Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta
Masarykova univerzita

Aplikovaná statistika I

Téma 8: Jednovýběrové parametrické testy

Veronika Bendová

bendova.veroonika@gmail.com

Jednovýběrové parametrické testy

- jeden objekt $\rightarrow$ jeden znak / více znaků najednou
  - $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$
    - test o rozptylu σ^2
    - test o střední hodnotě μ při neznámém rozptylu σ^2
  - $(R_1, L_1)^T, \ldots, (R_n, L_n)^T \sim N_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, párová data
    - párový test $\rightarrow$ test o střední hodnotě při neznámém rozptylu σ^2
  - $(X_1, Y_1)^T, \ldots (X_n, Y_n)^T \sim N_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, ale nejde o párová data
    - test o korelačním koeficientu ρ
    - test o nezávislosti
  - $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Alt}(p)$
    - test o pravděpodobnosti p

Přístupy testování hypotéz

- literární rešerše + design studie (H_0, H_1, α) + sběr dat
  - test kritickým oborem
    - hodnota testovací statistiky t_0 + kritický obor W
    - pokud $t_0 \in W$, H_0 **zamítáme** na hladině významnosti α
  - test intervalem spolehlivosti
    - $100(1-\alpha)\%$ IS + konstanta c z H_0
    - pokud $c \in IS$, H_0 **nezamítáme** na hladině významnosti α
  - test p-hodnotou
    - p-hodnota p + hladina významnosti α
    - pokud $p \leq \alpha$, H_0 **zamítáme** na hladině významnosti α
- rozhodnutí o zamítnutí/nezamítnutí H_0 + interpretace výsledků

Test o rozptylu (Test o směrodatné odchylce)

- $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z $N(\mu, \sigma^2)$, μ neznáme a c je konstanta
- **Hypotézy:**
  - $H_{01} : \sigma^2 = \sigma_0^2$ oproti $H_{11} : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ (oboustranná alt.)
  - $H_{02} : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ oproti $H_{12} : \sigma^2 > \sigma_0^2$ (pravostranná alt.)
  - $H_{03} : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ oproti $H_{13} : \sigma^2 < \sigma_0^2$ (levostranná alt.)
- **Test kritickým oborem**
  - testovací statistika: $F_W = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$
  - kritický obor:
    - $H_{11} : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ $W = (0; \chi^2_{n-1}(\alpha/2)\rangle \cup \langle\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2), \infty)$
    - $H_{12} : \sigma^2 > \sigma_0^2$ $W = \langle\chi^2_{n-1}(1-\alpha); \infty)$
    - $H_{13} : \sigma^2 < \sigma_0^2$ $W = (0; \chi^2_{n-1}(\alpha)\rangle$

  $\chi^2_{n-1}(\alpha)$ je α kvantil χ^2 rozdělení o $n-1$ stupních volnosti ... qchisq(alpha, n - 1)
- **Test intervalem spolehlivosti**
  - konstanta σ_0^2 + interval spolehlivosti:
    - $H_{11} : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ $(d, h) = \left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1}(\alpha/2)}\right)$
    - $H_{12} : \sigma^2 > \sigma_0^2$ $(d, \infty) = \left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1}(1-\alpha)}, \infty\right)$
    - $H_{13} : \sigma^2 < \sigma_0^2$ $(0, h) = \left(0, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1}(\alpha)}\right)$
- **Test *p*-hodnotou**
  - hladina významnosti α + p-hodnota
    - $H_{11} : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ p-hodnota $= 2\min(\Pr(F_W \leq f_W), \Pr(F_W > f_W)) = 2\min($pchisq(fW, n - 1), $1 -$ pchisq(fW, n - 1))
    - $H_{12} : \sigma^2 > \sigma_0^2$ p-hodnota $= \Pr(F_W > f_W) =$ 1 - pchisq(fW, n - 1)
    - $H_{13} : \sigma^2 < \sigma_0^2$ p-hodnota $= \Pr(F_W \leq f_W) =$ pchisq(fW, n - 1)

Dataset: 11-two-samples-means-skull.txt
Datový soubor 11-two-samples-means-skull.txt obsahuje původní kraniometrické údaje o basion-bregmatické výšce lebky u 215 dospělých mužů a 107 dospělých žen ze starověké egyptské populace. Data pochází z archivních materiálů (Schmitd, 1888).

Popis proměnných v datasetu:

- id . . . pořadové číslo;
- pop . . . populace (egant - egyptská starověká);
- sex . . . pohlaví jedince (m - muž, f - žena);
- upface.H . . . basion-bregmatická výška lebky (v mm).

Příklad 8.1. Test o rozptylu
Mějme datový soubor 11-two-samples-means-skull.txt a proměnnou skull.H popisující *basion-bregmatickou* výšku lebky. Na hladině významnosti $\alpha = 0.10$ testujte hypotézu o vyšším rozptylu *basion-bregmatické* výšky lebky starověké egyptské mužské populace vzhledem k rozptylu *basion-bregmatické* výšky lebky novověké egyptské mužské populace ($s_m = 5.171$ mm).

Řešení příkladu 8.1

```
data <- read.delim(...) # nacteni datoveho souboru
skull.HM <- data[data$sex == ..., ...] # vyber relevantni promenne pro muze
skull.HM <- na.omit(...) # odstraneni NA hodnot
n <- length(...) # rozsah nahodneho vyberu
tab <- data.frame(n = n, min = ..., max = ...) # souhrnna tabulka vysledku
```

```
    n  min  max
1  215  119  146
```

Náhodný výběr obsahuje údaje o *basion-bregmatické* výšce lebky .... mužů starověké egyptské populace. Naměřené hodnoty se pohybují v rozmezí ....-............... mm.

Ze zadání máme za úkol porovnat rozptyl náhodného výběru s konstantou, použijeme tedy test o střední hodnotě / test o rozptylu / párový test / test o pravděpodobnosti. Primárně bychom chtěli použít **parametrický** test. Nutným předpokladem k použití parametrického testu je **normalita naměřených hodnot**. Tu jsme ověřili na minulém cvičení v rámci příkladu 7.1, kde jsme došli k závěru, že náhodný výběr *basion-bregmatických* výšek lebky mužů starověké egyptské populace pochází z normálního rozdělení (Lillieforsův test: hladina významnosti $\alpha = 0.05$).

