1. TÝDEN (6. 10. 2020)

Příklad 1.8.1. Nechť A a B jsou jevy s pravděpodobnostmi $P(A) = \frac{3}{4}$ a $P(B) = \frac{1}{3}$. Dokažte, že platí

$$\frac{1}{12} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$$

a najděte příklady, v nichž nastává rovnost.

Obecně platí: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$.

Zároveň z def. pst. víme, že $0 \leq P(X) \leq 1 \quad \forall X \in \Omega$.

=> kombinováním:

a) Nechť $P(A \cup B) = 1$ (jev jistý) → bereme max. $P(A \cup B)$.

$P(A \cap B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{3} - 1 = \frac{1}{12}$

Nejvíc bude platit A, je $\frac{3}{4}$.

$P(B) \leq P(A)$

$B \subseteq A$

b) $P(A \cup B) \xrightarrow{\min} \frac{3}{4}$ ... to je v případě

$P(A \cap B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{3} - \frac{3}{4} = \frac{1}{3}$

(Druhý přístup: $P(A \cap B)$ => aby platilo, musí nastat jev A i B zároveň, musí být pst. jevu B => $P(B) = \frac{1}{2}$).

Příklad 1.8.2. Hana má tři děti, každé z nich má stejnou pravděpodobnost být kluk i holka. Uvažujme následující jevy:

$A = \{$ všechny děti mají stejné pohlaví$\}$

$B = \{$ nejvýše jedno z nich je kluk$\}$

$C = \{$v rodině je jak kluk tak holka$\}$

–Ukažte, že A je nezávislé na B a B je nezávislé na C.
– Je A nezávislé na C?

možnosti: KKK, HHK, HKK, HHH

$P(A) = \frac{1}{2}$ $\qquad P(B) = \frac{1}{2}$ $\qquad P(C) = \frac{1}{2}$

Nezávislost: $P(X \cap Y) = P(X) \cdot P(Y)$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4}$; $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ (HHH) ✓ ano

$P(B)\cdot P(C) = \frac{1}{4}$

$P(B\cap C) = \frac{1}{4}$ (HHK)

b) $P(A)\cdot P(C) = \frac{1}{4}$ $\neq$ není

$P(A\cap C) = 0$

Příklad 1.8.3. Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl

a) Bernoulliho rozdělení

b) Geometrického rozdělení

c) Poissonova rozdělení

STŘEDNÍ HODNOTY

a) $X \sim \binom{n}{x}\cdot p^x\cdot(1-p)^{n-x}$

$$EX = 0\cdot\binom{n}{0}\cdot p^0\cdot(1-p)^{n-x} + 1\cdot\binom{n}{1}\cdot p^1\cdot(1-p)^{n-1} + \dots +$$

$$+ n\cdot\binom{n}{n}\cdot p^n\cdot(1-p)^{n-n} = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{i}_{x}\cdot\underbrace{\binom{k}{i}\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i}}_{p(x)} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} i\cdot\frac{n!}{(n-i)!\,i!}\cdot p\cdot p^{i-1}\cdot(1-p)^{n-i} = p\cdot n\cdot\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\frac{(n-1)!}{(i-1)!\cdot(n-i)!}}_{\binom{n-1}{i-1}}\cdot p^{i-1}\cdot(1-p)^{n-i} =$$

$n! \leftarrow n\cdot(n-1)!$

$i=1 \leftarrow$ první člen stejně 0

substituce

$\boxed{i-1=k}$

$k \to 0$

$\boxed{n-1=k}$

$$= p\cdot n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!(k)!}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k+1} =$$

$$= p\cdot n\sum_{k=0}^{n-1}\underbrace{\binom{n-1}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k+1}}_{1\ (\text{psst})} = \underline{\underline{np}}.$$

b) $Ge(p) \sim X$

$$EX = \sum_{k=0}^{\infty} k\cdot(1-p)^k\cdot p = p\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot(1-p)^k = p\cdot(1-p)\sum_{k=0}^{\infty}\overbrace{k\,(1-p)^{k-1}}^{\text{derivace}}$$

SOUČET

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$$

derivace

$$-\sum(1-p)^{k-1}\cdot k = -\frac{1}{p^2}.$$

derivace

derivuji podle $p \Rightarrow -$!

