Příklad 1.6.9

$Y = \{$ součet na obou kostkách je $7 \}$

$X_i = \{$ na první kostce padlo $i \}$, $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$

$P(Y)$ ... pst, že padla jedna ze šesti kombinací $(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)$

$$P(Y) = \frac{6}{6 \cdot 6} = \frac{1}{6}$$

$P(X_i) = \frac{1}{6}$ pro všechna i (kostky jsou férové)

$P(X_i \cap Y)$ ... pst, že padne i na první kostce a $6-i$ na druhé, tedy kombinace $(i, 6-i)$

$P(X_i \cap Y) = \frac{1}{36}$ pro všechna i

Celkem $P(X_i) \cdot P(Y) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = P(X_i \cap Y)$ pro všechna i

Tedy to, že součet na obou kostkách je 7, je nezávislé na hodnotě na první kostce.

Příklad 1.8.1

a) $A = \{6 \text{ padne právě jednou}\}$

$$P(A) = \underbrace{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}_{\text{padne v 1. hodu}} + \underbrace{\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}}_{\text{padne v 2. hodu}} = \underline{\underline{\frac{5}{18}}}$$

b) $B = \{\text{obě čísla sudá}\}$

$$P(B) = \underbrace{\frac{3}{6}}_{\text{sudé v 1. hodu}} \cdot \underbrace{\frac{3}{6}}_{\text{sudé v 2. hodu}} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

c) $C = \{\text{součet je } 4\}$, tomu odpovídají hody $(1,3), (2,2), (3,1)$

$$P(C) = \frac{3}{6 \cdot 6} = \underline{\underline{\frac{1}{12}}}$$

d) $D = \{\text{součet dělitelný třemi}\}$, tedy součet $3, 6, 9, 12$, tomu odpovídají kombinace

$(1,2), (2,1), (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1), (3,6), (4,5), (5,4), (6,3), (6,6)$

$$P(D) = \frac{12}{6 \cdot 6} = \underline{\frac{1}{3}}$$

Příklad 1.8.2

a) Chceme, aby hlava padla až při n-tém hodu. $P(\text{hlava}) = P(\text{orel}) = \frac{1}{2}$. Tedy chceme pravděpodobnost, že $(n-1)\times$ padne orel a pak hlava, to je

$$P = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}}$$

b) Pro další počítání použiji binomické rozdělení. X ... počet hlav v n hodech, $X \sim Bi(n, \frac{1}{2})$,

$p(x) = \binom{n}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-x}$. Chceme stejný počet hlav a orlů, tedy $\frac{n}{2}$ hlav (předp. n sudé)

$$P\left(X = \frac{n}{2}\right) = \binom{n}{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-\frac{n}{2}} = \underline{\underline{\binom{n}{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}}}}$$

c) Prst, že padly 2 hlavy:

$$P(X=2) = \binom{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \underline{\underline{\binom{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}}$$

d) Prst, že padly alespoň 2 hlavy: $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) =$

$$= 1 - \binom{n}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} - \binom{n}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n} - n\left(\frac{1}{2}\right)^{n} =$$

$$= \underline{\underline{1 - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}}$$

Příklad na konci přednášky

Řešíme diferenční rovnici pro $p \neq \frac{1}{2}$:

$$p_k = p \cdot p_{k+1} + (1-p)\, p_{k-1}$$

Do rovnice dosadíme $p_k = \theta^k$

$$\theta^k = p\, \theta^{k+1} + (1-p)\, \theta^{k-1} \quad / \theta$$
$$\theta = p\, \theta^2 + (1-p)$$
$$0 = p\theta^2 - \theta + (1-p)$$

$$D = 1 - 4p(1-p) = 1 - 4p + 4p^2 = (2p-1)^2$$

$$\theta_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(2p-1)^2}}{2p} = \frac{1 \pm |2p-1|}{2p} \overset{*}{=} \frac{1 \pm (2p-1)}{2p} = \begin{cases} \theta_1 = \frac{1+2p-1}{2p} = 1 \\ \theta_2 = \frac{1-2p+1}{2p} = \frac{1-p}{p} \end{cases}$$

* abs. hodnotu můžeme klidně odstranit, protože před ní jednou dáme + a podruhé −

Obecné řešení je tedy ve tvaru: $A + B \left(\frac{1-p}{p}\right)^k$

Dosadím okrajové podmínky $p_0 = 1$ a $p_N = 0$:

$$A + B = 1 \quad \rightarrow A = (1-B)$$
$$A + B\left(\frac{1-p}{p}\right)^N = 0 \quad \rightarrow (1-B) + B\left(\frac{1-p}{p}\right)^N = 0$$
$$B\left(-1 + \left(\frac{1-p}{p}\right)^N\right) = -1$$
$$B = -\frac{1}{-1+\left(\frac{1-p}{p}\right)^N} = \frac{1}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^N}$$
$$A = 1 - \frac{1}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^N}$$

Celkem tedy je řešení:

$$p_k = 1 - \frac{1}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^N} + \frac{1}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^N} \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^N - 1 + \left(\frac{1-p}{p}\right)^k}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^N}$$

$$\underline{\underline{p_k = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^k - \left(\frac{1-p}{p}\right)^N}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^N}}}$$