Test o rozptylu

- H_0 : ....
- H_1 : .... (.. alternativa).
- Hladina významnosti $\alpha =$ ....
- Test o ....

a) **Test kritickým oborem**

```
alpha <- ... # zadana hladina vyznamnosti
sigma0 <- ... # konstanta sigma0 ^ 2
s <- sd(...) # vyberova sm. odchylka basion-bregmaticke vysky lebky muzu
fw <- (...) * ... / ... # testovaci statistika
q <- qchisq(...) # horni hranice kritickeho oboru
```

```
        fw        q
1 187.1313 187.9521
```

Hodnota testovací statistiky $f_w =$ ...., kritický obor W má tvar .... Protože ...., H_0 .... na hladině významnosti $\alpha =$ ....

b) **Test intervalem spolehlivosti**

```
hh <- ... * ... / qchisq(...) # horni hranice IS
```

```
        hh
1 26.62247
```

Interval spolehlivosti má tvar .... Protože ...., H_0 .... na hladině významnosti $\alpha =$ ....

c) **Test *p*-hodnotou**

```
p.hodnota <- pchisq(...) # p-hodnota
```

```
           p
1 0.09260461
```

Výsledná *p*-hodnota $p =$ .... Protože ...., H_0 .... na hladině významnosti $\alpha =$ ....

Interpretace výsledků: Rozptyl *basion-bregmatické* výšky lebky starověké egyptské mužské populace je / není statisticky významně menší než **rozptyl** *basion-bregmatické* výšky lebky novověké egyptské mužské populace.

Test o střední hodnotě při neznámém rozptylu (t-test)

- $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z $N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 neznáme a c je konstanta
- **Hypotézy:**
  - $H_{01} : \mu = \mu_0$ oproti $H_{11} : \mu \neq \mu_0$ (oboustranná alt.)
  - $H_{02} : \mu \leq \mu_0$ oproti $H_{12} : \mu > \mu_0$ (pravostranná alt.)
  - $H_{03} : \mu \geq \mu_0$ oproti $H_{13} : \mu < \mu_0$ (levostranná alt.)
- **Test kritickým oborem**
  - testovací statistika $T_W = \frac{m - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$
  - kritický obor
    - $H_{11} : \mu \neq \mu_0$ $W = (-\infty; t_{n-1}(\alpha/2)\rangle \cup \langle t_{n-1}(1-\alpha/2), \infty)$
    - $H_{12} : \mu > \mu_0$ $W = \langle t_{n-1}(1-\alpha); \infty)$
    - $H_{13} : \mu < \mu_0$ $W = (-\infty; t_{n-1}(\alpha)\rangle$

  $t_{n-1}(\alpha)$ je α kvantil Studentova rozdělení o $n-1$ stupních volnosti . . . qt(alpha, n - 1)
- **Test intervalem spolehlivosti**
  - konstanta μ_0 + interval spolehlivosti
    - $H_{11} : \mu \neq \mu_0$ $(d, h) = (m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1}(1-\alpha/2), m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha/2))$
    - $H_{12} : \mu > \mu_0$ $(d, \infty) = (m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1}(1-\alpha), \infty)$
    - $H_{13} : \mu < \mu_0$ $(-\infty, h) = (-\infty, m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha))$
- **Test p-hodnotou**
  - hladina významnosti α + p-hodnota:
    - $H_{11} : \mu \neq \mu_0$ p-hodnota $= 2\min\left(\Pr(T_W \leq t_W), \Pr(T_W > t_W)\right) =$ 2 min(pt(tW, n - 1), 1 - pt(tW, n - 1))
    - $H_{12} : \mu > \mu_0$ p-hodnota $= \Pr(T_W > t_W) = 1 - \Pr(T_W \leq t_W) =$ 1 - pt(tW, n - 1)
    - $H_{13} : \mu < \mu_0$ p-hodnota $= \Pr(T_W \leq t_W) =$ pt(tW, n - 1)

Dataset: 01-one-sample-mean-skull-mf.txt
Z archivních materiálů (Schmidt, 1888; soubor 01-one-sample-mean-skull-mf.txt) máme k dispozici původní kraniometrické údaje o délce a šířce mozkovny a ze starověké egyptské populace.

Popis proměnných v datasetu:

- pop – populace (egant – egyptská starověká);
- sex – pohlaví (m – muž, f – žena);
- skull.L – největší délka mozkovny (mm);
- skull.B – největší šířka mozkovny (mm).

Příklad 8.2. Test o střední hodnotě μ při neznámém rozptylu σ^2
Mějte datový soubor 01-one-sample-mean-skull-mf.txt a proměnnou skull.L popisující největší délku mozkovny. Na hladině významnosti $\alpha = 0.10$ zjistěte, zda je rozdíl mezi největší délkou mozkovny u starověké egyptské ženské populace a u novověké egyptské ženské populace ($n_f = 52$, $m_f = 171.962$ mm, $s_f = 7.052$ mm).

Řešení příkladu 8.2

```r
data <- read.delim(...) # nacteni datoveho souboru
skull.LF <- data[data$sex == ..., ...] # vyber relevantni promenne pro zeny
skull.LF <- na.omit(...) # odstraneni NA hodnot
n <- length(...) # rozsah nahodneho vyberu
tab <- data.frame(n = n, min = ..., max = ...) # souhrnna tabulka vysledku
```

```
    n min max
1 109 157 188
```

Náhodný výběr obsahuje údaje o největší délce mozkovny .... žen starověké egyptské populace. Naměřené hodnoty se pohybují v rozmezí ....-............... mm.

Ze zadání máme za úkol porovnat střední hodnotu náhodného výběru s konstantou, použijeme tedy test o střední hodnotě / test o rozptylu / párový test / test o korelačním koeficientu. Primárně bychom chtěli použít **parametrický** test. Nutným předpokladem k použití parametrického testu je **normalita naměřených hodnot**.

