Oceňování finančních derivátů

Martin Kolář

Numeraire

Pojem numeraire zachycuje volbu jednotek které použijeme pro vyjádření ceny aktiva.

Nechť f a g jsou ceny obchodovatelných aktiv, závisející na jednom zdroji nejistoty.

Definice: Hodnota

$$\Phi = \frac{f}{g}.$$

se nazývá *relativní cena* f vzhledem ke g.

Φ můžeme chápat jako cenu f vyjádřenou v jednotkách g, namísto korun.

Aktivum g se nazývá *numeraire*.

Věta: Za předpokladu neexistence arbitráže je Φ martingal pro nějakou volbu tržní ceny rizika. Touto volbou je volatilita g.

Důkaz: Nechť volatility f a g jsou σ_f a σ_g. Z minulé rovnice máme (za tržní cenu rizika bereme volatilitu g, tedy σ_g):

$$\mathrm{d}f = \left(r + \sigma_g \cdot \sigma_f\right)\, f \, \mathrm{d}t + \sigma_f \, f \, \mathrm{d}W$$

$$\mathrm{d}g = \left(r + {\sigma_g}^2\right)\, g \, \mathrm{d}t + \sigma_g \, g \, \mathrm{d}W.$$

Itôovo lemma (použité na funkci ln) dává

$$\mathrm{d}\ln f = \left(r + \sigma_g \cdot \sigma_f - \frac{{\sigma_f}^2}{2}\right) \mathrm{d}t + \sigma_f \, \mathrm{d}W$$

$$\mathrm{d}\ln g = \left(r + \frac{{\sigma_g}^2}{2}\right) \mathrm{d}t + \sigma_g \, \mathrm{d}W.$$

Tedy

$$\mathrm{d}\left(\ln f - \ln g\right) = \left(\sigma_g \cdot \sigma_f - \frac{{\sigma_f}^2}{2} - \frac{{\sigma_g}^2}{2}\right)\mathrm{d}t + \left(\sigma_f - \sigma_g\right)\mathrm{d}W$$

$$\mathrm{d}\left(\ln\left(\frac{f}{g}\right)\right) = -\frac{1}{2}\left(\sigma_f - \sigma_g\right)^2\mathrm{d}t + \left(\sigma_f - \sigma_g\right)\mathrm{d}W.$$

Aplikací Itôova lemmatu na proces $\frac{f}{g}$ a funkci ln dostaneme

$$\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right) = \left(\sigma_f - \sigma_g\right) \cdot \frac{f}{g}\,\mathrm{d}W.$$

Tedy $\Phi = \frac{f}{g}$ je *martingal*.

Svět, ve kterém je cena rizika rovna volatilitě g, budeme nazývat (forward)-*risk-neutrální vzhledem k g*.

Podíl $\frac{f}{g}$ je tedy martingal, odkud plyne

$$\frac{f_0}{g_0} = \mathrm{E}_g\left(\frac{f_T}{g_T}\right)$$

a

$$f_0 = g_0\, \mathrm{E}_g\left(\frac{f_T}{g_T}\right),$$

kde E_g je očekávaná hodnota v risk-neutrálním světě vzhledem ke g.

Volby numeraire:

1. Peněžní trh jako numeraire:

Peněžní trh je aktivum, které v čase $t = 0$ má hodnotu 1 Kč a získává okamžitou bezrizikovou míru r v libovolném čase, (kde r může být stochastické).

Je-li g hodnota peněžního trhu, pak

$$\mathrm{d}g = r \cdot g \cdot \mathrm{d}t$$

Drift je stochastický, ale volatilita g je rovna 0.

V risk-neutrálním světě vzhledem ke g je tedy cena rizika

rovna 0, neboť $\mu = r$.

