2. domácí úkol – MIN101 – podzim 2019 – odevzdat do **1.11.2019**

Uvažme matici

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ a & b & c \\ -2 & 8 & -11 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Určete parametry a, b, c tak, aby platily všechny následující podmínky:

- $\det M = 0$,
- $\det(M + E) = 0$,
- $h(M^2) < h(M)$.

Zde E je jednotková matice 3x3 a $h(\,)$ je hodnost matice. Najděte všechna řešení, je-li jich více.

Řešení: První dvě podmínky dávají lineární rovnice

$$a + 3b + 2c = 0 \quad \text{a} \quad a + 4b + 3c = -4,$$

což znamená $a = c + 12$, $b = -c - 4$ pro $c \in \mathbb{R}$ libovolné. Třetí podmínka v kombinaci s první znamená $h(M) = 2$ a $h(M^2) = 1$. Dosazením dostaneme

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3c + 45 & -3c - 47 & 3c + 48 \\ -c^2 - 19c - 60 & c^2 + 19c + 52 & -c^2 - 19c - 48 \\ 8c + 120 & -8c - 126 & 8c + 129 \end{pmatrix}.$$

Matice nyní lze upravit na schodovitý tvar – všimněte si, že všechny hodnoty v prvním sloupci mají faktor $c + 15$. Ukáže se, že $h(M^2) = 1$ platí pouze pro $c = -15$, tj. pro $a = -3$ a $b = 11$.