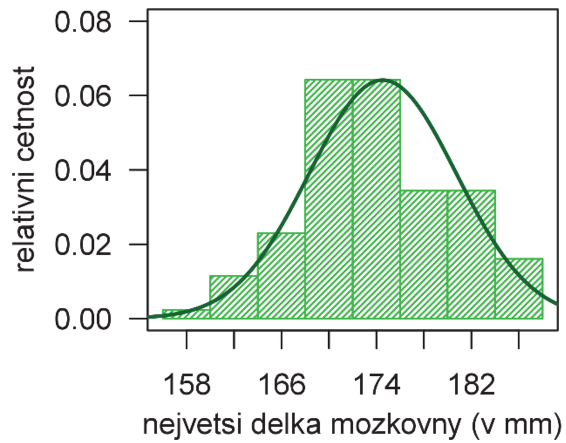
Test normality

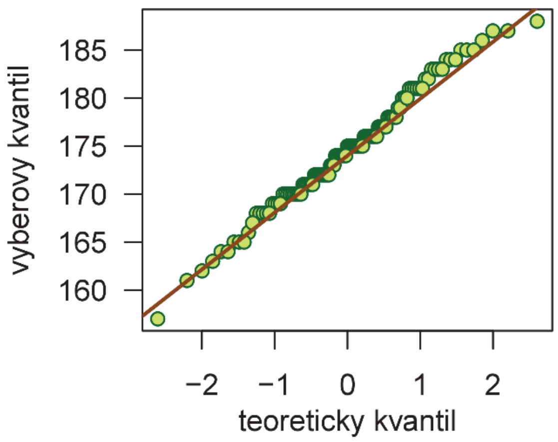
- H_0 : Data .... z normálního rozdělení.
- H_1 : Data .... z normálního rozdělení.

Hladina významnosti $\alpha =$.............. . $n =$.............. je menší / větší než 100 $\rightarrow$ Shapirův-Wilkův / Andersonův-Darlingův / Lillieforsův test.

```
[1] 0.2624837
```
28

Náhodný výběr největších délek mozkovny žen starověké egyptské populace .... z normálního rozdělení (p-hodnota = ... je menší / větší než $\alpha = 0.05$).





Protože data pochází z normálního rozdělení, použijeme na ověření otázky ze zadání **parametrický test**, a to jednovýběrový test o střední hodnotě při neznámém rozptylu, neboť hodnota rozptylu není explicitně uvedena v zadání příkladu.

Test o střední hodnotě při neznámém rozptylu

- H_0 : ....
- H_1 : .... (.. alternativa).
- Hladina významnosti $\alpha =$ ....

a) **Test kritickým oborem**

```
alpha <- # zadana hladina vyznamnosti
mu0 <- # konstanta mu0
m <- mean(...) # vyberovy prumer nejv. delky mozkovny zen
s <- sd(...) # vyberova sm. odchylka nejv. delky mozkovny zen
tw <- (...) / ... * ... # tetsoaci statistika
q1 <- qt(...) # horni hranice kritickeho oboru
q2 <- qt(...) # dolni hranice kritickeho oboru
```

```
        tw        q1       q2
1 4.314569 -1.659085 1.659085
```

Hodnota testovací statistiky $t_w =$ ...., kritický obor W má tvar ....
Protože ...., H_0 .... na hladině významnosti $\alpha =$ ....

b) **Test intervalem spolehlivosti**

```
dh <- m - ... / ... * qt(...) # dolni hranice IS
hh <- m - ... / ... * qt(...) # horni hranice IS
```

```
         dh       hh
1 173.5438 175.5204
```

Interval spolehlivosti má tvar .... Protože ...., H_0 .... na hladině významnosti $\alpha =$ ....

c) **Test *p*-hodnotou**

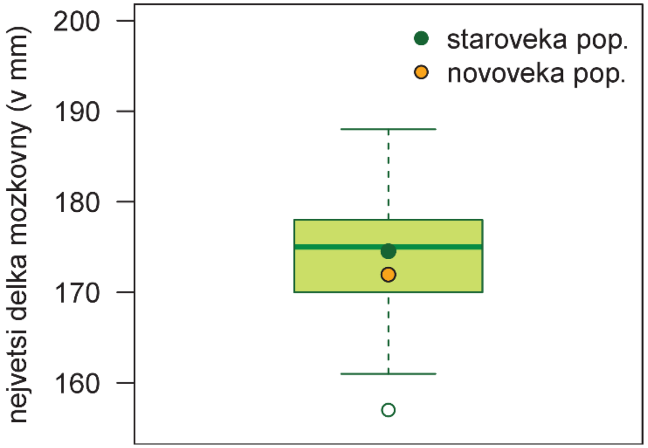
```
p.hodnota <- 2 * min(pt(...), 1 - pt(...)) # p-hodnota
```

```
             p
1 3.553156e-05
```

Výsledná *p*-hodnota $p =$ .... Protože ...., H_0 .... na hladině významnosti $\alpha =$ ....

Interpretace výsledků: Mezi největší délkou mozkovny starověké a novověké egyptské ženské populace existuje / neexistuje statisticky významný rozdíl.

```
par(...) # okraje graufu 2, 4, 2, 2
boxplot(skull.LF, ylim = c (155, 200), ...) # krabicovy diagram
points(m, pch = ..., ...) # bod reprezentujici vyberovy prumer
points(mu0, pch =..., ...) # bod reprezentujici konstantu mu0
legend('topright', fill = c('darkgreen', 'orange'), ...) # legenda
```



Párový test

- jeden objekt → dva párové znaky X a Y
  - délka pravé a levé holenní kosti; šířka pravého a levého nadočnicového oblouku
  - zkoumání podobných rysů dvojčat
- nechť $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n) \sim \mathbf{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $n \geq 2$, kde $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$, přičemž μ_1 je střední hodnota znaku X a μ_2 je střední hodnota znaku Y
- $H_{01} : \mu_1 = \mu_2 \quad \rightarrow \quad \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \mu = 0$
- $H_{11} : \mu_1 \neq \mu_2 \quad \rightarrow \quad \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \mu \neq 0$
- utvoříme rozdíly $Z_1 = X_1 - Y_1, \dots, Z_n = X_n - Y_n$.
- $Z_1, \dots, Z_n \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow$ **jednovýběrový test o μ, když σ^2 neznáme**
- **Předpoklad:** Normalita rozdílů $X_1 - Y_1, \dots, X_n - Y_n$

Dataset: 03-paired-means-clavicle2.txt
Datový soubor 03-paired-means-clavicle2.txt obsahuje osteometrické údaje o délkách klíčních kostí na pravé a levé straně těla v párovém uspořádání. Data pochází z anglického souboru dokumentovaných skeletů (Parsons, 1916).

