PRÍKLAD 4.1

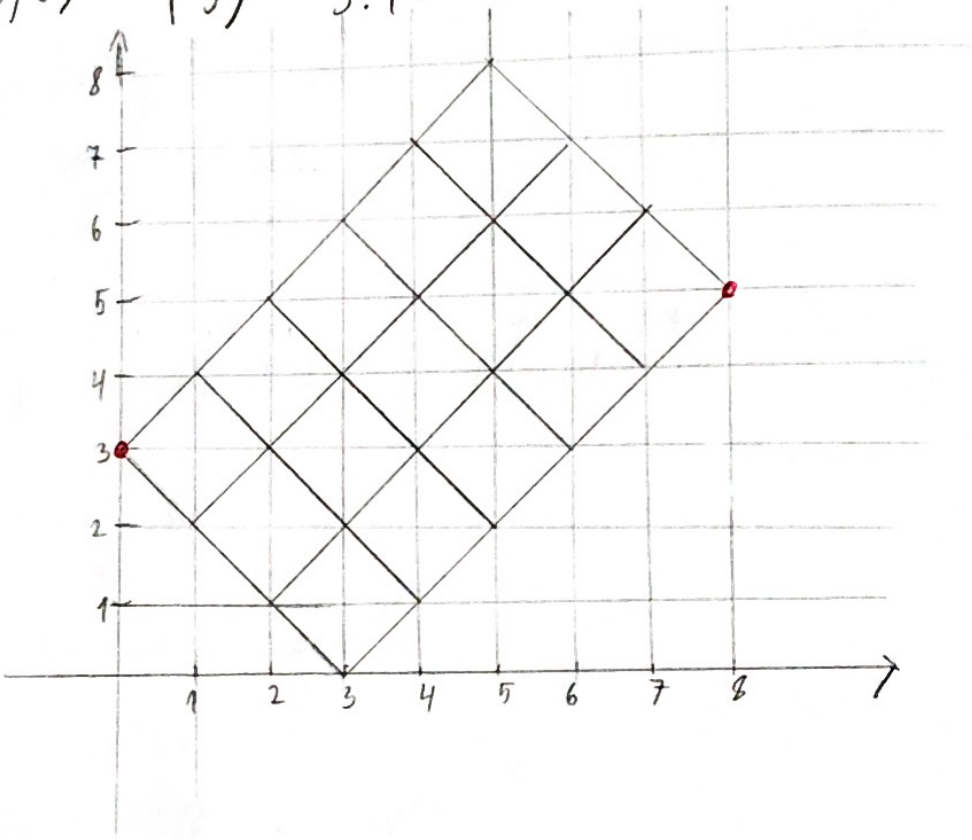
Nájdite počet ciest z bodu $(100, \overset{a}{3})$ do bodu $(\overset{n}{108}, \overset{b}{5})$ a znázornite graficky.

$\Rightarrow$ posunieme do počiatku $[0, \underset{a}{3}]$ a $[\underset{n}{8}, \underset{b}{5}]$

$$k = \frac{n+b-a}{2} = \frac{8+5-3}{2} = 5$$

$$l = \frac{n-b+a}{2} = \frac{8-5+3}{2} = 3$$

$$\binom{n}{k} = N_8(3,5) = \binom{8}{5} = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \underline{\underline{56}}$$



PRÍKLAD 4.2

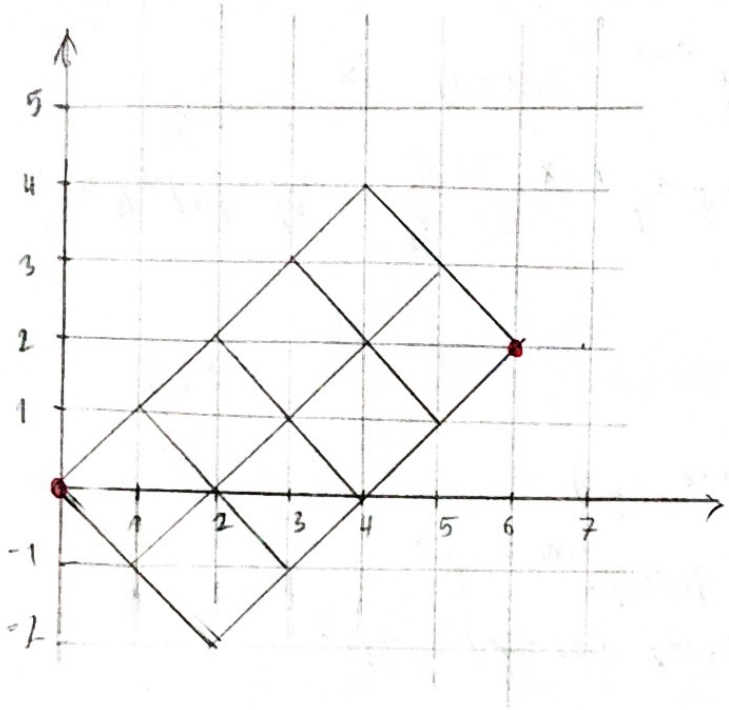
Nájdite počet ciest z bodu $(30, 200)$ do bodu $(36, 202)$.

