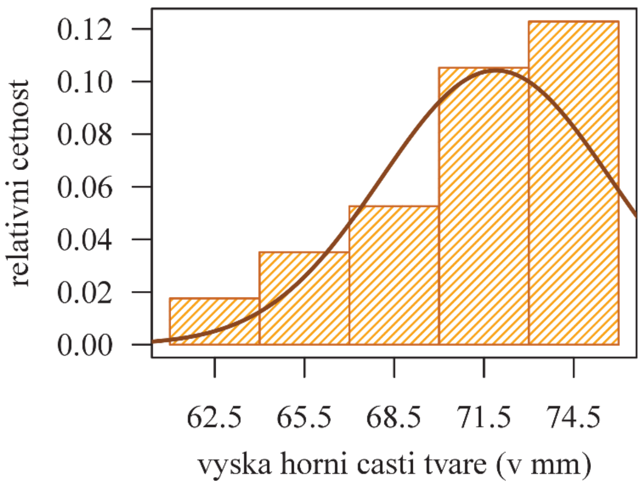
```
shapiro.test(...) # Shapiruv-Wilkuv test
```

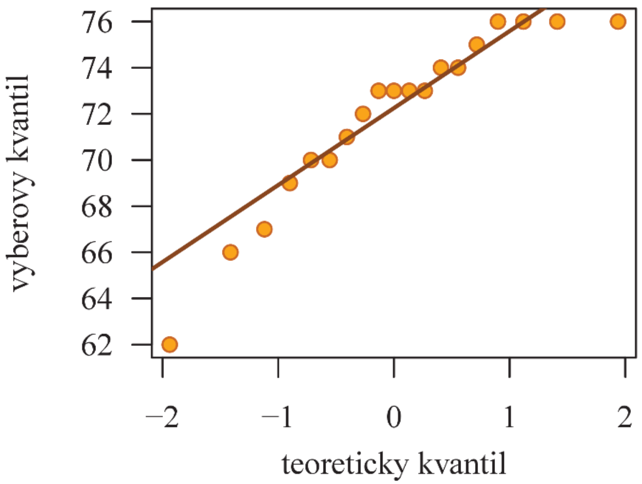
```

        Shapiro-Wilk normality test

data:  upface.HN
W = 0.8964, p-value = 0.0419
```

Protože p-hodnota $p =$ .... je větší / menší než $\alpha = 0.10$, H_0 .... na hladině významnosti $\alpha = 0.10$.

Grafická vizualizace rozdělení náhodného výběru

```
r <- ... # Sturgesovo pravidlo
# 76 - 62 = 14 -> 15 -> seq(61, 76, by = 3)
par(mar = c(...)) # okraje 4, 4, 1, 1
hist(..., breaks = ..., prob = ..., ...) # histogra,
box(...) # ramecek okolo grafu
axis(...) # osa x (stredy trid. intervalu - samostatne dopocitat)
axis(...) # osa y
mtext(...) # popisek osy x
xfit <- seq(...) # posl. od 55 do 80 o delce 512
yfit <- dnorm(...) # hustota normalniho rozdeleni nad posl. xfit
lines(xfit, yfit, col = 'darkorange4', lwd = 2)

qqnorm(...) # Q-Q diagram
qqline(...) # referencni primka
mtext(..., side = ..., line = ...) # popisek osy x
```





Interpretace výsledků: Náhodný výběr výšek horní části tváře mužů německé populace pochází / nepochází z normálního rozdělení.

Test dvourozměrné normality

- dvourozměrná normalita = nepostradatelný předpoklad parametrického testu o korelačním koeficientu ρ
- $(X_1, Y_1)^T, \ldots, (X_n, Y_n)^T$ je náhodný výběr z dvourozměrného rozdělení $L(\theta)$
- stanovení hypotéz
  - H_0: *Data pochází z dvourozměrného normálního rozdělení.*
  - H_1: *Data nepochází z dvourozměrného normálního rozdělení.*
- testy normality
  - Mardiův test: MVN::mvn() s argumentem mvnTest = 'mardia'
    - sestává ze dvou testů: (a) test šikmosti; (b) test špičatosti
  - (Heznův-Zirklerův test: MVN::mvn() s argumentem mvnTest = 'hz')
  - (Roystonův test: MVN::mvn() s argumentem mvnTest = 'royston')
- výstup testů = p-hodnota: $p > \alpha \rightarrow H_0$ nezamítáme; $p \leq \alpha \rightarrow H_0$ **zamítáme**
- grafické ověření normality
  - 3D-diagram . . . GA::persp3D()
  - dvourozměrný tečkový diagram s $(1-\alpha)$% elipsou spolehlivosti . . . car::dataEllipse()

Dataset: 19-more-samples-correlations-skull.txt
Datový soubor 19-more-samples-correlations-skull.txt obsahuje údaje o šířce nosu a o interorbitální šířce mužů z německé, malajské, čínské, peruánské a bantuské populace. Data pochází z archivních materiálů (Schmitd, 1888).

Popis proměnných v datasetu:

- pop . . . populace (nem - německá, mal - malajská, cin - čínská, per - peruánská, ban - bantuská);
- sex . . . pohlaví jedince (m - muž);
- nose.B . . . šířka nosu (v mm);
- intorb.B . . . interorbitální šířka (v mm).

Příklad 7.3. Test o dvourozměrné normalitě dat
Načtěte datový soubor 19-more-samples-correlations-skull.txt. Nechť náhodná veličina X popisuje *šířku nosu* a náhodná veličina Y popisuje *interorbitální šířku* mužů peruánské populace. Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ testujte hypotézu, že náhodný vektor $(X, Y)^T$ pochází z dvourozměrného normálního rozdělení.