Popis proměnných v datasetu:

- id . . . ID jedince;
- sex . . . pohlaví jedince (m - muž, f - žena);
- length.L . . . délka levé klíční kosti (v mm);
- length.R . . . délka pravé klíční kosti (v mm).

Příklad 8.3. Jednovýběrový párový test
Mějme datový soubor 03-paired-means-clavicle.txt a proměnnou length.R (resp. length.L) popisující délku klíční kosti z pravé (resp. z levé) strany. Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ zjistěte, zda je délka klíční kosti u mužů větší na levé straně než na pravé straně.

Řešení příkladu 8.3

```
data <- read.delim(...) # nacteni datoveho souboru
data <- na.omit(...) # odstraneni NA hodnot
length.RM <- data[data$sex == ..., ...] # vyber delky prave kl. kosti pro muze
length.LM <- data[data$sex == ..., ...] # vyber delky leve kl. kosti pro muze
diff <- length.LM - length.RM # rozdil delek z prave a leve strany
n <- length(...) # rozsah nah. vyberu (celkovy pocet rozdilu R - L)
tab <- data.frame(n = n, ...) # souhrnna tabulka vysledku
```

```
   n  min.L  max.L  min.R  max.R
1  50    130    176    126    175
```

Náhodný výběr obsahuje údaje o délkách klíčních kostí .... mužů. Naměřené hodnoty z levé strany se pohybují v rozmezí ....-............... mm, naměřené hodnoty z pravé strany se pohybují v rozmezí ....-............... mm.

Ze zadání máme za úkol porovnat hodnoty na pravé a levé straně, použijeme tedy test o střední hodnotě / test o rozptylu / párový test / test o korelačním koeficientu. Primárně bychom chtěli použít **parametrický** test. Nejprve však musíme ověřit splnění předpokladu **normality rozdílů** mezi naměřenými hodnotami na levé a pravé straně.

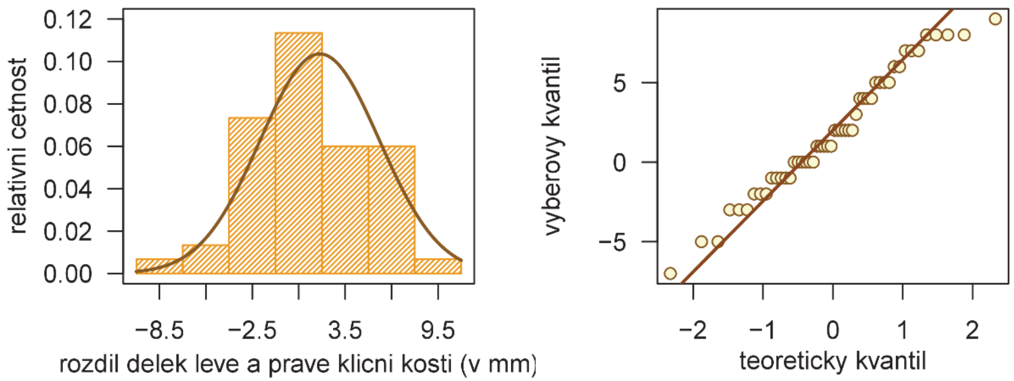
Test normality rozdílů na levé a pravé straně

- H_0 : Rozdíly mezi levou a pravou stranou .... z normálního rozdělení.
- H_1 : Rozdíly mezi levou a pravou stranou .... z normálního rozdělení.

Hladina významnosti $\alpha =$.............. . $n =$............. je větší než 30 a menší než 100 $\rightarrow$ Shapirův-Wilkův / Andersonův-Darlingův / Lillieforsův test.

```
[1] 0.266123
```

Náhodný výběr **rozdílů** délek klíčních kostí z levé a pravé strany u mužů .... z normálního rozdělení (p-hodnota $=$ .... je menší / větší než $\alpha = 0.05$).



Protože rozdíly pochází z normálního rozdělení, použijeme na ověření otázky ze zadání **parametrický párový test**, který si záhy převedeme na test o střední hodnotě při neznámém rozptylu.

Párový test → Test o střední hodnotě při neznámém rozptylu

- H_0 : .... → ....
- H_1 : .... → .... (... alternativa).
- Hladina významnosti $\alpha =$ ....

a) **Test kritickým oborem**

```
alpha <- ... # zadana hladina vyznamnosti
mu0 <- ... # konstanta mu0 = 0
m <- mean(...) # vyberovy prumer rozdilu
s <- sd(...) # vyberova sm. odchylka rozdilu
tw <- (...) / (...) # testovaci statistika tw
q <- qt(...) # dolni hranice kritickeho oboru
```

```
       tw        q
1 3.41212 1.676551
```

Hodnota testovací statistiky $t_w =$ ...., kritický obor W má tvar ....
Protože ...., H_0 .... na hladině významnosti $\alpha =$ ....

b) **Test intervalem spolehlivosti**

```
dh <- m - ... / ... * qt(...) # dolni hranice IS
```

```
          dh
1  0.9460859
```

Interval spolehlivosti má tvar .... Protože ...., H_0 .... na hladině významnosti $\alpha =$ ....

c) **Test p-hodnotou**

```
p.hodnota <- 1 - pt(...) # p-hodnota
```

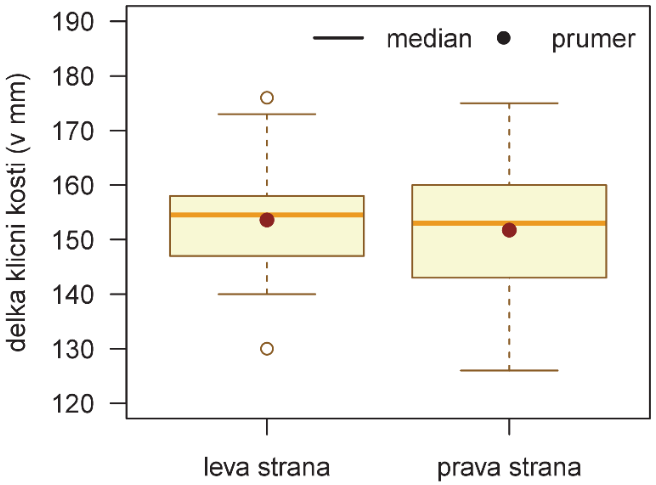
```
             p
1  0.0006503568
```

Výsledná p-hodnota $p =$ .... Protože ...., H_0 .... na hladině významnosti $\alpha =$ ....