Máme

$$f_0 = g_0 \, \widehat{\mathrm{E}} \left(\frac{f_T}{g_T} \right),$$

kde $\widehat{\mathrm{E}}$ je očekávání ve standardním risk-neutrálním světě. Dále

$$g_0 = 1 \quad \text{a} \quad g_T = \mathrm{e}^{\int_0^T r \, \mathrm{d}t}$$

tedy

$$f_0 = \widehat{\mathrm{E}}\left(\mathrm{e}^{-\int_0^T r\,\mathrm{d}t} \cdot f_T\right) \qquad ,$$

neboli

$$\boxed{f_0 = \widehat{\mathrm{E}}\left(\mathrm{e}^{-\bar{r}T} \cdot f_T\right)},$$

kde

$$\bar{r} = \frac{1}{T}\int_0^T r\,\mathrm{d}t$$

je aritmetický průměr hodnoty r mezi časy 0 a T.

2. Bezkuponový dluhopis jako numeraire:

Nechť $P(t, T)$ je cena v čase t bezkuponového dluhopisu, který vyplatí 1$ v čase T. Položme g rovno $P(t, T)$.

E_T bude označovat očekávání ve světě, který je risk-neutrální vzhledem k $P(t, T)$.

Protože $g_T = P(T, T) = 1$ a $g_0 = P(0, T)$, rovnice

$$f_0 = g_0 \cdot \mathrm{E}_g \left(\frac{f_T}{g_T} \right)$$

dává

$$\boxed{f_0 = P(0, T) \cdot \mathrm{E}_T(f_T)}. \qquad (1)$$

Tedy oproti peněžnímu trhu je diskontování (pomocí $P(0, T)$) mimo operátor očekávání.

To zjednoduší oceňování derivátů, které závisí jen na hodnotách v čase T.

Nechť θ je stochastická proměnná. Forwardový kontrakt na θ se splatností v čase T je definován jako kontrakt s výplatou

$$\theta_T - K$$

v čase T, kde θ_T je hodnota v čase T a K je realizační cena. Nechť f označuje hodnotu kontraktu. Máme

$$f_0 = P(0, T) \cdot [\mathrm{E}_T(\theta_T) - K].$$

Forwardová cena F je ta hodnota K, pro kterou je $f_0 = 0$.

Tedy

$$P(0, T) \cdot [\mathrm{E}_T(\theta_T) - F] = 0$$

odkud plyne

$$F = \mathrm{E}_T(\theta_T).$$

Tedy forwardová cena proměnné θ je očekávání budoucí ceny

ve světě risk-neutrálním vzhledem k $P(t, T)$.

Rozšíření Black-Scholesova modelu pro stochastickou úrokovou míru

Uvažujeme evropskou call opci s časem expirace T. Podle (1) máme

$$C = P(0, T) \cdot \mathrm{E}_T[\max(S_T - K, 0)],$$

kde S_T je cena akcie v čase T, K je realizační cena opce.

Nechť R je zero rate (T-roční okamžitá úroková míra),

$$P(0, T) = \mathrm{e}^{-RT},$$

tedy

$$C = \mathrm{e}^{-RT} \cdot \mathrm{E}_T[\max(S_T - K, 0)].$$

Předpokládejme, že S_T je lognormální v risk-neutrálním světě vůči $P(t, T)$ se střední směrodatnou odchylkou W.

Dostaneme (jako při odvození standardního Black-Scholesova vzorce)

$$\mathrm{E}_T[\max(S_T - K, 0)] = \mathrm{E}_T(S_T) \cdot \Phi(d_1) - K \cdot \Phi(d_2),$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln[\mathrm{E}_T(S_T)/K] + W^2/2}{W}, \qquad d_2 = \frac{\ln[\mathrm{E}_T(S_T)/K] - W^2/2}{W}.$$

$\mathrm{E}_T(S_T)$ je forwardová cena akcie pro kontrakt se splatností v

čase T. Z neexistence arbitráže plyne, že

$$\mathrm{E}_T(S_T) = S_0 \cdot \mathrm{e}^{RT}.$$

Celkem tedy

$$C = S_0 \cdot \Phi(d_1) - K \cdot \mathrm{e}^{-RT} \cdot \Phi(d_2),$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln[S_0/K] + RT + W^2/2}{W}, \qquad d_2 = \frac{\ln[S_0/K] + RT - W^2/2}{W}.$$

Platí-li $W = \sigma \cdot \sqrt{T}$, pak dostaneme přesně Black-Scholesův vzorec s r nahrazeným R.

