Oceňování finančních derivátů

Martin Kolář

Numerické metody oceňování evropských opcí

– Ukážeme si jak oceňovat evropské opce numericky.

– V tomto případě máme explicitní vzorec pro jejich hodnotu a numerické metody použít nemusíme.

– V případě amerických opcí ale nemáme jinou možnost než použít numerické metody.

– Ty jsou založeny právě na rozšíření příslušných numerických metod pro evropské opce.

Explicitní metoda

Black-Scholesovu rovnici nejdříve převedeme na standardní rovnici vedení tepla. Uvažujme tedy rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

na oblasti $\mathbb{R} \times (0, T)$, s počáteční podmínkou (transformovanou výplatní funkcí příslušné opce)

$$u(x, 0) = \psi(x) \tag{2}$$

a přetransformovanými okrajovými podmínkami pro $x \to \pm\infty$.

Například pro hodnotu call opce $V(S,t)$ platí $V \to 0$ pro $S \to 0$ a $V \to S$ pro $S \to \infty$.

Jako první krok budeme diskretizovat oblast $\mathbb{R} \times (0, T)$.

Zvolíme prostorový krok $h > 0$ a časový krok $k > 0$.

Předpokládejme, že $k = \frac{T}{m}$, jinak řečeno m je počet dělících podintervalů intervalu $(0, T)$.

V oblasti $\mathbb{R} \times (0, T)$ uvažujme síť mřížových bodů

$$x_i = ih, \quad i \in \mathbb{Z}, \qquad t_j = jk, \quad j = 0, \dots, m. \tag{3}$$

Aproximaci řešení v mřížovém bodě (x_i, t_j) označme u_i^j, tedy

$$u_i^j \approx u(x_i, t_j). \tag{4}$$

Parciální derivace budeme aproximovat diferencemi.

Uvažujme Taylorův rozvoj 2. řádu v bodě (x_i, t_j) . Máme

$x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1} = h$, tedy

$$u(x_{i+1}, t_j) = u(x_i, t_j) + \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} h^2 + O(h^3) \qquad (5)$$

a analogicky

$$u(x_{i-1}, t_j) = u(x_i, t_j) - \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} h^2 + O(h^3). \qquad (6)$$

Odečtením

$$u_{i+1}^{j} - u_{i-1}^{j} = 2\frac{\partial u}{\partial x}h + O(h^3) \tag{7}$$

a vydělením h

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) \approx \frac{u_{i+1}^{j} - u_{i-1}^{j}}{2h} \tag{8}$$

s chybou $O(h^2)$ pro $h \to 0$. To je aproximace první derivace pomocí *centrální diference*.

Sečtením rovnic (s přidáním členů 3. řádu, které se vyruší) dostaneme po úpravě a vydělení h^2 aproximaci druhé derivace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j)) \approx \frac{u^j_{i+1} - 2u^j_i + u^j_{i-1}}{h^2}. \tag{9}$$

Pro časovou derivaci použijeme aproximaci pomocí *dopředné diference*.

Máme

$$u(x_i, t_{j+1}) = u(x_i, t_j) + \frac{\partial u}{\partial t} k + O(k^2) \tag{10}$$

Odtud

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) \approx \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} \tag{11}$$

s chybou $O(k)$.

Dosazením aproximací do rovnice vedení tepla máme pro u_i^j

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} \tag{12}$$

s chybou $O(k + h^2)$ pro $h, k \to 0$.

Tedy hodnotu na časové vrstvě $j+1$ lze explicitně vyjádřit

pomocí hodnot na vrstvě j,

$$u_i^{j+1} = \gamma u_{i-1}^j + (1-2\gamma) u_i^j + \gamma u_{i+1}^j, \tag{13}$$

kde $\gamma = \frac{k}{h^2}$.

Pro konečnost výpočtu musíme ještě omezit obor proměnné x.

Zvolíme N tak velké, abychom hraniční hodnoty u^j_{-N} a u^j_N mohli aproximovat pomocí okrajových podmínek.

Označme u^j vektor řešení na časové vrstvě j, tedy

$$u^j = (u^j_{-N+1}, \dots, u^j_{-1}, u^j_0, u^j_1, \dots, u^j_{N-1}) \tag{14}$$

je vektor v $\mathbb{R}^{2N-1}$.

V maticovém zápisu tak dostaneme

$$u^{j+1} = Au^j + b^j \tag{15}$$

pro $j = 0, \dots, m-1$, kde A je tridiagonální matice tvaru

$$A = \begin{pmatrix} 1-2\gamma & \gamma & & & \\ \gamma & 1-2\gamma & \gamma & & \\ & \gamma & \dots & & \\ & & & \dots & \gamma \\ & & & \gamma & 1-2\gamma \end{pmatrix} \tag{16}$$

a

$$b^j = \begin{pmatrix} \gamma u^j_{-N} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma u^j_N \end{pmatrix} \tag{17}$$

Pokud platí takzvaná *Courant-Lewy-Fridrichsova podmínka*

stability

$$0 < \gamma \leq \frac{1}{2}, \tag{18}$$

tedy

$$\frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}, \tag{19}$$

pak je explicitní metoda stabilní. To znamená, že přibližná

řešení konvergují pro $h, k \to 0$ k přesnému řešení.