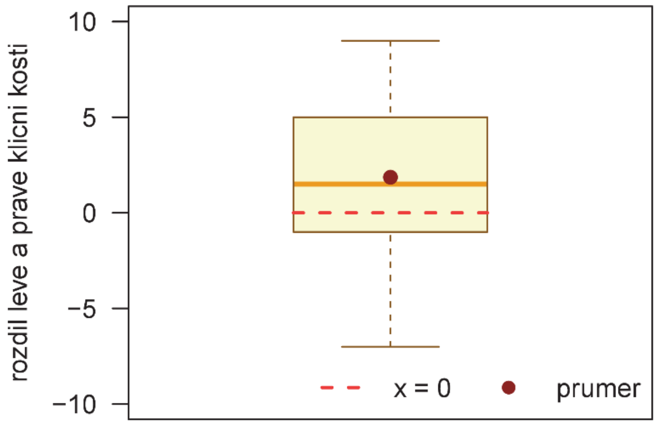
Interpretace výsledků: Délka klíční kosti u mužů na levé straně je / není statisticky významně větší než na pravé straně.

```
par(...) # okraje grafu 2, 4, 2, 2
boxplot(length.LM, length.RM, names = c('leva strana', 'prava strana'),
        ...) # krabicovy diagram
points(c(mean(length.LM), mean(length.RM)), ...) # vyberove prumery
legend('topright', horiz = T, pch = c(NA, 19), lty = c(1, NA), lwd = c(2, NA),
       ...) # legenda

boxplot(diff, names = 'leva - prava', ...) # krabicovy diagram
segments(0.8, 0, 1.2, 0, lty = 2, col = 'brown2', lwd = 2) # nula
points(mean(diff), ...) # vyberovy prumer
legend(...) # legenda
```



190
180
170
160
150
140
130
120
median
prumer
delka klicni kosti (v mm)
leva strana
prava strana



10
5
0
−5
−10
rozdil leve a prave klicni kosti
x = 0
prumer

Test o korelačním koeficientu ρ

- $(X_1, Y_1)^T \dots (X_n, Y_n)^T$ je náhodný výběr z $N_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ a ρ_0 je konstanta.
- **Hypotézy**
  - $H_{01} : \rho = \rho_0$ oproti $H_{11} : \rho \neq \rho_0$ (oboustranná alt.)
  - $H_{02} : \rho \leq \rho_0$ oproti $H_{12} : \rho > \rho_0$ (pravostranná alt.)
  - $H_{03} : \rho \geq \rho_0$ oproti $H_{13} : \rho < \rho_0$ (levostranná alt.)
- **Test kritickým oborem**
  - testovací statistika $Z_W = \sqrt{n-3}(Z_R - \xi_0) \overset{\mathcal{A}}{\sim} N(0,1)$
  - $Z_R = \frac{1}{2} \ln \frac{1+R}{1-R}$ je Fisherova Z-transformace výběrového korelačního koeficientu R
  - $\xi_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}$ je Fisherova Z-transformace konstanty ρ_0
  - kritický obor
    - $H_{11} : \rho \neq \rho_0$: $W = \left(-\infty\,;\, u_{\alpha/2}\right\rangle \cup \left\langle u_{1-\alpha/2}\,;\, \infty\right)$
    - $H_{12} : \rho > \rho_0$: $W = \langle u_{1-\alpha}\,;\, \infty)$
    - $H_{13} : \rho < \rho_0$: $W = (-\infty\,;\, u_\alpha\rangle$
  - u_α je α kvantil standardizovaného normálního rozdělení . . . qnorm(alpha)
- **Test intervalem spolehlivosti**
  - konstanta ρ_0 + interval spolehlivosti
    - $H_{11} : \rho \neq \rho_0$: $(d, h) = \left(\tanh\left(z_R - \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}\right)\,;\, \tanh\left(z_R - \frac{u_{\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}\right)\right)$
    - $H_{12} : \rho > \rho_0$: $(d, 1) = \left(\tanh\left(z_R - \frac{u_{1-\alpha}}{\sqrt{n-3}}\right)\,;\, 1\right)$
    - $H_{13} : \rho < \rho_0$: $(-1, h) = \left(-1\,;\, \tanh\left(z_R - \frac{u_{\alpha}}{\sqrt{n-3}}\right)\right)$
  - tanh je hyperbolický tangens. . . tanh()
- **Test p-hodnotou**
  - hladina významnosti α + p-hodnota:
    - $H_{11} : \rho \neq \rho_0$ p-hodnota $= 2\min\left(\Pr(Z_W \leq z_W), \Pr(Z_W > z_W)\right) =$ 2 min(pnorm(zW), 1 - pnorm(zW))
    - $H_{12} : \rho > \rho_0$: p-hodnota $= \Pr(Z_W > z_W) = 1 - \Pr(Z_W \leq z_W) =$ 1 - pnorm(zW)
    - $H_{13} : \rho < \rho_0$: p-hodnota $= \Pr(Z_W \leq z_W) =$ pnorm(zW)

Dataset: 06-lin-uhl-fm.txt
Datový soubor 06-lin-uhl-fm.txt obsahuje údaje o třech lineárních rozměrech popisujících výšku a šířku lebky a lebeční báze vypočítaných z původních x, y a z souřadnic čtyř význačných bodů (*bregma*, *basion*, *porion dx* a *porion sin*) digitalizovaných na 60 vybraných lebkách dospělých jedinců (40 mužů a 20 žen) z kosterní sbírky z archeologické lokality Pohansko - Pohřebiště okolo kostela (Jurda, 2008).

Popis proměnných v datasetu:

- sex - pohlaví (m - muž, f - žena);
- skull.H - výška lebky (v mm);
- base.H - výška lebeční báze (v mm);
- base.B - šířka lebeční báze (v mm);

Příklad 8.4. Test o korelačním koeficientu ρ
Mějme datový soubor 06-lin-uhl-fm.txt, proměnnou skull.H popisující výšku lebky a proměnnou base.B popisující šířku lebeční báze. Na hladině významnosti $\alpha = 0.01$ zjistěte, zda mezi výškou lebky a šířkou lebeční báze žen z archeologické lokality Pohansko existuje nepřímá závislost.