$\Rightarrow$ posunieme do počiatku $[0, \underset{a}{0}]$ a $[\underset{n}{6}, \underset{b}{2}]$

$$k = \frac{n+b-a}{2} = \frac{6+2-0}{2} = 4$$

$$l = \frac{n-b+a}{2} = \frac{6-2+0}{2} = 2$$

$$\binom{n}{k} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!\,2!} = 15$$



PRÍKLAD 4.3

Kandidát A získal vo voľbách 52% hlasov, kandidát B 48% hlasov. Vypočítajte pravdepodobnosť, že kandidát A vo voľbách skôr viedol.

kandidát A $\rightsquigarrow$ 52% $\rightsquigarrow$ 0,52
kandidát B $\rightsquigarrow$ 48% $\rightsquigarrow$ 0,48

$$\left.\begin{array}{l} a = 0{,}52 \\ b = 0{,}48 \end{array}\right\} \; N = 1 = a + b, \quad N > b$$

$x_i = 1 \rightsquigarrow$ i-tý hlas pre A
$x_i = 1 \rightsquigarrow$ i-tý hlas pre B

$\rightsquigarrow$ bodov $(0,0)$ do bodov $(a+b, a-b)$

$$p = \frac{\frac{N-b}{N+b} N_{a+b}(0, a-b)}{N_{a+b}(0, a-b)} = \frac{N-b}{N+b} = \frac{0{,}52 - 0{,}48}{0{,}52 + 0{,}48} =$$

$$= 0{,}04 = \underline{\underline{4\%}}$$

PŘÍKLAD 4.4

pomocí generující funkce najděte 3. obecný moment náhodný veličiny s binomickým rozdělením $Bi(10, \frac{1}{2})$.

n p

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \qquad x = 0, \dots n$$

$$G_X(s) = \sum_{x=0}^{n} s^x \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (ps)^x q^{n-x}$$

$$= \underline{(ps+q)^n}$$

$$G_X'(s) = n(ps+q)^{n-1}(p)$$
$$G_X''(s) = n \cdot (n-1)(ps+q)^{n-2} p^2$$
$$G_X'''(s) = n(n-1)(n-2)(ps+q)^{n-3} p^3$$

3. obecný moment

$$E[X^3] = E(X(X-1)(X-2) + 3X^2 - 2X)$$
$$= E(X(X-1)(X-2)) + 3E(X^2) - 2EX$$
$$= G_X'''(1) + 3E(X(X-1)+X) - 2G_X'(1)$$
$$= G_X'''(1) + 3G_X''(1) + 3G_X'(1) - 2G_X'(1)$$
$$= G_X'''(1) + 3G_X''(1) + 1G_X'(1)$$
$$= n(n-1)(n-2)(p+q)^{n-3} p^3 + 3\left[n(n-1)(p+q)^{n-2} p^2\right] +$$
$$+ n(ps+q)^{n-1}(p)$$

dosadíme

$n = 10$

$p = 1/2$

$q = 1 - p = 1/2$

$$= 10(9) \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}^3 + 3\left[10 \cdot 9 \cdot 1/2^2\right] + 10 \cdot 1/2$$

$$= \underline{162{,}5}$$

PRÍKLAD 4.5

Nech $P(X=3) = \frac{1}{2}$, $P(X=5) = \frac{1}{3}$ a $P(X=1) = \frac{1}{6}$. Pomocou generujúcej funkcie vypočítajte očakávanie a rozptyl X.

$$G_X(s) = \frac{1}{2}s^3 + \frac{1}{3}s^5 + \frac{1}{6}s$$

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) \cdot s^k$$

$$G_X'(s) = \frac{3}{2}s^2 + \frac{5}{3}s^4 + \frac{1}{6} \quad \text{a} \quad G_X'(1) = \underline{EX} = \frac{9+10+1}{6} = \underline{\underline{\frac{10}{3}}}$$

$$G_X''(s) = \frac{6}{2}s + \frac{20}{3}s^3$$

$$\underline{\underline{\text{Var}(X)}} = G_X''(1) + G'(1) - (G'(1))^2$$

$$= \frac{6}{2} + \frac{20}{3} + \frac{10}{3} - \frac{100}{9} = \frac{39}{3} - \frac{100}{9} = \underline{\underline{\frac{17}{9}}}$$