Metoda binomického stromu

Pokud zvolíme

$$h = \sqrt{2k} \tag{20}$$

bude $\gamma = \frac{1}{2}$ a člen s koeficientem $1 - 2\gamma = 0$ vypadne.

Metoda pak má tvar

$$u_i^{j+1} = \frac{1}{2} u_{i-1}^j + \frac{1}{2} u_{i+1}^j, \tag{21}$$

tedy u_i^{j+1} je aritmetický průměr hodnot řešení ve vrstvě t_j.

Výpočet je tedy analogický jako u binomického modelu.

Implicitní metoda

V implicitní metodě pro aproximaci časové derivace namísto dopředné diference použijeme zpětnou diferenci,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) \approx \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{k} \tag{22}$$

s chybou $O(k)$. Tedy u_i^j splňuje rovnici

$$\frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{k} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} \tag{23}$$

opět s chybou $O(k + h^2)$ pro $h, k \to 0$.

Tedy

$$-\gamma u_{i-1}^{j} + (1+2\gamma)u_i^j - \gamma u_{i+1}^j = u_i^{j-1} \tag{24}$$

kde $\gamma = \frac{k}{h^2}$. Omezíme se opět na konečnou posloupnost prostorových bodů x_i, $i = -N+1, \dots N-1$. Pak dostaneme soustavu rovnic

$$Au^{j+1} = u^j + b^j \tag{25}$$

pro $j = 0, \dots m-1$, kterou vyřešíme vhodnou numerickou metodou (obvykle iterační metodou, viz. níže).

A je v tomto případě matice

$$A = \begin{pmatrix} 1+2\gamma & \gamma & & & \\ \gamma & 1+2\gamma & \gamma & & \\ & \gamma & \dots & & \\ & & & \dots & \gamma \\ & & & \gamma & 1+2\gamma \end{pmatrix} \tag{26}$$

a b je vektor

$$b^j = \begin{pmatrix} \gamma u^j_{-N} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma u^j_N \end{pmatrix} \tag{27}$$

kde hodnoty řešení v krajních bodech x_{-N} a x_N aproximujeme

pomocí okrajových podmínek.

– Hlavní výhodou implicitní metody je stabilita pro libovolnou hodnotu γ.

– Posloupnost přibližných řešení tedy vždy konverguje k přesnému řešení.

– Matice A je opět tridiagonální, ale navíc je diagonálně dominantní pro libovolné γ.

Iterační metoda řešení soustav lineárních rovnic

– Ukážeme si iterační metodu řešení systému lineárních rovnic, nazývanou SOR metoda

– lze ji adaptovat i na řešení úloh lineární komplementarity, na které vede oceňování amerických opcí.

Nechť $\omega > 0$ je zvolený parametr (tzv. relaxační parametr).

Nechť

$$A = L + D + U \tag{28}$$

je rozklad matice A na diagonální část (D) a dolní a horní trojúhelníkovou matici (L a U).

Chceme řešit rovnici

$$Au = b. \tag{29}$$

To je ekvivalentní rovnici

$$Du = Du + \omega(b - Au). \tag{30}$$

Z rozkladu $A = L + D + U$ dostaneme

$$(D + \omega L)u = (1 - \omega)Du - \omega Uu + \omega b. \tag{31}$$

Matice $D + \omega L$ je invertovatelná, tedy u řeší úlohu

$$u = T_\omega u + c_\omega \tag{32}$$

kde

$$T_\omega = (D + \omega L)^{-1}((1 - \omega)D - \omega U) \tag{33}$$

a

$$c_\omega = \omega(D + \omega L)^{-1} b. \tag{34}$$

Pomocí matice T_ω definujeme rekurentní posloupnost přibližných řešení úlohy $Au = b$,

$$u^0 = C \tag{35}$$

pro zvolený vektor C (např. $C = 0$) a

$$u^{p+1} = T_\omega u^p + c_\omega \tag{36}$$

pro $p = 1, 2, \dots,$

Pokud posloupnost u^p konverguje k nějakému vektoru u, pak zřejmě platí

$$u = T_\omega u + c_\omega, \tag{37}$$

tedy u je řešení původní úlohy $Au = b$.

Konvergenci dostaneme pomocí Banachovy věty o kontrakci.

Pokud dokážeme, že ve vhodné normě (např. spektrální, kdy je norma rovna maximu z absolutních hodnot vlastních čísel)

$$\| T_\omega \| < 1, \tag{38}$$

pak zobrazení

$$u \longrightarrow T_\omega u + c_\omega \tag{39}$$

je kontrakce

Platí následující věta:

Věta: Pro tridiagonální diagonálně dominantní matici existuje $\omega_0 \in (1, 2)$ pro které je spektrální norma minimální, a platí

$$\| T_{\omega_0} \| < 1. \tag{40}$$

SOR - Succesive OverRelaxation, neboť $\omega > 1$.

– Stačí velmi málo iterací pro dobrou aproximaci řešení