Řešení příkladu 8.4

```
data <- read.delim(...) # nacteni datoveho souboru
data.F <- data[data$sex == ..., c(..., ...)] # vyber potrebnych sloupcu pro zeny
data.F <- na.omit(...) # odstraneni NA hodnot
skull.HF <- data.F$... # vyber promenne skull.H z tabulky data.F
base.BF <- data.F$... # vyber promenne base.B z tabulky data.F
n <- length(...) # rozsah dvourozmerneho nahodneho vyberu
```

```
   n         rho
1 20  -0.1712964
```

Datový soubor obsahuje údaje o výšce lebky a šířce lebeční báze .... žen z archeologické lokality Pohansko.

Ze zadání máme za úkol vyhodnotit závislost mezi dvěma znaky, použijeme tedy test o střední hodnotě / test o rozptylu / párový test / test o korelačním koeficientu. Primárně bychom chtěli použít **parametrický** test. Nutným předpokladem k použití parametrického testu je **dvourozměrná normalita naměřených hodnot**.

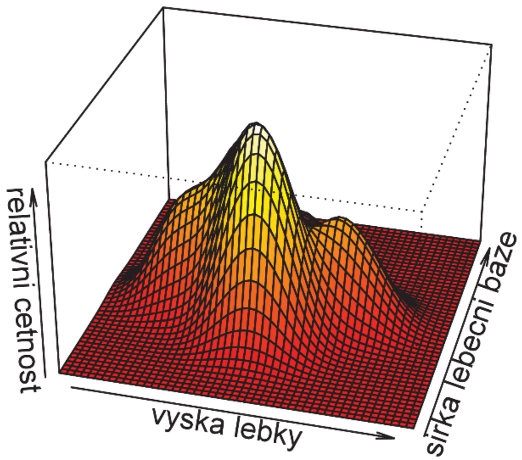
Test dvourozměrné normality naměřených hodnot

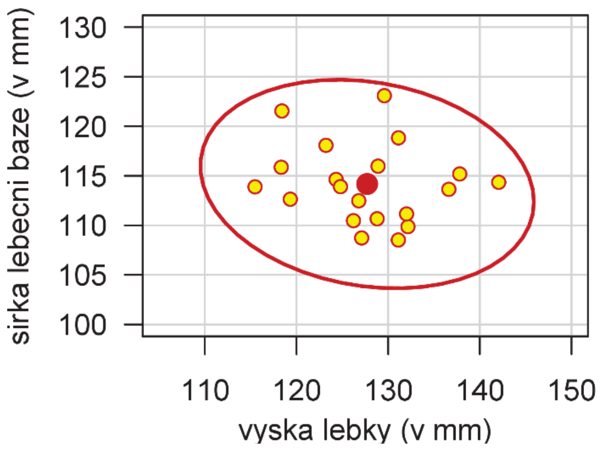
- H_0: Data .... z dvourozměrného normálního rozdělení.
- H_1: Data .... z dvourozměrného normálního rozdělení.

Hladina významnosti $\alpha =$............... Mardiův test.

```
             Test          Statistic           p value Result
1 Mardia Skewness    1.8644228962696 0.760677136630339    YES
2 Mardia Kurtosis -0.860220423559418 0.389667548510268    YES
3             MVN               <NA>              <NA>    YES
```

Náhodný výběr výšek lebky a šířek lebeční báze žen z archeologické lokality Pohansko .... z dvourozměrného normálního rozdělení. (Data vykazují / nevykazují výrazné zešikmení (p-hodnota = ... je menší / větší než $\alpha = 0.05$). Data vykazují / nevykazují výrazné zešpičatění či zploštění (p-hodnota = ... je menší / větší než $\alpha = 0.05$).





Protože data pochází z dvourozměrného normálního rozdělení, použijeme na ověření otázky ze zadání **parametrický test**.

Test o korelačním koeficientu ρ

- H_0 : ....
- H_1 : .... (... alternativa).
- Hladina významnosti $\alpha =$ ....

a) **Test kritickým oborem**

```
alpha <- ... # zadana hladina vyznamnosti
rho0 <- 0 # konstanta rho0
r <- cor(...) # vyberovy korelacni koeficient
zR <- 1 / 2 * log(... / ...) # Fisherova Z-transformace vyb. korel. koef. r
ksi0 <- 1 / 2 * log(... / ...) # Fisheorova Z-transformace rho0 = 0
```

```
zw <- (...) * sqrt(...) # testovaci statistika zw
q <- qnorm(...) # horni hranice kritickeho oboru
```

```
            r          zR ksi0          zw          q
1 -0.1712964 -0.173002    0 -0.7133054 -2.326348
```

Hodnota testovací statistiky $z_w =$ ...., kritický obor W má tvar .... Protože ...., H_0 .... na hladině významnosti $\alpha =$ ....

b) **Test intervalem spolehlivosti**

```
hh <- tanh(... / ...) # horni hranice IS
```

```
         hh
1 0.3724117
```

Interval spolehlivosti má tvar .... Protože ...., H_0 .... na hladině významnosti $\alpha =$ ....

c) **Test *p*-hodnotou**

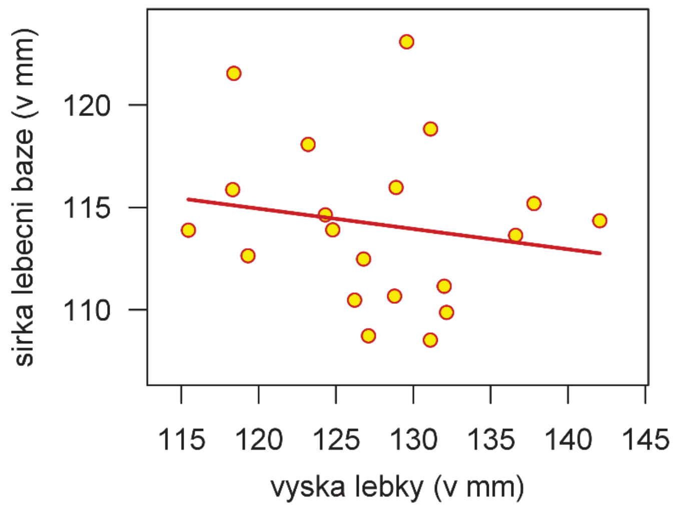
```
p.hodnota <- pnorm(...) # p-hodnota
```

```
  p.hodnota
1 0.2378284
```

Výsledná p-hodnota $p =$ .... Protože ...., H_0 .... na hladině významnosti $\alpha =$ ....