Numerické metody oceňování evropských opcí

– Ukážeme si jak oceňovat evropské opce numericky.

– V tomto případě máme explicitní vzorec pro jejich hodnotu a numerické metody použít nemusíme.

– V případě amerických opcí ale nemáme jinou možnost než použít numerické metody.

– Ty jsou založeny právě na rozšíření příslušných numerických metod pro evropské opce.

Explicitní metoda

Black-Scholesovu rovnici nejdříve převedeme na standardní rovnici vedení tepla. Uvažujme tedy rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2}$$

na oblasti $\mathbb{R} \times (0, T)$, s počáteční podmínkou (transformovanou výplatní funkcí příslušné opce)

$$u(x, 0) = \psi(x) \tag{3}$$

a přetransformovanými okrajovými podmínkami pro $x \to \pm\infty$.

Například pro hodnotu call opce $V(S,t)$ platí $V \to 0$ pro $S \to 0$ a $V \to S$ pro $S \to \infty$.

Jako první krok budeme diskretizovat oblast $\mathbb{R} \times (0, T)$.

Zvolíme prostorový krok $h > 0$ a časový krok $k > 0$.

Předpokládejme, že $k = \frac{T}{m}$, jinak řečeno m je počet dělících podintervalů intervalu $(0, T)$.

V oblasti $\mathbb{R} \times (0, T)$ uvažujme síť mřížových bodů

$$x_i = ih, \quad i \in \mathbb{Z}, \qquad t_j = jk, \quad j = 0, \dots, m. \tag{4}$$

Aproximaci řešení v mřížovém bodě (x_i, t_j) označme u_i^j, tedy

$$u_i^j \approx u(x_i, t_j). \tag{5}$$

Parciální derivace budeme aproximovat diferencemi.

Uvažujme Taylorův rozvoj 2. řádu v bodě (x_i, t_j) . Máme

$x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1} = h$, tedy

$$u(x_{i+1}, t_j) = u(x_i, t_j) + \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} h^2 + O(h^3) \qquad (6)$$

a analogicky

$$u(x_{i-1}, t_j) = u(x_i, t_j) - \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} h^2 + O(h^3). \qquad (7)$$

Odečtením

$$u_{i+1}^{j} - u_{i-1}^{j} = 2\frac{\partial u}{\partial x}h + O(h^3) \tag{8}$$

a vydělením h

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) \approx \frac{u_{i+1}^{j} - u_{i-1}^{j}}{2h} \tag{9}$$

s chybou $O(h^2)$ pro $h \to 0$. To je aproximace první derivace

pomocí *centrální diference*.

Sečtením rovnic (s přidáním členů 3. řádu, které se vyruší) dostaneme po úpravě a vydělení h^2 aproximaci druhé derivace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j)) \approx \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}. \tag{10}$$

Pro časovou derivaci použijeme aproximaci pomocí *dopředné diference*.

Máme

$$u(x_i, t_{j+1}) = u(x_i, t_j) + \frac{\partial u}{\partial t} k + O(k^2) \tag{11}$$

Odtud

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) \approx \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} \tag{12}$$

s chybou $O(k)$.

Dosazením aproximací do rovnice vedení tepla máme pro u_i^j

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} \tag{13}$$

s chybou $O(k + h^2)$ pro $h, k \to 0$.

Tedy hodnotu na časové vrstvě $j+1$ lze explicitně vyjádřit

pomocí hodnot na vrstvě j,

$$u_i^{j+1} = \gamma u_{i-1}^j + (1-2\gamma) u_i^j + \gamma u_{i+1}^j, \tag{14}$$

kde $\gamma = \frac{k}{h^2}$.