$$\cancel{p}\cdot(1-p)\cdot\frac{(+1)}{p^2} = \frac{1-p}{p}$$

c) $$\sum_{x=0}^{\infty} x\cdot\underbrace{\frac{\lambda^x}{x!}\cdot e^{-\lambda}}_{x\ \cdot\ \lambda(x)} = \lambda\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}\cdot e^{-\lambda} = \left|\begin{array}{l}\text{subst.}\\ x-1=t\\ 1-1=t\\ t=0\end{array}\right| = \lambda\cdot\underbrace{\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\lambda^t}{t!}\cdot e^{-\lambda}}_{1} =$$

$$=\lambda$$

ROZPTYLY $\quad DX = EX^2 - [EX]^2$

a) *Bernoulli*

$$EX^2 = \sum_{x=0}^{n} x^2\cdot\binom{n}{x}\cdot p^x\cdot(1-p)^{n-x} = \sum_{x=0}^{n}(x^2-x+x)\binom{n}{x}\cdot p^x\cdot(1-p)^{n-x} =$$

$$=\sum(x^2-x)\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} + \underbrace{\sum x\binom{n}{x}\cdot p^x(1-p)^{n-x}}_{EX=np} = \sum\left[\cancel{x(x-1)}\cdot\frac{n!}{(n-x)!\cancel{x}\cancel{(x-1)}\cdot(x-2)!}\cdot p^x(1-p)^{n-x}\right]$$

$$+np = \sum_{x=0}^{n}\frac{n!}{(x-2)!(n-x)!}\cdot p^2\cdot p^{x-2}\cdot(1-p)^{n-x} + np =$$

$$= n\cdot(n-1)\cdot p^2\cdot\sum_{x=0}^{n}\frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!}\cdot p^{x-2}\cdot(1-p)^{n-x} + np =$$

$$= n(n-1)\cdot p^2\sum_{x=2}^{n}\binom{n-2}{x-2}\cdot p^{x-2}\cdot(1-p)^{n-x} + np = \left|\begin{array}{l}\text{subst.}\quad x-2=i\\ \qquad\qquad i=0\end{array}\right|$$

$$= n(n-1)p^2\cdot\underbrace{\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-2}{i}\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i+2}}_{1} + np = n(n-1)p^2+np$$

$$DX = n(n-1)p^2+np-[np]^2 = np^2(n-1)+np-n^2p^2 = \cancel{n^2p^2}-np^2+np-\cancel{n^2p^2} =$$

$$= np(1-p)$$

b) Geometrické

$$EX^2 = \sum_{x=0}^{\infty} x^2\cdot p\cdot(1-p)^x = \sum_{x=0}^{\infty}\left[x^2-x+x\right] p\cdot(1-p)^x =$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty}\left[x^2-x\right]p(1-p)^x + \underbrace{\sum_{x=0}^{\infty} x\,p(1-p)^x}_{\frac{1-p}{p}} = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)p(1-p)^2\cdot(1-p)^{x-2} + \frac{1-p}{p} =$$

mocninné řady:

$$\sum_{x=0}^{\infty}(1-p)^x = \frac{1}{p}$$

$$\sum x(1-p)^{x-1} = \frac{1}{p^2}$$

$$\sum x(x-1)(1-p)^{x-2} = \frac{2}{p^3}$$

$$= (1-p)^2\cdot\sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\,p\cdot(1-p)^{x-2} + \frac{1-p}{p} =$$

$$= (1-p)^2\cdot p\cdot\frac{2}{p^3} + \frac{1-p}{p} = (1-p)^2\cdot\frac{2}{p^2} + \frac{1-p}{p}$$

$$DX = (1-p)^2\cdot\frac{2}{p^2} + \frac{1-p}{p} - \frac{(1-p)^2}{p^2} = \frac{(1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p} = \frac{\cancel{p^2}-2p+1+p-\cancel{p^2}}{p^2} =$$

$$\frac{1-p}{p^2}$$

c) Poissonovo rozdělení

$$EX^2 = \sum x^2\cdot\frac{\lambda^x}{x!}\cdot e^{-\lambda} = \sum\left[x^2-x+x\right]\frac{\lambda^x}{x!}\cdot e^{-\lambda} = \sum x\cdot(x-1)\cdot\frac{\lambda^x}{x!}\cdot e^{-\lambda} +$$

$$+ \underbrace{\sum x\cdot\frac{\lambda^x}{x!}\cdot e^{-\lambda}}_{\lambda} = \lambda^2\cdot\sum\frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!}\cdot e^{-\lambda} + \lambda = \lambda^2+\lambda$$

$$DX = \lambda^2+\lambda-\lambda^2 = \lambda$$

4

$\boxed{\text{Najděte př. 2 náh. veličin, které jsou nekorelované, ale nejsou nezávislé!}}$

Mějme náh. veličinu X: $X \sim N(0,1) \Rightarrow EX = 0,\ DX = 1$

$Y = X^2$

Závislé jsou ($Y = X^2$).

Platí $Cov(X,Y) = E(XY) - EX\cdot EY = \overbrace{EX^3}^{0} - \overbrace{EX}^{0}\cdot EX^2 = 0$