Interpretace výsledků: Mezi výškou lebky a šířkou lebeční báze žen z archeologické lokality Pohansko existuje / neexistuje statisticky významná nepřímá stochastická závislost. Mezi výškou lebky a šířkou lebeční báze žen existuje .... stupeň .... závislosti ($\widehat{\rho} = -0.1713$).

```
par(...) # okraje grafu 4, 4, 2, 2
plot(skull.HF, base.BF, ...) # teckovy diagram
k <- lm(base.BF ~ skull.HF)$coef # vypocet linearniho trendu mezi znaky x a y
x <- seq(...) # posl. od min do max namerene vysky lebky o delce 1000
y <- k[1] + x * k[2] # hodnoty y (linearni trend) pro kazdou hodnotu posl. x
lines(x, y , ...) # krivka zobrazujici trend zavislosti X a Y
mtext(...) # popisek osy x
```



Test o nulovém korelačním koeficientu ρ (Test o nezávislosti)

- $(X_1, Y_1)^T, \ldots, (X_n, Y_n)^T$ je náhodný výběr z $N_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$
- **Hypotézy**
  - $H_{01} : \rho = 0$ oproti $H_{11} : \rho \neq 0$ (oboustranná alt.)
  - $H_{02} : \rho \leq 0$ oproti $H_{12} : \rho > 0$ (pravostranná alt.)
  - $H_{03} : \rho \geq 0$ oproti $H_{13} : \rho < 0$ (levostranná alt.)
- **Test kritickým oborem**
  - testovací statistika $T_W = \frac{\sqrt{n-2}R}{\sqrt{1-R^2}} \sim t_{n-2}$
  - kritický obor
    - $H_{11} : \rho \neq 0$: $W = (-\infty\,;\, t_{n-2}(\alpha/2)\rangle \cup \langle t_{n-2}(1-\alpha/2)\,;\, \infty)$
    - $H_{12} : \rho > 0$: $W = \langle t_{n-2}(1-\alpha)\,;\, \infty)$
    - $H_{13} : \rho < 0$: $W = (-\infty\,;\, t_{n-2}(\alpha)\rangle$
  - $t_{n-2}(\alpha)$ je α kvantil Studentova rozdělení o $n-2$ stupních volnosti . . . qt(alpha, n - 2).
- **Test intervalem spolehlivosti**
  - konstanta $c = R$ (výběrový korelační koeficient) + interval spolehlivosti
    - $H_{11} : \rho \neq 0$ $(d, h) = \left(\frac{t_{n-2}(\alpha/2)}{\sqrt{t^2_{n-2}(\alpha/2)+n-2}}\,;\, \frac{t_{n-2}(1-\alpha/2)}{\sqrt{t^2_{n-2}(1-\alpha/2)+n-2}} \right)$
    - $H_{12} : \rho > 0$: $(-1, h) = \left(-1\,;\, \frac{t_{n-2}(1-\alpha)}{\sqrt{t^2_{n-2}(1-\alpha)+n-2}} \right)$
    - $H_{13} : \rho < 0$: $(d, 1) = \left(\frac{t_{n-2}(\alpha)}{\sqrt{t^2_{n-2}(\alpha)+n-2}}\,;\, 1 \right)$
  - O H_0 rozhodujeme podle toho, zda $R \in IS$ nebo $R \notin IS$. Jedná se o výjimku.
- **Test *p*-hodnotou**
  - hladina významnosti α + p-hodnota:
    - $H_{11} : \rho \neq 0$ p-hodnota $= 2\min\{\Pr(T_W \leq t_W)\,,\, \Pr(T_W > t_W)\} =$ 2 min(pt(tW, n - 2), 1 - pt(tW, n - 2))
    - $H_{12} : \rho > 0$: p-hodnota $= \Pr(T_W > t_W) = 1 - \Pr(T_W \leq t_W) =$ 1 - pt(tW, n - 2)
    - $H_{13} : \rho < 0$: p-hodnota $= \Pr(T_W \leq t_W) =$ pt(tW, n - 2)

Příklad 8.5. Test o nezávislosti
Mějme datový soubor 06-lin-uhl-fm.txt, proměnnou skull.H popisující výšku lebky a proměnnou base.B popisující šířku lebeční báze. Na hladině významnosti $\alpha = 0.01$ zjistěte, zda mezi výškou lebky a šířkou lebeční báze žen z archeologické lokality Pohansko existuje nepřímá závislost.

Řešení příkladu 8.5
Zadání příkladu a tedy i rozbor příkladu je totožný s příkladem 8.4. Nulovou hypotézu H_0 nyní ale otestujeme pomocí parametrického testu o nezávislosti.

Test o nezávislosti

a) **Test kritickým oborem**

```
alpha <- ... # zadana hladina vyznamnosti
r <- cor(...) # vyberovy korelacni koeficient
n <- length(...) # rozsah nahodneho vyberu n
tw <- ... # testovaci statistika tw
q <- qt(alpha, n - 2)  # horni hranice kritickeho oboru
```

```
         tw        q
1 -0.737652 -2.55238
```

Hodnota testovací statistiky $t_w =$ ...., kritický obor W má tvar ....
Protože ...., H_0 .... na hladině významnosti $\alpha =$ ....

b) **Test intervalem spolehlivosti**

```
dh <- qt(...) / sqrt(...) # dolni hranice IS
```

```
          dh          r
1 -0.5155045 -0.1712964
```

Interval spolehlivosti má tvar .... Protože ...., H_0 .... na hladině významnosti $\alpha =$ ....

c) **Test *p*-hodnotou**

```
p.hodnota <- pnorm(...) # p-hodnota
```

```
  p.hodnota
1  0.230363
```

Výsledná *p*-hodnota $p =$....................... . Protože ...., H_0 .... na hladině významnosti $\alpha =$ ....

Interpretace výsledků: Mezi výškou lebky a šířkou lebeční báze žen existuje / neexistuje statisticky významná nepřímá stochastická závislost. Ke stejnému závěru jsme došli také v rámci příkladu 8.4.

