3. domácí úkol – MIN101 – podzim 2019 – odevzdat do **25.11.2019**

Mějme soustavu rovnic

$$x_1 + ax_2 + 2bx = b + 2, \quad -x_1 + bx + 2ax_3 = 3a, \quad -x_1 + (-a + b - 1)x_2 - 2x_3 = a - 2$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$. Určete, všechny hodnoty parametrů a a b, pro které tato soustava

a) má právě jedno řešení,

b) má nekonečně mnoho češení,

b) nemá žádné řešení.

Řešení: Nejprve upravíme matici soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2b & b+2 \\ -1 & b & 2a & 3a \\ -1 & -a+b-1 & -2 & a-2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2b & b+2 \\ 0 & a+b & 2(a+b) & 3a+b+2 \\ 0 & b-1 & 2(b-1) & a+b \end{array}\right).$$

Odstraněním posledního sloupce dostaneme matici s nulovým determinantem, tj. soustava nemůže mít právě jedno řešení. Dále také hned vidíme, že případ nekonečně mnoha řešení se dvěma volnými parametry – tj. případ, kdy druhý i třetí řádek jsou identicky nulové – nastane pro $b = 1$ a $a = -1$.

Nekonečně mnoho řešení dostaneme, jestliže se druhý a třetí řádek liší o násobek, tj. $\frac{a+b}{b-1} = \frac{3a+b+2}{a+b}$. Až na případy $b = 1$ nebo $a = -b$ toto ekvivalentně znamená

$$(a+b)^2 = (b-1)(3a+b+2) \iff a^2 + 3a + 2 = b(a+1) \iff a = -1 \vee b = a + 2,$$

neboť $a^2 + 3a + 2 = (a+1)(a+2)$. Je-li $b = 1$, dostaneme nekonečně mnoho řešení pro $a + b = 0$ (ze třetího řádku), tj. $a = -1$; je-li $a = -b$, dostaneme nekonečně mnoho řešení pro $a = -1$ (z druhého řádku), tj. $b = 1$. Tedy zadaná soustava rovnic

- má nekonečně mnoho řešení, jestliže $a = -1$ nebo $b = a + 2$,
- nemá řešení, jestliže $a \neq -1$ a $b \neq a + 2$.