Řešení příkladu 7.3

- H_0 : Data pochází / nepochází z dvourozměrného normálního rozdělení.
- H_1 : Data pochází / nepochází z dvourozměrného normálního rozdělení.

Hladina významnosti $\alpha =$............... .

```
data <- read.delim(...) # nacteni datoveho souboru
data.P <- data[..., ...] # vyber sloupcu nose.B a intorb.B muzu peruanske pop
data.P <- na.omit(...) # odstraneni NA udaju
nose.BP <- data.P$nose.B # udaje o sirce nosu
intorb.BP <- data.P$intorb.B # udaje o interorb. sirce
n <- dim(data.P)[1] # pocet kompletnich dvojic udaju
tab <- data.frame(...) # souhrnna tabulka: n, min_X, max_X, min_Y, max_Y
```

Náhodný výběr obsahuje údaje o šířce nosu a interorbitální šířce .... mužů peruánské populace. Hodnoty šířky nosu se pohybují v rozmezí ....–............ mm, hodnoty interorbitální šířky se pohybují v rozmezí ....-............ mm. Dvourozměrnou normalitu otestujeme Mardiovým testem. Ten sestává z dvou částí:

(a) z testu šikmosti

- H_{0a} : Data vykazují / nevykazují kladné nebo záporné zešikmení.
- H_{1a} : Data vykazují / nevykazují kladné ani záporné zešikmení.

(b) z testu špičatosti

- H_{0b} : Data vykazují / nevykazují zešpičatění nebo zploštění.
- H_{1b} : Data vykazují / nevykazují zešpičatění ani zploštění.

Data pochází z dvourozměrného normálního rozdělení, pokud nevykazují zešikmení ani zešpičatění.

```
MVN::mvn(data.P, mvnTest = 'mardia')$multivariateNormality
```

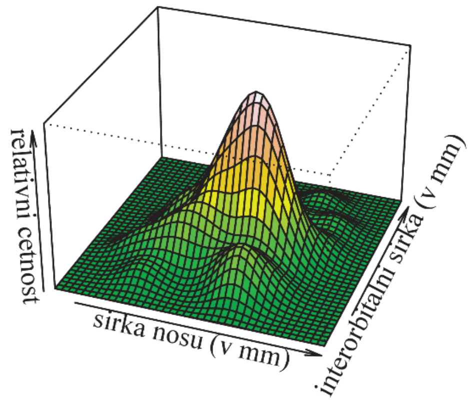
```
             Test           Statistic           p value Result
1 Mardia Skewness    4.27819772855481 0.369663150730262    YES
2 Mardia Kurtosis -0.0684871107744411 0.945397880096616    YES
3             MVN                <NA>              <NA>    YES
```

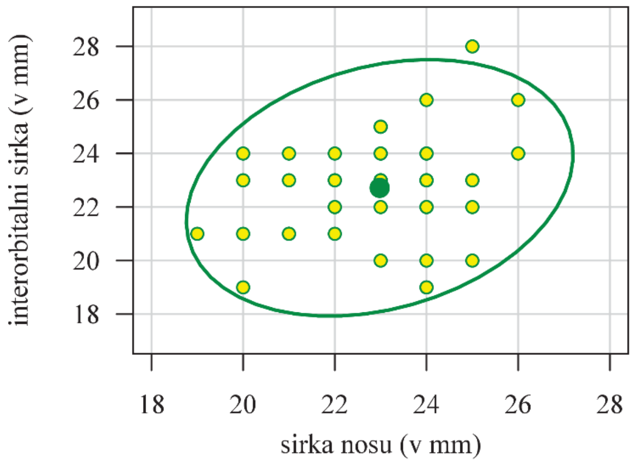
Protože p-hodnota testu šikmosti $p =$ .... je menší / větší než $\alpha = 0.05$, H_{0a} zamítáme / nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$. Data vykazují / nevykazují výrazné zešikmení.

Protože p-hodnota testu špičatosti $p =$ .... je menší / větší než $\alpha = 0.05$, H_{0b} zamítáme / nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$. Data vykazují / nevykazují výrazné zešpičatění nebo zploštění.

Grafická vizualizace rozdělení náhodného výběru

```
Z <- MASS::kde2d(nose.BP, intorb.BP, n = 40,
                 lims = c(17, 28, 17, 30)) # jadrovy odhad hustoty
par(...) # nastaveni okraju 2, 4, 2, 4
GA::persp3D(Z$x, Z$y, Z$z, theta = 5, phi = 30, col.palette = terrain.colors,
            ticktype = ..., xlab = ..., ylab = ..., zlab = ...,
            border = ...) # 3D-diagram
par(...) # nastaveni okraju 4, 4, 2, 2
car::dataEllipse(nose.BP, intorb.BP, level = 0.95, xlim = c(18, 28), las = ...,
                 ylim = c(17, 29), xlab = ..., ylab = ..., main = ..., bg = ...,
                 pch = ..., col = ..., lwd = ...) # 95% elipsa spolehlivosti
mtext(...) # popisek osy x
```





Mimo 95% elipsu spolehlivosti leží .... z celkového počtu .... pozorování, tj. .... %, tedy více / méně než 5 % dat.

Interpretace výsledků: Náhodný výběr šířky nosu a interorbitální šířky mužů peruánské populace pochází / nepochází z dvourozměrného normálního rozdělení.