Test o pravděpodobnosti

- $X_1, \ldots, X_N$ je náhodný výběr z alt. rozdělení, tj. $X \sim \mathrm{Alt}(p)$, $\widehat{p} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$ je bodový odhad parametru p
- **Hypotézy**
  - $H_{01}: p = p_0$ oproti $H_{11}: p \neq p_0$ (oboustranná alt.)
  - $H_{02}: p \leq p_0$ oproti $H_{12}: p > p_0$ (pravostranná alt.)
  - $H_{03}: p \geq p_0$ oproti $H_{13}: p < p_0$ (levostranná alt.)
- **Podmínka dobré aproximace:** $Np_0(1-p_0) > 9$
- **Test kritickým oborem**
  - testovací statistika: $Z_W = \frac{\widehat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{N}}} \overset{A}{\sim} N(0,1)$
  - kritický obor
    - $H_{11}: p = p_0$: $W = (-\infty; u_{\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty)$
    - $H_{12}: p > p_0$: $W = \langle u_{1-\alpha}; \infty)$
    - $H_{03}: p < p_0$: $W = (-\infty; u_{\alpha}\rangle$

    u_α je α kvantil standardizovaného normálního rozdělení ... qnorm(alpha)
- **Test intervalem spolehlivosti**
  - konstanta p_0 + interval spolehlivosti
    - $H_{11}: p = p_0$: $(d,h) = \left(\widehat{p} - \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{N}}u_{1-\alpha/2}\,,\ \widehat{p} - \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{N}}u_{\alpha/2}\right)$
    - $H_{12}: p > p_0$: $(d,1) = \left(\widehat{p} - \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{N}}u_{1-\alpha}\,,\ \infty\right)$
    - $H_{13}: p < p_0$: $(0,h) = \left(-\infty\,,\ \widehat{p} - \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{N}}u_{\alpha}\right)$
- **Test p-hodnotou**
  - hladina významnosti α + p-hodnota:
    - $H_{11}: p \neq p_0$: p-hodnota $= 2\min\left(\Pr(Z_W \leq z_W), \Pr(Z_W > z_W)\right) =$ 2 min (pnorm(zW), 1 - pnorm(zW))
    - $H_{12}: p > p_0$: p-hodnota $= \Pr(Z_W > z_W) = 1 - \Pr(Z_W \leq z_W) =$ 1 - pnorm(zW)
    - $H_{13}: p < p_0$: p-hodnota $= \Pr(Z_W \leq z_W) =$ pnorm(zW)

Dataset: 25-one-sample-probability-dermatoglyphs.txt
Datový soubor 25-one-sample-probability-dermatoglyphs.txt obsahuje údaje o výskytu jednoho ze tří dermatoglyfických vzorů (*vír*, *smyčka* a *oblouček*) na deseti prstech 235 mužů a 235 žen bagathské populace z Araku Valley. Celkem tedy máme k dispozici údaje o frekvencích výskytu dermatoglyfických vzorů na 4700 prstech. Údaje o frekvencích výskytu jednotlivých vzorů jsou k dispozici v následující tabulce.

vzor	pohlaví	
	muži	ženy
vír (whorl)	1053	880
smyčka (loop)	1246	1349
oblouček (arc)	51	121

Příklad 8.6. Jednovýběrový test o pravděpodobnosti
Načtěte datový soubor 25-one-sample-probability-dermatoglyphs.txt. Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ zjistěte, zda existuje rozdíl mezi pravděpodobností výskytu dermatoglyfického vzoru *smyčka* u mužů bagathské populace z Araku Valley a u mužů z populace Lambadis ($p_m = 0.5618$, $p_f = 0.6233$).

Řešení příkladu 8.6

```
data <- read.delim('25-one-sample-probability-dermatoglyphs.txt', row.names = 1)
N <- ... # celkovy vsech prstu muzu ve studii
x <- ... # celkovy pocet prstu s vyskytem vzoru smycka
p <- ... # odhad parametru p
```

```
      x     N         p
1 1246  2350  0.5302128
```

Výskyt vzoru smyčka byl zaznamenán na .... prstech z celkového počtu .... prstů (.................... %).

Ze zadání máme za úkol porovnat pravděpodobnost výskytu s konstantou, použijeme tedy test o střední hodnotě / test o rozptylu / test o korelačním koeficientu / test o pravděpodobnosti. Protože tento test je exaktním / asymptotickým testem, je před testováním H_0 nutné ověřit podmínku dobré aproximace $Np_0(1-p_0) > 9$.

```
p0 <- ... # konstanta p0
hp <- ... # podminka dobre aproximace
```

```
      p0        hp
1 0.5618  578.5248
```

$Np_0(1-p_0) =$ ....což je menší / větší než 9. Podmínka dobré aproximace je / není splněna.

Test o pravděpodobnosti

- H_0 : ....
- H_1 : .... (.. alternativa).
- Hladina významnosti $\alpha =$ ....

a) **Test kritickým oborem**

```
alpha <- ... # zadana hladina vyznamnosti
zw <- (...) / sqrt(...) # testovaci statistika zW
q1 <- qnorm(...) # horni hranice kritickeho oboru
q2 <- qnorm(...) # dolni hranice kritickeho oboru
```

```
         zw        q1       q2
1 -3.08616 -1.959964 1.959964
```

Hodnota testovací statistiky $z_w =$ ...., kritický obor W má tvar ....
Protože ...., H_0 .... na hladině významnosti $\alpha =$ ....

b) **Test intervalem spolehlivosti**

```
dh <- p - ... # dolni hranice IS
hh <- p - ... # horni hranice IS
```

```
         dh        hh
1 0.5100342 0.5503913
```

Interval spolehlivosti má tvar .... Protože ...., H_0 .... na hladině významnosti $\alpha =$ ....

c) **Test *p*-hodnotou**

```
p.hodnota <- 2 * min (..., ...) # p-hodnota
```

```
            p
1 0.002027595
```

Výsledná p-hodnota $p =$ .... Protože ...., H_0 ....
na hladině významnosti $\alpha =$ ....

Interpretace výsledků: Mezi pravděpodobností výskytu dermatoglyfického vzoru *smyčka* u mužů populace z Araku Valley a u mužů populace Lambadis existuje / neexistuje statisticky významný rozdíl.

```
source('Sbirka-AS-I-2018-funkce.R')
par(...) # okraje grafu 4, 4, 1, 1
rel.barplot(c(x, N - x), col = c('orange2', 'darkseagreen3'),
            border = 'goldenrod4', names = c('smycka', 'jiny'), density = 60,
            main = '', xlab = 'dermatoglyficky vzor',
            ylab = 'relativni cetnost') # sloupcovy diagram rel. cetnosti
```